

## Р е ц е н з и я

**Относно:** Конкурс за заемане на академична длъжност професор в професионално направление 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5. Математика, научна специалност „Изследване на операциите“, за нуждите на секция „Изследване на операциите, вероятности и статистика“ на Института по математика и информатика, БАН.

**Кандидати:** ст.н.с. II ст. дмн Максим Иванов Тодоров

**Рецензент:** проф. дмн Михаил Иванов Кръстанов, СУ "Св. Климент Охридски"

Настоящата рецензия се отнася до представените материали за конкурса за заемане на академична длъжност „професор“ в професионално направление 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5. Математика, научна специалност „Изследване на операциите“, за нуждите на Института по математика и информатика, БАН, обявен във ДВ, бр. 48 от 24.06.2016 г.

За участие в конкурса е допуснат един кандидат: ст.н.с. II ст. дмн Максим Иванов Тодоров, когото ще представя накратко:

**1. Кратки биографични данни:** Ст.н.с. II ст. дмн Максим Иванов Тодоров е роден през 1952 г. в град Долна Оряховица. Завършва висшето си образование през 1979 г. във Факултета по математика и информатика на СУ „Св. Климент Охридски“. През март 1987 г. му е присъдена научната степен "кандидат на математическите науки", а през януари 2007 г. - научната степен "доктор на математическите науки".

Започва работа в Института за защита на растенията през 1979 г., където работи до 1982 г. В периода 1982 г. - 1992 г. работи в Лабораторията по приложна математика към ЕЦМ на БАН. От 1992 г. до 1998 г. е на работа като старши научен сътрудник II степен в Института по математика и информатика към БАН. През 1998 г. е поканен като преподавател във Факултета по физически и математически науки на Автономния университет на Пуебла, където отговаря за изследванията по оптимизация. От 2002 г. работи като професор във Университета на Северна и Южна Америка на Пуебла, където е координатор на бакалавърската програма по приложна математика. Там той е и директор на Центъра за научни изследвания в областта на физиката и приложната математика (CIFMA).

Ст.н.с. II ст. дмн Максим Иванов Тодоров е автор на 59 публикации в реферирани списания, 11 глави от книги, написал е една книга и в една друга фигурира като редактор. Бил е гост на повече от 20 университети в различни страни като България, Германия, Испания, Аржентина и Бразилия, за изнасяне на лекции или за изследователска работа. Максим Тодоров е участвал в 88 национални и международни конференции, като е изнесъл 31 доклади по покана. Ръководител е на дипломните работи на 10 магистри и на 6 докторанти. Рецензирал е статии в реномирани научни списания, сред които ще спомена Journal of Optimization Theory and Applications, European Journal of Operations Research, SIAM Journal on Optimization, Annals of Operational Research, Journal of Convex Analysis, Pacific Journal on Optimization, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Journal of Global Optimization и Optimization. Участвал е в 9 изследователски проекта, 1 от които е финансиран от Икономическия



отдел на Кметството в Пловдив, 5 - от Националния съвет за наука и технологии на Мексико, 2 - от Министерството на образованието и науката на Испания, 1 - от Министерство на научните изследвания, развитие и иновации на Испания. На 2 от проектите е бил ръководител. Ст.н.с. II ст. дмн Максим Иванов Тодоров е получил и няколко награди, сред които ще спомена "Златен медал, ЕКСПО-91", "Заслужил гост професор" на град Пуебла през 2002 г. и "Редовен член на Мексиканската академия на науките" през 2015 г.

**2. Общо описание на представените материали.** Ст.н.с. II ст. Максим Тодоров е представил за участие в конкурса 29 (двадесет и девет) научни публикации, написани през периода 2007 г. - 2016 г.: двадесет и четири са научни статии, публикувани в специализирани списания; една е монография; две публикации са глави от книги, издадени от Университета на Пуебла и две публикации са в трудовете на Четвъртата и Петата международни конференции „Математиката и нейното приложение в образованието“ през 2011 г. и 2014 г., съответно. Двадесет три от статиите са публикувани в списания с импакт фактор. Тук трябва да отбележа, че сред тези списания са някои от най-престижните международни списания в областта на Изследване на операциите, като European Journal of Operational Research (Impact Factor 1.100/2007, 1.843/2013, 2.358/2015), Journal of Mathematical analysis and applications (Impact Factor 1.174/2010, 1.05/2013), Journal of Global Optimization (Impact Factor 1.196/2012, 1.355/2014), Annals of Operations Research (Impact Factor 1.103/2014), Applied Mathematics & Optimization (Impact Factor 0.952/2011), Optimization Letters (Impact Factor 0.952/2012), Set-Valued and Variational Analysis (Impact Factor 0.918/2013), Optimization (Impact Factor 0.408/2007, 0.845/2008, 0.500/2011) и други. Всички представени публикации имат отношение към темата на конкурса.

