Българска академия на науките
Институт по математика и информатика

Проф. Людмил Кацарков

СИМПЛЕКТИЧНА ТОПОЛОГИЯ, НЕКОМУТАТИВНА ГЕОМЕТРИЯ И ОГЛЕДАЛНА СИМЕТРИЯ

АВТОРЕФЕРАТ

за присъждане на научна степен

"Доктор на Науките"

Област на висше образование: 4. Природни науки, Математика и Информатика
Професионално направление: 4.5. Математика
Научна специалност: "Геометрия и Топология"

София, 2023

Съдържание

1 Увод

Хомологичната огледална симетрия е ново направление в модерната математика. Основната цел на тази Дисертация е развиване на Хомологичната огледална симетрия за целите на класическата бирационална геометрия – показването, че общата четиримерна кубика и други многообразия на Fano не са рационални.

В своя доклад на Международния математически конгрес през 1994, Kontsevich (основен сътрудник на Katzarkov) изказва хипотезата, че Огледалната симетрия за двойка многообразия на Calabi-Yau X и Y би могла да бъде обяснена като еквивалентност на триангулирана категория, конструирана от алгебричната геометрия на X (производната категория на кохерентни снопове върху X) и друга триангулирана категория, конструрана от симплектичната геометрия на Y (производната категория на Fukaya). Witten описва топологичното "усукване" на $N = (2, 2)$ суперсиметрична теория на полето чрез т. нар. от него A- и B-модели на топологични струнни теории. Тези модели засягат изображения на Риманови повърхнини върху фиксирана "цел" – многообразие на Calabi-Yau или многообразие на Fano. Повечето от математическите хипотези на Огледалната симетрия са вложени във физическата еквивалентност на A-модела върху Y с B-модела върху "огледалото" X на Y. За да се обхване и случаят на отворени струни, необходимо е да се въведат гранични условия, за да се запази суперсиметрията. В A-модела тези гранични условия се появяват под формата на Лагранжеви подмногообразия на Y с определена допълнителна структура. В B-модела тези гранични условия се появяват под формата на холоморфни подмногообразия на X с холоморфни (или алгебрични) векторни разслоения върху тях. Това са обектите, използвани, за да се построят съответните категории. Те често се наричат A и B брани, съответно. Морфизмите в категориите се дават чрез спектъра на отворени струни, опънати между две брани. В случая на затворени струни, A- и B-моделите обхващат само топологичния сектор – една малка част от пълната теория на струните. Подобно, браните в тези модели са само приближения на цялостните динамични обекти, които са D-браните. Математиката, възникваща от тази малка част от Теорията на струните, е основната тема на настоящия тезис.

Основната част от дисертацията дава добре дефинирана математическа теория на Хомологичната огледална симетрия в случая на многообразия на Fano.

2 Основни идеи

Всъщност, основната идея на тази Дисертация е да се използват идеите на Теоретичната физика с цел разрешаване на класически проблеми на Алгебричната геометрия.

Нашите разглеждания се базират на два основни дяла на Теоретичната физика:

1) Конформна теория на полето – Квантова теория на полето, която е инвариантна под действието на конформни трансформации.

2) Огледална симетрия – в интерпретацията на Hori–Vafa и нейната категорна надстройка, направена от Kontsevich.

Развитието на Конформната теория на полето започва с двумерния случай. То е затвърдено със статия от 1983 г. на Belavin, Polyakov и Zamolodchikov.

В двумерната Квантова теория на полето имаме алгебрата на Witt от инфинитезимални конформни трансформации, която е централно продължена, с централен заряд и други пренормализационни заряди – спектри от размерности.

Alexander Zamolodchikov доказва C-теоремата на Zamolodchikov, според която потокът на пренормализационната група в двумерния случай е необратим.

Изчисляването на зарядите на Конформните теории на полето в общия случай е предизвикателна задача. В случая на масивни теории може да се използва Геометрия с цел тяхното изчисляване.

