

РЕЦЕНЗИЯ

на

дисертация за

за придобиване на научна степен „доктор на науките“

в професионално направление 4.5. Математика,

научна специалност „Геометрия и топология“

Автор на дисертацията: д-р Людмил Кацарков

Заглавие: Симплектична топология, некомутативна геометрия и огледална симетрия

Член на научното жури: д-р Юри Чинкел, професор по математика, Courant Institute, New York University, член на Leopoldina, German National Academy of Sciences

Дисертационният труд обхваща широк кръг от теми на границата на симплектичната топология и алгебричната геометрия. Това са утвърдени и добре развити области, които претърпяха огромен напредък през последните няколко години, продиктуван от развитията на един клон на математическата физика – Теорията на струните. Тези развития бяха предпоставка за възникване на загадъчна дуалност, т. нар. *Огледална симетрия*, между симплектичните и алгебричните инварианти на геометрични обекти. Първоначалната формулировка на дуалността е претърпяла няколко подобрения, като авторът на дисертацията е един от основните архитекти на тази теория. Основните приноси на настоящата дисертация са: експлицитно описание на дуалността в много ситуации и приложения на новите структури към един класически проблем в алгебричната геометрия – проблемът за рационалността.

Дисертацията е написана на английски език и е в обем 343 страници. Тя съдържа кратко въведение на 2 страници, две глави, съдържащи съответно три и два раздела, в които са изложени основните резултати и конструкции, заключение с описание на бъдещите направления за изследвания и 16 страници с литература, включително публикации на автора. В цялостното изложение авторът е формулирал много въпроси и хипотези.

1. Актуалност на проблемите, разглеждани в дисертацията

Теорията на инвариантите на Gromov-Witten и техните интерпретации на езика на производните категории са централни теми в съвременната геометрия, интензивно изучавани от кохорти изследователи по целия свят. Първоначалното откритие на Огледалната симетрия, което прави неочаквани прогнози за рационални криви върху многообразия на Калаби-Яу чрез хипергеометрични функции, изчислени от периодите на многообразието, стимулира интензивни усилия, които водят до създаването на напълно нов подход за описание на основните геометрии. Този подход е известен като Хомологична огледална симетрия (HMS).

Основният тласък, направен в дисертацията, се изразява в приложенията на HMS към класически проблеми на Алгебричната геометрия, засягащи въпроси за рационалност на алгебрични многообразия, в частност, на хиперповърхнини от ниска степен в проективно пространство. Техническата същност на тази работа се състои в подобренията на Теорията на Hodge. Тези подобрения се изразяват едновременно в симплектичен и алгебричен аспект и съществена част от дисертацията е посветена на изследвания на взаимните зависимости между съответните структури. Една от ключовите нови дефиниции е тази на квантов спектър. Съществен резултат за приложенията е теоремата, че спектралното разлагане на квантова кохомология е бирационална инварианта.

Обхватът на използваните методи е огромен и отразява енциклопедичното познание на автора, както и техническите му способности.

2. Научни и приноси

Резултатите, предоставени в тази дисертация, са на върха на съвременната симплектична и алгебрична геометрия. Те са не само фундаментални за разбирането на новите дълбоки връзки между областите, които не се обхващат от изследванията на математическите физици, но също имат потенциала да направят революция в областта на бирационалната геометрия, водейки към доказателства на хипотези, стоящи дълго време отворени, като нерационалността на общата четиримерна кубика.

Първата част е посветена на конструктивни доказателства на различни версии на Хомологичната огледална симетрия за многообразия на Fano, напр. повърхнини на Del Pezzo, или хиперповърхнини в торични многообразия, или

пълни пресичания. Най-общо казано, HMS предсказва еквивалентност на определени триангулирани категории: ограничената производна категория на кохерентни снопове от алгебричната страна, и категорията на Fukaya (базирана на Лагранжиевата теория на Floer) от симплектичната страна. Фундаментално прозрение на автора е, че в изучаваните от него случаи, огледалното многообразие се дава като *модел на Landau-Ginzburg*, т.е. фибрация върху афинна права. Съответните структури имат изящна експлицитност. От алгебричната страна на огледалното съответствие, авторът дава няколко описания на производната категория на кохерентни снопове (чрез изключителни редици, или като производни категории на DG-алгебри); от симплектичната страна, авторът забелязва, че категорията на Fukaya (която все още не е дефинирана в пълна общност) има много по-проста (но все още комбинаторно силно нетривиална) форма в наличните случаи, именно, като производната категория на Лагранжиеви анулиращи се цикли на фибрацията на Landau-Ginzburg. Тази първа част съдържа красиви примери, поразително количество от експлицитни изчисления, например чрез тета-функции, асимптотичен анализ, хомологична алгебра.

