

РЕЦЕНЗИЯ
на дисертацията
СИМПЛЕКТИЧНА ТОПОЛОГИЯ,
НЕКОМУТАТИВНА ГЕОМЕТРИЯ И
ОГЛЕДАЛНА СИМЕТРИЯ
от Л. Кацарков

Ф. Богомолов

18 януари 2024 г.

1 Увод

Това е рецензия на дисертацията СИМПЛЕКТИЧНА ТОПОЛОГИЯ, НЕКОМУТАТИВНА ГЕОМЕТРИЯ И ОГЛЕДАЛНА СИМЕТРИЯ, представена за присъждане на научната степен "Доктор на Науките" в Професионално направление 4.5. Математика, Научна специалност "Геометрия и Топология".

Настоящата рецензия е написана от проф. Ф. Богомолов – алгебричен геометър, професор в Нюйоркския Университет и член на Националната Академия на Науките (NAS) на САЩ и на Европейската Академия.

Имам сериозни постижения в следните области:

- Комплексна алгебрична геометрия;
- Аритметика;
- Бирационална геометрия;
- Симплектична геометрия.

2 Оценка на постиженията на Людмил Кацарков

Людмил Кацарков е професор в Университета на Маями (UM) и Директор на Института за Математически Науки на Америките, Institute of the Mathematical Sciences of the Americas (IMSA), Маями. Той е също така и Научен директор на Международния център по математически науки към Института по математика и информатика при БАН (ICMS-Sofia). Л. Кацарков има повече от 100 статии във възможно най-престижните

математически списания. Статиите, на които се основава дисертацията, са публикувани в следните авторитетни списания:

- Annals of Mathematics;
- Inventiones Mathematicae;
- Journal of AMS.

Кацарков е изнесъл над 120 доклада. Спечелил е няколко престижни награди и международни проекти:

- Simons Investigators Award;
- ERC Advanced Grant;
- Russian Megagrant;
- NSF Career Award;
- Sloan Research Fellowship;
- Clay research Fellowship.

Л. Кацарков е член на Европейската Академия (Academia Europaea).

3 Актуалност на тематиката

Бирационалната геометрия е едно от основните направления в съвременната математика. Три Филдсови медала са присъдени до момента в тази област.

Съществуват много нови подходи към Бирационалната геометрия. Но нито един от тях не е свързан с изследване на нерационалността, основаващо се на Хомологичната огледална симетрия. Тази дисертация поставя основите на такъв подход.

Разгледани са нови приложения, базирани на некомутативни и квантови спектри – най-забележителното от които е установяване на нерационалността на общата четиримерна кубика.

4 Научни постижения

Основната идея в тази дисертация е да се използват подходи от теоретичната физика за разрешаване на класически проблеми в Алгебричната геометрия – проблеми за нерационалност.

Дисертацията е разделена на две основни части:

1. **Огледална симетрия** – в интерпретацията на Hori–Vafa и нейното категорно разширение (подобрене), направено от М. Kontsevich – Хомологичната огледална симетрия.

2. Конформна теория на полето.

Хомологичната огледална симетрия в нейната геометрична интерпретация е фундаментът на дисертацията.

Основният резултат на първата част е, че бирационалната трансформация съответства на възникването на нови особени слоеве на LG моделите. С други думи, Бирационалната геометрия се трансформира в Теория на особеностите.

Дисертацията започва с детайлна конструкция на Хомологичната огледална симетрия за двумерни многообразия на Гапо – Раздел 2 и Раздел 3. По-нататък, в Раздел 3 и Раздел 4, е разгледана обща бирационална трансформация. Въведена е нова структура на Hodge – некомутативна структура на Hodge – която най-добре подхожда на контекста.

В този контекст авторът прибягва към Конформната теория на полето – Квантова теория на полето, която е инвариантна под действието на конформни трансформации.

Развитието на Конформната теория на полето започва със статията от 1983 г. на Belavin, Polyakov и Zamolodchikov.

В двумерната квантова теория имаме алгебрата на Witt на инфинитезимални конформни трансформации, която е централно продължена, с централен заряд и други пренормировъчни заряди – спектри от размерности.

Alexander Zamolodchikov доказва C-теоремата на Zamolodchikov и показва, че пренормировъчния групов поток в двумерния случай е необратим.

Пресмятането на зарядите на конформните теории на полето в общия случай е голямо предизвикателство. В случая на масивни теории може да се използва геометрия за тяхното пресмятане.

Теорията на спектрите от особености е развита успоредно на теорията на централните заряди. Всъщност, тя е развита в същия град – Москва – от Arnold и Varchenko. Спектрите от особености съответстват на зарядите на конформните теории на полето и C-теоремата на Zamolodchikov е теоремата за полунепрекъснатостта в теорията на спектрите от особености.

Пълното съответствие между зарядите на конформните теории на полето, спектрите от особености и асимптотиките на решенията на обикновени диференциални уравнения е забелязано от Vafa и Cecotti през 90-те години на XX век.

Дисертацията съчетава паралела на Конформната теория на полето с Теория на особеностите и особеностите на LG модели. Това води до нови инварианти в Бирационалната геометрия:

- Некомутативна теория на Hodge и разцепване на атоми - вж. Раздел 3.
- Спектри от особености - вж. Раздел 4.

5 Препоръки и критични бележки

Нямам съществени критични бележки върху изложението. Текстът е написан достатъчно детайлно и разбираемо и може да бъде използван като въведение в областта на

Хомологичната огледална симетрия. Авторефератът и резюмето с научните приноси са написани достатъчно детайлно и дават ясна и адекватна информация.

6 Общо заключение

Това е една отлична дисертация, която дава нов авангарден подход към Бирационалната геометрия. Приложенията ще бъдат огромни:

- върху полето на комплексните числа;
- върху алгебрично незатворени полета.

В частност, дисертацията води до разрешаването на проблем в Алгебричната геометрия, останал отворен за дълго време – нерационалността на общата 4-мерна кубика. Много алгебрични геометри са опитвали да разрешат този проблем, например Beauville, Voisin, Kollar, Kuznetsov, Thomas.

Очакваме, че този метод ще доведе до установяването на нерационалност на много други многообразия на Гао от висока размерност.

Потвърждавам, че научните приноси на кандидата отговарят напълно на изискванията на Закона за развитието на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилника за прилагане на ЗРАСРБ, както и на Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и заемане на академични длъжности в БАН за придобиване на научна степен "Доктор на науките" в Професионално направление 4.5. Математика, Научна специалност "Геометрия и Топология".

В частност, кандидатът удовлетворява минималните национални изисквания в професионалното направление и не е открита никаква форма на плагиатство в представените научни публикации.

Ето защо, давам категорична **положителна оценка** на кандидата и убедено подкрепям неговата дисертация.

7 Окончателна Препоръка

Основавайки се на всичко изложено по-горе, **силно препоръчвам** на Научното жури да предложи на оторизирания орган на Института по Математика и Информатика при Българската Академия на Науките да присъди на проф. Людмил Василев Кацарков научната степен "Доктор на Науките" в Професионално направление 4.5. Математика, Научна специалност "Геометрия и Топология".

Подпис:

проф. Ф. Богомолов