Теорията на спектрите от особености е развита паралелно на Теорията на централните заряди. Всъщност, тя е развита в същия град – в Москва от Arnold и Varchenko. Спектрите от особености съответстват на зарядите на Конформните теории на полето и C-теоремата на Zamolodchikov е Теоремата за семинепрекъснатостта в Теорията на спектрите от особености.

Пълното съответствие между зарядите на Конформните теории на полето, спектрите от особености и асимптотиките на решенията на обикновени диференциални уравнения е забелязано от Vafa и Cecotti през 90-те години на XX в.

В тази Дисертация свързваме горното съответствие с Хомологичната огледална симетрия – второто фундаментално направление на Теоретичната физика, което използваме.

Основната част от настоящата Дисертация е посветена на Хомологичната огледална симетрия. Огледалната симетрия започва като теория, позволяваща "броене на криви", и е дело на физиците. За нас това "броене на криви" – Теорията на Gromov–Witten – е инструмент, който води до по-висши структури, и като резултат – до приложения от по-висш ранг.

Изходната точка за нас е, че Бирационалната геометрия (производни категории) е "огледало" на Теорията на особеностите (категорията на анулиращи се цикли).

Започваме с най-простия случай – рационални повърхнини, където Бирационалната геометрия е доста лесна. Първо развиваме категорните основи на Хомологичната огледална симетрия. Установяваме факта, че бирационалните трансформации водят до възникване на нови особености върху "огледалната" страна. Разширяваме това съответствие в общия случай – това е основното съдържание на първата част от Дисертацията.

Във втората част развиваме Теорията на некомутативните структури на Hodge. Показваме също, че квантовото диференциално уравнение и неговите асимптотики съответстват на спектъра от особености на модела на Landau–Ginzburgl. Това е втората част от Дисертацията.

3 Структура на Дисертацията

Дисертацията е структурирана както следва. Започваме с установяването на Хомологичната огледална симетрия (ХОС) от гледна точка на Бирационалната геометрия –

повърхнини на Fano.

3.1 Повърхнини на Fano

В случая на многообразия на Fano, твърдението на хипотезата на ХОС е следното:

Хипотеза: Категорията на A-брани $D(FS(W))$ е еквивалентна на производната категория на кохерентни снопове (B-брани) върху Y.

Тук $(FS(W))$ е категорията на Fukaya–Seidel на потенциала W.

Доказваме тази хипотеза върху различни примери.

Съществува и паралелно твърдение на ХОС, свързващо производната категория на B-брани върху $W : X \to \mathbb{C}$, чиято дефиниция е предложена от Kontsevich, и производната категория на Fukaya на Y. Понеже много малко се знае за тези категории на Fukaya, няма да дискутираме детайлите на това твърдение в настоящата работа. Надеждата ни в това направление е, че алгебро–геометричните методи ще ни позволят да погледнем към категориите на Fukaya от различна перспектива.

Случаят, който основно ще засегнем тук, е този на претеглената проективна равнина $P^2(a,b,c)$ (където a,b,c са взаимно прости естествени числа). Нейното "огледало" е афинната хиперповърхнина $X = \{x^a y^b z^c = 1\} \subset (\mathbb{C}^*)^3$, снабдена с точна симплектична форма ω и суперпотенциал $W = x + y + z$. Нашата основна теорема е:

Теорема 1 *ХОС е в сила за $P^2(a,b,c)$ и нейни некомутативни деформации.*

Именно, показваме, че производната категория на кохерентни снопове (B-брани) върху претеглената проективна равнина $P^2(a,b,c)$ е еквивалентна на производната категория на анулиращи се цикли (A-брани) върху афинната хиперповърхнина $X \subset (\mathbb{C}^*)^3$. Освен това, показваме, че това огледално съответствие между производни категории може да бъде продължено до торични некомутативни деформации на $P^2(a,b,c)$, където се засягат B-брани, и техни огледални съответствия, неточни деформации на симплектичната структура на X, където се засягат A-брани.

