

# СТАНОВИЩЕ

От проф. Гео Грънчаров

Florida International University

по дисертационния труд

озаглавен

**“Симплектична топология, некомутативна геометрия и огледална симметрия”**

**от проф. Людмил Кацарков**

представен за получаване на научната степен „Доктор на науките“

за придобиване на научна степен „доктор на науките“ в област на висше образование 4.

Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5.

Математика

Член съм на научното жури по защита на този дисертационен труд съгласно Заповед № 550/27.11.2023 на Директора Института по Математика и Информатика към Българската Академия на Науките. Становището е изготвено според изискванията на Закона за развитието на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилника за неговото прилагане и Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и за заемане на академични длъжности в БАН. От представените от дисертанта Людмил Кацарков изискуеми документи и трудове се уверих, че те и кандидатът удовлетворява изискванията по Глава 2 от ЗРАСРБ. Людмил Кацарков има придобита образователна и научна степен „доктор“ с диплома от Университета в Пенсилвания, призната със заповед 00077 от 28.10.2019 г. от БАН. Минималните национални изисквания за придобиване на научна степен „доктор на науките“ в професионално направление 4.5. Математика съгласно Правилника за прилагане на закона за развитието на академичния състав в Република България са удовлетворени.

## **1. Обща характеристика на дисертационния труд**

Дисертацията се състои от 343 страници и 256 цитирани заглавия. Съдържа увод, две части с три глави в първата и две във втората част, индекс и списък с имена. Номерирането е отделно в отделните глави. Дисертацията е посветена на хомологичната огледална симметрия – съответствие между симплектичната и алгебричната геометрии, както и нейните приложения към некомутативни инварианти. Дисертацията е теоретична по същество и посреща изискванията за научната степен „Доктор на Науките“.

## Описание на резултатите

Дсиертацията съдържа 2 части с 3 глави в първата и 2 глави във втората част. Първите 2 глави в първата част са посветени на доказателствата на хомологичната огледална хипотеза за 3 важни примера на многообразия на Фано – проективни равнини с тегла, повърхнини на Хирцебрух и повърхнини на Дел Пецо. Хипотезата за хомологична огледална симетрия (съкратено ХОС) е формулирана от М. Концевич следвайки идеи от физиката и предлага като цяло еквивалентност между производната категория от кохерентни снопове на комплексно многообразие и производната категория на Фукая на огледалния симплектичен образ. Огледалния образ на многообразие на Фано е модел на Ландау-Гинзбург – афинно симплектично многообразие със суперпотенциал  $W$  – комплекснозначна функция чиито линии на ниво са симплектични. Категорията от кохерентни снопове е добре известна в комплексния анализ, докато производната категория на Фукая на модел на Ландау-Гинзбург е с обекти изчезващи Лагранжеви цикли асоциирани с критичните точки на  $W$ .

Първата глава на първата част е посветена на доказателството на хомологичната огледална хипотеза за проективни равнини с тегла, както и не някои от техните некомутативни деформации. Основния резултат е Теорема 1.2 в която се доказва ХОС за проективни равнини с тегла  $\mathbb{C}P^2(a,b,c)$  които а повърхнини на Фано с особености. За  $\mathbb{C}P^2(a,b,c)$  огледалния образ е афинната хиперповърхина  $\{x^ay^bz^c = 1\}$  в  $(\mathbb{C}^*)^3$  с точна симплектична форма и  $W=x+y+z$ . ХОС за повърхнини на Хирцебрух е сведена до случая  $\mathbb{C}P^2(1,1,n)$  в Теорема 2.29 откъм комплексната страна и Твърдение 5.5 откъм симплектичната. Резултатите от тази глава са публикувани в *Annals of Mathematics*.

Във втората глава на първа част ХОС е доказана за повърхнини на Дел Пецо. В случая на раздуване на  $\mathbb{C}P^2$  в  $k$  точки ( $k < 9$ ), огледалния Лаанду-Гинзбург модел е елиптична фибрация над  $\mathbb{C}$  с  $k+3$  нодални особени слоеве. Основния резултат е Теорема 1.5, която показва че ХОС хипотезата е вярна за някой избор на (комплексифицирана) симплектичн форма. След това Теорема 1.6 обобщава ХОС за всяка некомутативна деформация на повърхнините на Дел Пецо. Резултатите от тази глава са публикувани в *Inventiones Mathematicae*.

В последната глава на първа част се използва подхода на Стромингер-Яу-Заслов (СЯЗ) хопотезата за изследване на огледалната симетрия. Чрез идеи от ХОС е направено предложение за СЯЗ-тип огледален образ на многообразия от общ тип. Оригиналната СЯЗ е свързана с Лагранжеви торични фибрации на Калаби-Яу многообразия, които не съществуват за многообразия от общ тип. Предложеното съответствие е за А-частта и Б-

частта на Ландау-Гинзбург моделите които са дефинирани в Дефиниция 1.2. За да се формулира основния резултат, нека  $V$  е торицно многообразие и  $H$  е тропична хиперповърхност в него. Нека  $X$  е раздуването на  $V \times \mathbb{C}$  в точките от  $H \times 0$ . Основния резултат е в Теорема 1.5 който твърди, че при подходящи условия за положителност на пресичания, за всяко  $X$  съществува явно констриран огледален образ в  $B$ -частта на Ландау-Гинзбург модела който е СЯЗ-огледален на  $X$ . Тогава в Теорема 1.6 съществуването на подобен Ландау-Гинзбург модел в  $B$ -частта е доказано и за  $H$ .  $B$ -частта модела е отворено многообразие и в Теорема 1.7 обикновения СЯЗ-огледален образ е открит, който е отворено многообразие на Калаби-Яу. Резултатите от тази глава са публикувани в *Publications Mathematiques de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques*.