От представените материали личи, че ст.н.с. II ст. дмн Максим Тодоров има и значителен преподавателски опит. Повече от 18 години е чел лекции (със средна натовареност 8 часа седмично) по следните дисциплини: математически анализ, обикновени и частни диференциални уравнения, линейна алгебра, аналитична геометрия, теория на множествата и оптимизиране (за бакалаври), и изпъкнал анализ, нелинейно програмиране и изследване на операциите (за магистри).

**3. Отражение на научните публикации на кандидата в литературата (известни цитирания).** В материалите по конкурса има информация за 187 цитата на кандидата (без самоцитати) на 37 статии от приложен списък, повечето от които са в международни списания. Публикуваните статии имат H фактор 8. От представените за конкурса статии са цитирани 12. Впечатление прави статия с номер едно, която има 17 цитирания.

**4. Обща характеристика на научната дейност на кандидата.**

Научната дейност на дмн Максим Тодоров е в областта на полубезкрайната оптимизация. Накратко ще се спра на представените статии, като ги групирам по задачите, които се изследват в тях. Изложението ми ще следва номерацията, използвана от кандидата:

В [1] се разглеждат линейни задачи на полубезкрайната оптимизация. Изследвана е зависимостта на оптималната стойност на целевата функция от малки смущения в целевата функция или (но не едновременно) в дясната страна на



ограниченията на задачата. Получените резултати разширяват известни резултати за чувствителност на задачи на линейното оптимизиране. В [2] се разглежда един клас от непрекъснати линейни задачи на полубезкрайната оптимизация, както и техните двойствени задачи (така наречените Нааг двойствени задачи). Всяка задача (правата или нейната двойствена) може да бъде несъвместима, ограничена (с крайна оптимална стойност) или неограничена. По този начин правата задача и нейната двойствена определят теоретично 9 комбинации, от които се оказват възможни само 6. По отношение на подходяща топология в пространството от параметрите е получена характеристика на вътрешността на множествата, съответни на всяка една от тези възможни комбинации. Освен това са характеризирани тези множества, съответни на всяка една от възможните комбинации, които се съдържат в затворената обвивка на своята вътрешност. В [3] е разгледано пространството от всички линейни задачи на полубезкрайната оптимизация при фиксирано безкрайно компактно Хаусдорфово индексно множество и техните (така наречени Нааг) двойствени задачи. Тези задачи отново се класифицират като несъвместими, ограничени, и неограничени. От своя страна, ограничените задачи могат да се класифицират по-прецизно като решими с ограничено множество от решения или задачи, не притежаващи това свойство, т.е. са решими с неограничено множество от решения или са нерешими. По този начин, всяка права задача и нейната двойствена задача определят теоретично 16 комбинации, от които се оказват възможни само 9. По отношение на подходяща топология в пространството от параметрите, е характеризирана вътрешността на множествата, съответстващи на всяка една от тези възможни по-прецизни комбинации. Тази характеристика позволява да се докаже, че повечето ограничени (права и съответната ѝ двойствена) задачи имат едновременно непразно ограничено множество от решения, т.е. повечето ограничени (права и съответната ѝ двойствена) задачи са едновременно решими. В [4] са дефинирани 6 разбивания на пространството от параметри (на всяка тройка параметри съответства единствена права и двойствена задача). Всяко разбиване е допустима комбинация от класификация на правата и двойствената задача като несъвместима, ограничена и неограничена. Оказва се, че елементите на всяко разбиване формират неизпъкнал конус, който нито е затворен, нито е отворен. Елементите от вътрешността на всяко разбиване определят задачи, които са устойчиви по отношение на малки смущения на параметрите. Намерени са необходими и достатъчни условия, които гарантират принадлежността на даден елемент към определено разбиване. В [5] са дефинирани три понятия за лоша поставеност на параметри, определящи непрекъснати линейни полубезкрайни оптимизационни задачи: лоша поставеност и относителна лоша поставеност по отношение на множество и абсолютна лоша поставеност по отношение на фамилия от множества. Определени са 6 разбивания на пространството от параметри, като всяко разбиване е допустима комбинация от класификация на правата и двойствената задача като несъвместима, ограничена и неограничена. Получена е характеристика на лошо поставените елементи от тези разбивания. В [7] се прави анализ на чувствителността на линейни полубезкрайни оптимизационни задачи по отношения на смущения в целевата функция или в дясната страна на ограниченията, или и на двете места. В статията са получени достатъчни условия (изразени в термините на оптимални разбивания), гарантиращи линейност на целевата функция по отношение на разглежданите смущения. Нещо повече, доказано е, че дефиниционната област на всяка изпъкнала хомогенна функция може да се разбие на максимални релативно отворени изпъкнали конуси, където функцията е линейна. В [24] е разгледано множество от непрекъснати линейни задачи на полубезкрайната оптимизация (чиито индекси се изменят в безкрайно компактно хаусдорфово топологично пространство) и съответните Нааг двойствени задачи. В