Забелязваме, че претеглените проективни равнини са "неогъваеми" в смисъла на комутативни деформации, но имат едномерно модулно пространство от торични некомутативни деформации (P^2 има също други некомутативни деформации). Очакваме наличието на подобен феномен в много случаи, където е приложим торично–огледалният подход. Интересен въпрос би бил да се продължи това съответствие в случая на общи некомутативни торични многообразия. Ние ще се върнем към този въпрос в раздел 3 на Дисертацията.

Ще разгледаме също и някои други примери, освен тези на претеглени проективни равнини, с цел да покажем широката приложимост на ХОС:

- Като "подгряващ" пример даваме едно доказателство на ХОС за претеглени проективни линии.

- Дискутираме също ХОС за повърхнини на Hirzebruch $\mathbb{F}_n$. За $n \geq 3$ каноничният клас не е вече отрицателен ($\mathbb{F}_n$ не е Fano), и ХОС не е директно в сила, понеже са необходими някои модификации на торично–огледалния подход. Директното приложение на подхода продуцира модел на Landau–Ginzburg, чиято производна категория на анулиращи се цикли е идентична на тази на "огледалото" на претеглената проективна равнина $P^2(1,1,n)$. С цел да направим хипотезата на ХОС приложима в този случай, нужно е да се ограничим върху отворени подмножества на "целевото" пространство X на този модел на Landau–Ginzburg.

- Ще скицираме също една идея за доказателство на ХОС (изпускайки само някои аргументи от Теорията на Floer относно определени модулни пространства от псевдо–холоморфни дискове) за някои многообразия на Fano от висока размерност, напр. P^3.

3.2 Раздуване

Предишните разглеждания предполагат общо разбиране на огледалните бирационални трансформации.

3.3 Формулировка на резултатите

Нашият основен резултат в третата част на Дисертацията може да бъде формулиран както следва.

Нека $H = f^{-1}(0)$ е гладка почти тропична хиперповърхнина в (допустимо некомпактно) торично многообразие V от размерност n, и нека X е раздуването на $V \times \mathbb{C}$ по $H \times 0$, снабдено с S^1-инвариантна Келерова форма ω_ϵ, за което слоевете на изключителния дивизор имат достатъчно малка площ $\epsilon > 0$.

Нека Y е торичното многообразие, дефинирано чрез политопа $\{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,|\, \eta \geq \varphi(\xi)\}$, където φ е тропикализацията на f. Нека $w_0 = -T^\epsilon + T^\epsilon v_0 \in \mathcal{O}(Y)$, където T е параметърът на Novikov и v_0 е торичният моном с тегло $(0, \ldots, 0, 1)$, и да положим $Y^0 = Y \setminus w_0^{-1}(0)$. Накрая, нека $W_0 = w_0 + w_1 + \cdots + w_r \in \mathcal{O}(Y)$ е главният член, именно, сумата на w_0 и един торичен моном w_i $(1 \leq i \leq r)$ за всеки неразложим торичен дивизор на V. Предполагаме:

Предположение 1 *$c_1(V) \cdot C > \max(0, H \cdot C)$ за всяка рационална крива $C \simeq \mathbb{P}^1$ във V.*

Това включва важния специален случай, когато V е афинно торично многообразие. Приемайки това предположение, нашият основен резултат е следният:

Теорема 2 *Ако предположението е в сила, тогава Landau–Ginzburg моделът (Y^0, W_0) от B-страната е SYZ огледало на X.*

В общия случай, огледалото на X се различава от (Y^0, W_0) с един коригиращ член, който е от по-висок ред по отношение на параметъра на Novikov.

Снабдяването на X с подходящ суперпотенциал, даден чрез афинната координата на $\mathbb{C}$–множителя, влече Landau–Ginzburg модел от A-страната, чийто особености са от тип на Morse–Bott. С точност до "усукване" чрез клас от $H^2(X, \mathbb{Z}/2)$, този Landau–Ginzburg модел от A-страната може да бъде разглеждан като стабилизация на сигма моделът с "цел" H.