Въоръжен с плеяда примери, авторът преминава към втората част с общи категорни изследвания. Той развива абстрактната теория на некомутативните структури на Hodge и прави анализ на разнообразни филтрации върху тях. Показва наличието на такива структури едновременно в алгебричната и в симплектичната страна на HMS. Изучава глобални и локални деформации на тези структури в контекста на различни интересни геометрии, и установява аналози на теоремата на Tian-Todorov. Има всеобхватно резюме и сравнение в параграф 4.5.3., преминавайки от геометрия към съответствие на категории. Дисертацията завършва с изучаването на *спектри*, пораждани забележителни филтрации на производни категории. Тези филтрации са етикетирани с числа, възникващи като асимптотики на гранични условия за стабилност, или еквивалентно, асимптотики на определено ЧДУ върху квантова кохомология. Основната теорема, твърдяща, че тази филтрация е бирационална инварианта, според мен е изумителна. Още по-изумителни са други свързани спектри, например спектърът на модела на Landau-Ginzburg, некомутативният спектър, и т.н. Резултатите, свързани с въпроси за рационалност, получени от тези разглеждания, Теорема 2.14 и Теорема 2.15, потвърждават нерационалността на гладки хиперповърхнини от ниска степен в проективно пространство. По мое мнение, това е най-големият пробив в бирационалната геометрия след работите на Clemens-Griffiths, Manin-Iskovskikh, и Artin-

Mumford през 1970-те, които доказаха съществуването на унирационални, но нерационални тримерни многообразия.

3. Анализ на публикациите по дисертацията

Дисертацията се основава на списък от десет статии. Всички тези статии са публикувани в най-престижни международни списания, като: *Inventiones Math.*, *Publications IHES*, *Annals of Math.*, *Journal of the American Math. Society*, *Topology*. Тези публикации имат извънредно голям брой цитирания, и са изключително влиятелни. Абсолютно бижу е съвместната статия с Kontsevich и Pantev върху Hodge-теоретичните аспекти на огледалната симетрия, цитирана 132 пъти. Като цяло, тези десет статии са цитирани 475 пъти, което е впечатляващо постижение. Авторът има съвместни публикации с Филдсови медалисти (Kontsevich, Donaldson), както и с млади по-малко утвърдени математици (Ballard, Favero, Efimov). Според платформата MathSciNet, авторът е публикувал съвместни статии със 73 математици, което е предостатъчно доказателство за неговите лидерски качества.

4. Аprobация на резултатите

Резултатите, представени в дисертацията, са докладвани на повече от 50 конференции и семинари в различни държави. аз лично съм присъствал на около 20 доклада на автора и съм проследявал с голям интерес развитието на неговите идеи.

5. Критични бележки и препоръки

Този изследователски проект има много непосредствени цели и авторът би могъл да обмисли разширяването на този текст и оформянето му като монография или дори като поредица от томове, в които да обясни по-детайлно идеите си и резултатите. В този си вид дисертацията е вдъхновяваща за експертите, но за хора извън тематиката може би изглежда страховита.

При такъв голям обхват на работата може би е неизбежно наличието на малки грешки в правописа тук-там, неправилни цитирания и грешки при форматиране в диаграмите и схемите.

6. Качества на автореферата и справката за приносите

Авторефератът и справката за научните приноси са изготвени прецизно и стегнато. В автореферата накратко е описана историческата обосновка, най-вече от гледна точка на физиката и интегрирането на идеи от физиката в новите математически теории. Добре са обобщени основните приноси на автора – от доказателства в Хомологичната огледална симетрия за рационални повърхнини и отворени многообразия на Калаби-Яу до нови структурни резултати, отнасящи се до некомутативни подобрения на теорията на Ходж, които водят до доказателството на бирационални инварианти на квантовите спектри. Даден е убедителен списък на бъдещи направления за изследване.

Заклучение

Давам категорична **положителна оценка** на дисертационния труд и убедено препоръчам на Научното жури да присъди на **д-р Людмил Кацарков** научната степен „**доктор на науките**“ в професионално направление 4.5. Математика.

17.01.2024 г.

Член на журито:

/проф. д-р Юри Чинкел/