пространството от параметри, определящи тези задачи, се въвежда метрика, определена от равномерната сходимост. В това метрично пространство се разглеждат всички стойности на параметри, чиято права задача (съответно двойствена задача) е съвместима, несъвместима, решима (с крайна оптимална стойност на целевата функция и непразно допустимо множество), нерешима (с крайна оптимална стойност на целевата функция и празно допустимо множество) и неограничена (с безкрайна оптимална стойност на целевата функция). Възможните комбинации от тези свойства на правата задача и съответната ѝ двойствена задача определят еднозначно множества в пространството от параметри. В тази статия са получени необходими и достатъчни условия, а в някои случаи само необходими условия или само достатъчни условия, гарантиращи принадлежността на двойката права-двойствена задача към съответното множество в пространството от параметри. Дадени са примери, илюстриращи случаите, когато условията са само необходими или само достатъчни.

В [6] е разгледана гладка многокритериална задача без ограничения. Дефинирани са локално ефикасно решение (locally efficient solution) и слабо локално слабо ефикасно решение (locally weakly efficient solution). От литературата са известни 4 теста за определяне дали една точка е локално (слабо) ефикасно решение. В [6] е доказано, че множеството от точки, където никой от тези 4 теста не може да се приложи, е никъде не гъсто множество. Специално внимание в статията е отделено на тест 4, като е подчертано, че неговата валидност е нерешена задача. В статията е доказана валидността на тест 4 при допълнителни предположения върху целевата функция: линейна независимост на градиентите, изпъкналост и монотонност по посока. В [16] са характеризирани понятията слабо ефикасно решение (weakly efficient solution), ефикасно решение (efficient solution), прилично ефикасно решение (properly efficient solution) и силно ефикасно решение (strongly efficient solution) на многокритериални оптимизационни задачи, състоящи се в минимизация на краен брой скалярни функции (дефинирани в крайномерно линейно пространство) при наличие на безкрайно много линейни ограничения. Тези характеристики са направени в термините на конуси, определени от параметрите на задачата, както и на различни локални и глобални необходими условия. Различните типове решения са сравнени. Дадени са примери и контра-примери, илюстриращи получените резултати, както и приложението им при изследване на конкретни модели. В [22] е разгледана многокритериална задача на изпъкналото програмиране. Получена е характеристика на ефикасно решение (efficient solution), слабо ефикасно решение (weakly efficient solution) и прилично ефикасно решение (properly efficient solution) чрез конуси, определени от данните на задачата и така наречените Karush-Kuhn-Tucker условия за оптималност. Приведени са подходящи примери, илюстриращи получените условия.

Казваме, че едно непразно множество  $F$  може да се декомпозира в смисъл на Моцкин, ако то може да се представи като сума на Минковски от компактно изпъкнало множество  $S$  и затворен изпъкнал конус  $D$ . В общия случай коничната компонента  $D$  е единствена (конусът от всички възможни посоки), но когато е неограничено може да има много компактни компоненти. Едно компактно множество  $S$  е минимална компактна компонента, ако  $S$  е подмножество на всяка друга компактна компонента. В [8] са получени 5 характеристики на класа от затворени изпъкнали множества, които могат да се декомпонират в смисъл на Моцкин. Тези характеристики използват различни начини за представяне на едно затворено и изпъкнало множество: чрез използване на опорни функции, спрегнати конуси, линейни системи и други. Получено е и минимално представяне в смисъл на Моцкин на едно затворено изпъкнало