Теорема 3 *Предполагаме, че V е афинно, и нека $W_0^H = -v_0 + w_1 + \cdots + w_r \in \mathcal{O}(Y)$. Тогава Landau–Ginzburg моделът (Y, W_0^H) от B-страната е обобщено SYZ огледало на H.*

Landau–Ginzburg модел

За разлика от другите резултати, формулирани в това въведение, тази теорема, строго казано, се основава на предположението, че категориите на Fukaya на моделите на Landau–Ginzburg удовлетворяват определени свойства, за които няма да предоставяме пълни доказателства. Даваме схеми на доказателствата на тези резултати, както и посочваме стъпките, липсващи в нашия аргумент.

Един резултат, подобен на Теоремата, може да бъде получен от гледна точка на огледалната дуалност между торични Landau–Ginzburg модели. Въпреки това, торичният подход е много по-малко осветляващ, понеже геометрично той работи на нивото на отворени торични страти в съответните торични многообразия (тоталното пространство на $\mathcal{O}(-H) \to V$ от една страна, и Y – от друга), докато интересните геометрични характеристики на тези пространства се намират изцяло в торичните дивизори.

Основната теорема на тази част от Дисертацията се основава на едно твърдение от Огледалната симетрия за отворени многообразия на Calabi-Yau, което само по себе си е интересно. Разглеждаме коничното разслоение

$$X^0 = \{(\mathbf{x}, y, z) \in V^0 \times \mathbb{C}^2 \,|\, yz = f(\mathbf{x})\}$$

над отворена страта $V^0 \simeq (\mathbb{C}^*)^n$ на V, където f е отново дефиниционното уравнение на хиперповърхнината H. Коничното разслоение X^0 се явява отворено гъсто подмножество на X. Тогава имаме:

Теорема 4 *Отвореното многообразие на Calabi-Yau Y^0 е SYZ огледало на X^0.*

В горните твърдения, както и в по-голямата част от тази глава, разглеждаме X или X^0 като симплектично многообразие, и конструираме SYZ огледалото Y^0 (със суперпотенциал) като алгебрично модулно пространство от обекти в категорията на Fukaya на X или X^0. Тези разглеждания са в едно и също направление. Обаче, може да се работи и в обратното направление, започвайки от симплектичната геометрия на Y^0 и показвайки, че то допуска X^0 (сега разглеждано като комплексно многообразие) като SYZ огледало. За пълнота описваме тази обратна конструкция в следващия раздел.

Категория на Fukaya

Методите, които използваме, са приложими и в по-широк контекст. В частност, предположението, че V е торично многообразие не е строго необходимо – достатъчно е SYZ огледалната симетрия за V да бъде достатъчно добре разбрана. Като илюстрация разглеждаме повече примери.

Останалата част от тази глава е организирана както следва.

Първо, накратко разглеждаме SYZ подходът към Огледалната симетрия. Тогава въвеждаме означенията и описваме основните обекти на главния ни резултат, именно, пространствата X и Y и суперпотенциала W_0.

След това конструираме Лагранжева торична фибрация върху X^0, подобна на тези, разгледани преди от Gross. После изучаваме Лагранжевата теория на Floer за торичните слоеве, които използваме, за да докажем основната теорема. Тогава разглеждаме частичната компактификация на X^0 до X, и доказваме основната теорема.

Накратко разглеждаме обратната конструкция, именно, започваме от Лагранжева торична фибрация върху Y^0 и получаваме X^0 като негово SYZ огледало.

Накрая са дадени някои примери, илюстриращи основните ни резултати, в които общо има раздувания, водещи не до друго, а до възникването на нов особен слой.

Както следва, нуждаем се от развиване на Теория на особените слоеве, които не произхождат от раздувания. С цел да направим това, необходимо е да развием:

1) Некомутативна теория на Hodge и Теория на квантовите спектри – собствени стойности на квантовото умножение с каноничен клас.