Втората част на дисертацията развива някои аспекти от некомутативната геометрия. Макар и да не изглежда директно свързана, тя използва много от идеите на огледалната симетрия. Първата глава гради основите на некомутативната теория на Ходж. Тя е относително дълга и технична, но има много проложения по-късно, както се вижда от списъка с цитати на оригиналната статия на автора и неговите съавтори. . Главата започва с дефиницията на некомутативна структура на Ходж (нк структура на Ходж накратко). Тя включва много допълнителни понятия и е свързана чрез деформациите си с класическите вариации на структури на Ходж. Самата дефиниция се базира на обобщение на съответствието между разслоения с мероморфни свързаности върху афинната права  $A - \{0\}$  и специален тип модъли над редове на Лоран с полюс само в  $0$ . В частност съществува точен функтор от категорията на класическите вариации на структури на Ходж към категорията на нк-вариациите на структурите на Ходж (Лема 2.9). Основния резултат в тази глава е Теорема 2.35 за залепване на нк-структури на Ходж. В следващата част на тази глава е показано как тези структури са свързани с огледалната симетрия. Вариациите на нк-структури на Ходж са разгледани в последната частна главата, където свойства подобни на Богомолв-Тиан-Тодоров Лемата са преставени. В под-секция 4.5.3 е даден хубав обзор на резултатите от главата. Те са публикувани в *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 78*.

Последната глава от дисертацията, която е втора глава на втората част, е базирана на нов научен проект и много от резултатите са част от различни работи, които са в процес на развитие. Тя свързва различни понятия за спектър чрез категорен подход. Спектър в случая е спектър на оператор действащ на различни векторни пространства и категории прикрепени към алгебрично многообразие – квантови кохомологии, Фукая-Зайдел категория и други свързани с топологията на многообразието. В една от споменатите работи в процес на развитие е доказано, че спектралното разлагане съответстващо на квантовия спектър е бирационален инвариант. Един от основните резултати в главата е

обобщаването на това свойство в Теорема 2.14, където са представени нови препядствия за рационалност на многообразиата на Фано базирани на некомутативния спектър. Те са тествани с някои от известните не-рационални примери. Различни връзки с топологични инварианти като полиноми на Александър за възли, Сейберг-Уитън и Громов-Уитън съмплектични инварианти на елиптични повърхнини, Уитън-Решетихин-Тураев инварианти на 3-многообразиата и други, са споменати в следващите секции. Резултатите от главата са публикувани в *in Proceedings in Mathematics and Statistics, vol. 409*.

Като цяло, дисертацията показва, че автора е водещ експерт в активно-развиваща се област на изследвания като ХОС.

### **Апробация на резултатите:**

Според представената от кандидата справка за изпълнението на минималните национални изисквания по чл. 26 от ЗРАСРБ за професионално направление 4.5. Математика, по процедурата за придобиване на научна степен „доктор на науките“ Людмил Кацарков кандидатства с 10 статии с общо 476 цитата. Седам от статиите са публикувани в Q1 списания пет от които са списания с най-висок ранг, две са в доклади от конференции. Основната част от дисертацията е публикувана в 5 статии под номера 3, 4, 5, 9 и 10 в приложения списък от публикации по дисертацията и са цитирани 325 пъти. Всички статии са в съавторство с различни математици, някои от които са от най-високо ниво (носители на Филдсов медал). Аз предполагам че приноса на различните автори е равностоеен.

### **Критични бележки и препоръки**

С оглед на дължината от 343 страници, дисертацията съдържа технически грешки, като например:

1. ХОС хиптезата се повтаря като Хипотеза 1.1 в първата и втората глави на първа част.
2. Някои от цитираните статии не са обновени ([42], [161]), а други са недовършени [30], [111], [226].

В добавка бих споменал, че последната глава съдържа основни резултати с препратки към непубликувани и необявени статии. Поради това бих препоръчал дване на кратки или схематични доказателства.

### **Качество на автореферата**

Автореферата съдържа 14 страници и вярно представя съдържанието на дисертацията, както и подходяща мотивация и интересни бъдещи насоки на изследвания.

## **Заклучение**

Предложения дисертационен труд, автореферата, както и съпътстващите приложени статии и документи показват, че Людмил Василев Кацарков е водещ експерт в света по алгебрична геометрия със значителен личен принос по темата на дисертацията. Аз оценявам най-положително неговата работа и дисертация. Силно препоръчвам на уважаемост научно жури да присъди на Людмил Кацарков научната степен „Доктор на науките“.

25 януари 2024

Член на научното жури:

Професор Гео Грънчаров