множество. Основният резултат в [9] е, че едно затворено изпъкнало множество може да се декомпозира в смисъл на Моцкин точно тогава, когато множеството от екстремните точки на сечението на това множество с линейното пространство, перпендикулярно на линейното пространство, чиито елементи и техните протовоположни са посоки на изпъкналото множество (така нареченото „lineality” пространство), е ограничено. Получена е и характеристика на класа от функции, които могат да се декомпонират в смисъл на Моцкин. Доказано е, че всяка ограничена отдолу функция от този клас достига глобалния си минимум. В [17] е получена характеристика на множества  $F$ , които могат да се декомпонират в смисъл на Моцкин и съответната компактна компонента е сечение на  $F$  със затворено полупространство. Доказано е, че ако минималната компактна компонента на  $F$  съществува и е сечение на  $F$  с полупространство, то тя съвпада с изпъкналата затворена обвивка на екстремните точки на  $F$ . От друга страна е даден контра-пример, показващ, че сечението на всички компактни компоненти на  $F$  (които са сечение на  $F$  с полупространства) съдържа строго изпъкналата затворена обвивка на екстремните точки на  $F$ . В [18] се изучават непрекъснатите свойства на многозначното изображение  $F$ , което на всяко изпъкнало компактно множество и на всеки изпъкнал затворен конус съпоставя тяхната сума на Минковски. Показано е, че това многозначно изображение е със затворена графика и е полунепрекъснато отдолу. Нещо повече, доказано е, че това многозначно изображение е полунепрекъснато отгоре в някоя точка, точно тогава когато образът на тази точка е изпъкнал компакт или цялото пространство. Изучени са и две (свързани с  $F$ ), които не са полунепрекъснати отдолу и не са със затворена графика. Добре известно е, че сечение и сума на Минковски на две изпъкнали множества е изпъкнало множество, както и това, че афинен образ на едно изпъкнало множество е изпъкнало множество. Оказва, че тези класът на множествата, които могат да се декомпонират в смисъл на Моцкин, не притежава тези свойства. Поради тази причина в [20] се разглежда така нареченият клас от множества, които могат да се „пре-декомпонират” в смисъл на Моцкин (т.е. всеки елемент може да се представи като сума на Минковски на изпъкнал компакт и изпъкнал конус (който може и да не е затворен)). Доказано е, този клас е инвариантен по отношение на взимане на сечение и на сума на Минковски. Получени са и две характеристики на този клас от изпъкнали множества.

При оптимизационни задачи с краен брой ограничения важна роля играят активните ограничения. Те определят дали решението е на границата на множеството от допустими точки или е вътрешна точка. Важни са и за получаване на условия за оптималност от типа на Karush-Kuhn-Tucker, за характеристика на точките на единственост на решението и други. За линейни задачи на полубезкрайната оптимизация понятието активно ограничение се замества от понятието неявно активно ограничение. В [10] е показано, че известното от литературата условие за ограниченост на градиентите на ограниченията (в общия случай те са безбройно много) може да се отслаби до ограниченост на градиентите на локално активните ограничения (локално активно ограничение във фиксирана точка означава, че ограничението е активно в кълбо с малък радиус и с център фиксираната точка). Изследван е и въпросът за единственост на решението, както и зависимостта на това свойство от малки смущения на параметрите на задачата. В [12] са получени условия за линейни полубезкрайни оптимизационни задачи, осигуряващи съществуване на (силно) единствено решение, като това свойство да се запазва при достатъчно малки смущения на целевата функция и на функциите, определящи ограниченията на задачата. Трябва да се отбележи, че изискването за ограниченост на градиентите на всички ограничения на тези оптимизационни е отслабено с подходящи условия. Получена е и



характеризация на класа на афинно устойчивите, както и на класа на абсолютно устойчивите задачи. Показано е, че всяка съвместима задача може да се апроксимира със задачи имачи единствено решение. При изследване на оптимизационни задачи с краен брой ограничения в крайномерно пространство е важна връзката между активните ограничения и множеството от допустимите точки и решенията на задачата. В случая на линейни полубезкрайни оптимизационни задачи от това, че една точка лежи на границата на допустимото множество не следва, че съществува активно ограничение. Това налага въвеждането на понятието гама-активни ограничения за линейни полубезкрайни оптимизационни задачи. В [19] се разширяват тези понятия за случая на изпъкнали полубезкрайни оптимизационни задачи чрез два подхода: първият се основава на използване на субдиференциала на функциите, определящи ограниченията, а вторият – на спрегнатите функции на тези функции. И при двата подхода е изследвана е връзката между условието на Слейтър и принадлежността на нулевия елемент към гама-активно ограничение, като и връзката между гама-активните ограничения и множеството от допустими точки.