2) Теория на некомутативните спектри.

3.4 Некомутативна теория на Hodge

Заради основополагащата природа на тази глава от Дисертацията, тя е доста обяснителна и техническа. Тя е организирана в три основни части:

Първата част въвежда и развива абстрактната Теория на некомутативните структури на Hodge. Тази теория е вариант на формализма на семибезкрайните структури на Hodge, които са въведени от Barannikov. Дискутираме Общата теория на некомутативните структури на Hodge в резюмето и анализираме различните начини, по които филтрационните данни на Betti, de Rham и Hodge могат да бъдат специфицирани. В частност, сравняваме Некомутативната теория на Hodge и обикновената Теория на Hodge, както и обясняваме как Некомутативната теория на Hodge пасва към Категорната некомутативна геометрия.

Започваме с дискутирането на понятието същинска некомутативна структура на Hodge. Некомутативните структури на Hodge са аналози на класическото понятие същинска структура на Hodge върху комплексно векторно пространство. Некомутативните структури, дискутирани тук, и неабелевите структури на Hodge на Simpson заедно обобщават класическата Теория на Hodge. В Теорията на Simpson се допуска нелинейност в основата на структурата на Hodge: неабелевите структури на Hodge са дадени чрез налагането на филтрации на Hodge и на теглови филтрации върху нелинейни топологични инварианти на Келерово пространство, например върху кохомология с неабелеви коефициенти, или върху хомотопичния тип. За разлика от горното, некомутативните структури, разглеждани в тази глава, съдържат нови данни от филтрационен тип (твисторните структури на които са все още специфицирани върху векторно пространство, например върху периодичната циклична хомология на алгебра).

Подобно на обикновената Теория на Hodge, некомутативните структури на Hodge възникват естествено върху кохомологията на de Rham на некомутативни пространства от категорен произход. Ще дадем няколко различни описания на некомутативна структура в термините на локални данни. Започваме с поятията рационална и неполяризирана некомутативна структура на Hodge, игнорирайки за момент наличието на поляризации и интегрални решетки.

Некомутативните структури ще бъдат описани в термините на геометрични данни върху "пробитата" комплексна права; така, фиксираме веднъж завинаги координата u върху $\mathbb{C}$ и компактификацията $\mathbb{C} \subset \mathbb{P}^1$. Ще означаваме с $\mathbb{C}[[u]]$ алгебрата на формалните степенни редове на u, и с $\mathbb{C}((u))$ – полето на формалните редове на Laurent на u. Подобно, ще означчваме с $\mathbb{C}\{u\}$ алгебрата на степенните редове на u, имащи положителен радиус на сходимост, и с $\mathbb{C}\{u\}[u^{-1}]$ – полето на мероморфните редове на Laurent на u с полюс най-много в $u = 0$.

Това води до Квантов D-модул и неговите асимптотики – Некомутативния спектър.

Обръщаме също специално внимание на некомутативните аспекти на Теорията на Hodge и нейното взаимодействие с класификацията на нерегулярни свързаности върху правата посредством топологични данни. Един от най-полезните технически резултати в тази част е Теоремата "за лепене", която ни позволява да сглобяваме некомутативни структури от определени прости геометрични елементи. Тази теорема е използвана по-късно в главата за конструиране на некомутативни структури, прикрепени към геометрии с потенциал.

Втората част обяснява как симплектичната и комплексната геометрии пораждат некомутативни структури на Hodge и как тези структури могат да бъдат разглеждани като интересни инварианти на Теорията на Gromov–Witten, Проективната геометрия и Теорията на алгебричните цикли. В частност, анализираме Betti – частта на Некомутативната теория на Hodge на проективно пространство (разглеждано като симплектично многообразие) и използваме този анализ, за да предложим обща хипотеза за интегралната структура върху кохомологията на категорията на Fukaya на общо компактно симплектично многообразие. Формулата за интегралната структура използва само инварианти на Gromov–Witten от род нула и характеристични класове на допирателното разслоение. Нашата хипотеза е в пълно съответствие със скорошна работа на Iritani, който прави подобно предложение, основаващо се на огледална симетрия за торични орбитални многообразия на Fano. Дискутираме също детайлно и произхода на данните на Stokes за холоморфни геометрии с потенциали и изследваме възможните категорни въплъщения на тези данни.

В третата част изучаваме некомутативни структури на Hodge и техни вариации, предполагайки Calabi-Yau условие. Разширяваме и обобщаваме стандартната Теория на деформациите на пространства на Calabi-Yau с цел да получим теория, работеща еднакво добре в некомутативен контекст, и да дава възможност за правилно дефиниране на канонични координати в Хомологичната огледална симетрия. Подхождаме към деформационно–обструктивния проблем едновременно алгебрично и чрез Теорията на Hodge, и получаваме необструктивни резултати, обобщаващи пре–Фробениусови структури, както и някои интересни геометрични свойства на периодични области за некомутативни структури на Hodge. Изучаваме също глобални и инфинитезимални деформации и описваме различни конструкции на данни от тип на Betti и от тип на de Rham в Некомутативната теория на Hodge за обикновената геометрия, релативната геометрия, геометрията с потенциали, както и за абстрактната некомутативна геометрия.

Накрая въвеждаме понятията квантов и некомутативен спектър.

3.5 Спектри

Основната идея на спектрите е интерпретация на класическия спектър на особеностите в меделите на Landau–Ginzburg (LG). Използваме теорията на LG моделите като обобщена теория на особеностите.

Горните разглеждания водят до бирационални инварианти. Ще основаваме нашите бирационални разглеждания на следните основни понятия и идеи:

1. **Квантов спектър**. Дефиниран е квантовият спектър. Нека $K\cdot$ е квантовото умножение с каноничен клас. То дефинира следното разлагане на кохомология:

   $$\mathcal{H} = \oplus_{\lambda_i} H_{\lambda_i}.$$

   Тук λ_i са собствените стойности на $K\cdot$. Наричаме тези собствени стойности *квантов спектър*. Основната теорема е:

   Основна теорема: Разлагането $\mathcal{H} = \oplus_{\lambda_i} H_{\lambda_i}$ е бирационална инварианта.

2. **Некомутативен спектър**. Дефиниран е некомутативният спектър.

Разширяваме тези идеи и даваме някои примери.

A) Построяваме аналози с нискоразмерна топология и даваме няколко нови направления за изследване.

B) Разширяваме дефиницията на некомутативен спектър до мултиспектри. Възможни приложения са дискутирани.

Нашите разглеждания са само върхът на айсберга. Предлагаме съответствие между нерационалността над алгебрично незатворени полета и комплексността на дискриминантните локуси на модулното пространство на LG модели. Разглеждаме някои аритметични приложения. Всъщност, може да се дефинират няколко различни спектри.

В добавка към **квантовия спектър**, споменат по-горе, може се дефинират следните спектри:

- **Некомутативен спектър,**

  дефиниран чрез асимптотиките на квантовото уравнение.

- **Спектър на Givental,**

  дефиниран чрез решенията на уравнението на Givental.

- **Спектър на LG модел – мултипликаторен сноп от идеали,**

  дефиниран като спектър на Steenbrink на нова Теория на особеностите на LG модела.

- **Асимптотики на условия за стабилност – спектър на стабилност,**

  дефиниран като асимптотики на гранични условия за стабилност.

- **Размерност на Serre на компонентата на Kuznetsov,**

  дефинирана като категорна размерност.

- **Спектър на Arnold-Varchenko-Steenbrink на афинния конус,**

  дефиниран като класическия спектър на афинна конична сингулярност над X.

- **R-заряди** – асимптотиките на RG-поток – същото като асимптотики на поток на Kähler-Ricci.

4 Заключителни бележки и бъдещи направления

Горните разглеждания водят до комбиниране на двете страни на Хомологичната огледална симетрия и откриване на нови бирационални инварианти. Няколко забележителни приложения са дискутирани накрая.

Какво сме постигнали с тази Дисертация?

Въвеждаме използването на Хомологичната огледална симетрия за решение на дълбоки проблеми на Бирационалната геометрия – въпроси за нерационалност. Единствените алгебро–геометрични приложения на Хомологичната огледална симетрия отпреди са свързани с "броене на криви".

Бирационалната геометрия е централно направление в Алгебричната геометрия – трябва да приемем, че все още не знаем напълно за нерационалността на кубиките.

Първата стъпка в тази посока е направена от Riemann – теорията на елиптичните интеграли доказва нерационалността на едномерната гладка кубика.

В размерност две въпроси за рационалност са разглеждани от Enriques, Castelnuovo, Zariski.

Някои забележителни резултати в размерност три и в по-високи размерности са установени от Clemens, Griffiths, Voisin, Kollar, Tschinkel.

Дисертацията предлага напълно различен метод, базиращ се на Хомологичната огледална симетрия.

Хомологичната огледална симетрия е наука с много лица, отразени в различни други науки, от Логиката до Аритметиката.

В настоящата Дисертация се концентрираме върху връзката й с Бирационалната геометрия и Теорията на Hodge.

Причината за това е приложението й към въпроси за нерационалност, които имаме предвид.

Започваме с един прост пример, свързан с рационални повърхнини, където е лесно да се изследва "огледалната страна" на Бирационалната геометрия.

В първата част на този Тезис доказваме Хомологичната огледална симетрия за проективната равнина и за повърхнините на Del Pezzo – вж. Theorem 1.2 и Theorem 1.4.

В тези два примера става ясно, че бирационалните трансформации водят до Теория на особеностите в "огледалната страна".

В третата част разширяваме това наблюдение до произволна размерност. Става ясно, че бирационалните трансформации не са нищо друго, освен нови особени слоеве в моделите на Landau–Ginzburg – вж. Theorem 1.7.

С цел да отидем по-надълбоко в бирационалните трансформации, нужно е да разширим инвариантите от Теорията на Hodge – вж. раздел Non-commutative Hodge Structure. Правим това във втората част на Тезиса. Въвеждаме Некомутативна теория на Hodge – Теория на квантовите D-модули.

Това води до два спектъра – вж. раздел Interpretation of spectra:

1. Собствените стойности на квантовото умножение с каноничен клас – квантов спектър.

2. Асимптотиките на решенията на квантови диференциални уравнения.

Последната част от Тезиса представя как тези два спектъра водят до забележителни бирационални приложения.

В действителност, можем да използваме тези спектри, за да покажем нерационалност на общата четиримерна кубика – проблем в Бирационалната геометрия, датиращ отпреди повече от 60 години.

Много други многообразия на Fano са разгледани. Разбира се, това е само върхът на айсберга. Очакваме по-нататъшни приложения в следните направления:

- Приложение на горния метод към въпроси за нерационалност за многообразия над алгебрично незатворени полета.
- Можем да разширим метода до случая на орбитални многообразия.
- В частност, дискретната торзия от K–теорията става бирационална инварианта.
- Методът може да бъде разширен до въпроси за нерационалност за особени многообразия.

- Всъщност, отива се много по-надълбоко чрез представянето на некомутативен мотив като директна сума на атоми – категории с техните условия за стабилност.
- Динамиката на другите числа от спектъра ще доведе до нови ограничения за рационалност.

5 Публикации, на които се основава Дисертацията

Резултатите, включени в Дисертацията, са базирани на следните публикации:

1. Auroux, D., Donaldson, S.K., **Katzarkov, L.**, Yotov, M., *Fundamental groups of complements of plane curves and symplectic invariants*, (2004) Topology, 43 (6), pp. 1285–1318, DOI:10.1016/j.top.2004.01.006, Web of Science IF (2004): 0.727, Q1

   Цитирана 22 пъти.

2. Auroux, D., Donaldson S.K., **Katzarkov, L.**, *Singular Lefschetz pencils*, (2005) Geometry and Topology, 9, pp. 1043–1114, DOI:10.2140/gt.2005.9.1043, Web of Science IF (2005): 1.275, Q1

   Цитирана 49 пъти.

3. Auroux, D., **Katzarkov, L.**, Orlov, D., *Mirror symmetry for Del Pezzo surfaces: Vanishing cycles and coherent sheaves*, (2006) Inventiones Mathematicae, 166 (3), pp. 537–582. DOI: 10.1007/s00222-006-0003-4, Web of Science IF (2008): 1.659, Q1

   Цитирана 73 пъти.

4. **Katzarkov, L.**, Kontsevich, M., Pantev, T., *Hodge theoretic aspects of mirror symmetry*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 78, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008, 87–174. DOI: 10.1090/pspum/078/2483750, Web of Science

   Цитирана 132 пъти.

5. Auroux, D., **Katzarkov, L.**, Orlov, D., *Mirror symmetry for weighted projective planes and their noncommutative deformations*, (2008) Annals of Mathematics, 167 (3), pp. 867–943. DOI: 10.4007/annals.2008.167.867, Web of Science IF (2008): 3.447, Q1

   Цитирана 81 пъти.

6. Kapustin, A., **Katzarkov, L.**, Orlov, D., Yotov, M., *Homological Mirror Symmetry for manifolds of general type*, (2009) Central European Journal of Mathematics, 7 (4), pp. 571–605. DOI: 10.2478/s11533-009-0056-x, Web of Science IF (2009): 0.361, Q4

   Цитирана 22 пъти.

7. Ballard, M., Favero, D., **Katzarkov, L.**, *Orlov spectra: Bounds and gaps*, (2012) Inventiones Mathematicae, 189 (2), pp. 359–430. DOI: 10.1007/s00222-011-0367-y, Web of Science IF (2012): 2.259, Q1

   Цитирана 30 пъти.

8. Abouzaid, M., Auroux, D., Efimov, A.I., **Katzarkov, L.**, Orlov, D., *Homological mirror symmetry for punctured spheres*, (2013) Journal of the American Mathematical Society, 26 (4), pp. 1051–1083. DOI: 10.1090/S0894-0347-2013-00770-5, Web of Science IF (2013): 3.061, Q1

   Цитирана 27 пъти.

9. Abouzaid, M., Auroux, D., **Katzarkov, L.**, *Lagrangian fibrations on blowups of toric varieties and mirror symmetry for hypersurfaces*, (2016) Publications Mathematiques de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 123 (1), pp. 199–282. DOI: 10.1007/s10240-016-0081-9, Web of Science IF (2016): 3.182, Q1

   Цитирана 39 пъти.

10. **Katzarkov, L.**, Lee, K.S., Svoboda, J., Petkov, A., *Interpretations of Spectra*, In: Birational Geometry, Kähler-Einstein Metrics and Degenerations, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 2023, 409, pp. 371–407, DOI: 10.1007/978-3-031-17859-7-20, Scopus SJR (2022): 0.181

    Цитирана 0 пъти.

Горните публикации имат общо **475** цитирания, съгласно базите от данни SCOPUS и Web of Science, към 8 ноември 2023.

Благодарности

Резултатите, включени в Дисертацията, са получени в рамките на следните научни проекти:

- "Categorical Kaehler Geometry and Applications" (CKGA), National Science Fund of Bulgaria, National Scientific Program "VIHREN", Project no. KP-06-DV-7, 2020–2024
- HMS Simons Collaboration Award 2013–2023, National Science Foundation
- HMS Simons Principal Investigator Grant 2017 –, National Science Foundation

Дълбоко съм благодарен на Института по Математика и Информатика при Българската Академия на Науките за изключително благоприятната работна среда и специално на колегите от секция "Анализ, геометрия и топология" за подкрепата през годините, в които работим заедно.