Друга задача, изучавана в трудовете на ст.н.с. II ст. дмн Максим Тодоров е задачата за намиране на допустима точка на множество, зададено с безкрайно много неравенства. Намирането на точка, удовлетворяваща линейна полубезкрайна система от неравенства се изучава в [11]. За решаването на тази задача е предложен итеративен алгоритъм, който разширява известния от литературата релаксационен метод за случая на краен брой неравенства. Този алгоритъм или намира допустима точка за краен брой стъпки, или поражда редица, която клони към допустима точка. Доказателството на сходимостта на алгоритъма е геометрично. Задачата за намиране на допустима точка, удовлетворяваща линейна полубезкрайна система от неравенства се изучава и в [13]. Формулирана е теорема за сходимост на разширения релаксационен метод при по-слаби предположения, както и теорема за линейна сходимост на същия метод. В [14] е доказана теорема за сходимост на разширения релаксационен метод, анонсирана в [13]. Освен това са представени и резултатите от числени симулации на различни тестови примери. В [15] е доказана теорема за линейна сходимост на разширения релаксационен метод, също анонсирана в [13]. Представени са и резултатите от различни числени симулации. Задачата за намиране на допустима точка, удовлетворяваща линейна полубезкрайна система от неравенства се изучава и в [23]. За решаването на тази задача е предложен итеративен алгоритъм със случаен избор на стъпката. Този алгоритъм или намира допустима точка за краен брой стъпки, или поражда редица, която клони към допустима точка. Доказано е, че сходимостта на предложения алгоритъм е линейна. Ефективността на предложения алгоритъм е показана чрез сравнение с класически алгоритъм, приложен за различни стойности на стъпката. За реализация на предложия алгоритъм се налага многократно да се решава задача за намиране на глобален минимум на липшицова функция (с известна липшицова константа) върху политоп. За тази цел е реализирана версия на класическия метод на отсичащите равнини (cutting plane method).

Нека  $T$  е подмножество на крайномерно линейно пространство, което съдържа поне два елемента. Всеки елемент  $s$  на  $T$  притежава клетка на Вороной, която се състои от всички елементи на  $T$ , които са на евклидово разстояние до  $s$  не по-голямо, отколкото е разстоянието им до произволен друг елемент на  $T$ . Разглежда се многозначното изображение, което на всеки елемент на  $T$  съпоставя неговата клетка на Вороной. В [21] е изследвана метричната регулярност на това многозначно

изображение. Основният резултат характеризира точките, където това изображение не е метрично регулярно.

**5. Оценка на личния принос на кандидата.** От представените 29 публикации 4 са самостоятелни, а 25 са в съавторство с известни чуждестранни математици, сред които ще открия само името на проф. Miguel A. Goberna от Университета на Аликанте, Испания. За мен няма съмнение, че тези статии, по тематика и методи на изследване, определено попадат в сферата на компетентност на ст.н.с. II ст. дмн Максим Тодоров и носят белезите на неговото участие. Затова считам, че участието на Максим Тодоров в съвместните публикации е равностойно.

**6. Общи впечатления от представените материали.** За участие в конкурса ст.н.с. II ст. дмн Максим Иванов Тодоров е представил научни резултати от системната си работа в периода 2007 г.-2016 г. Тези резултати имат пряко отношение към тематиката на конкурса. Представените научни публикации характеризират кандидата като опитен високо-квалифициран специалист в областта на изследване на операциите и по-специално в областта на полубезкрайната оптимизация.

**7. Заключение.** Ст.н.с. II ст. дмн Максим Иванов Тодоров е единствен кандидат в този конкурс. След присъждането на научната степен „доктор на математическите науки” той е получил нови интересни и съдържателни научни резултати. Неговите постижения са добре известни на специалистите по изследване на операциите. Неговата компетентност, изследователските му качества, интегрирането му в българската и световната наука, както и отзвукът на неговите постижения, ми дават основание да препоръчам на уважаемото Научно жури да предложи на Научния съвет на Института по математика и информатика да **избере** ст.н.с. II ст. дмн Максим Тодоров за **„професор”** в професионално в професионално направление 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5. Математика, научна специалност „Изследване на операциите” за нуждите на Института по математика и информатика на БАН.

С уважение:

25.11.2016 г.  
София

/проф. дмн Михаил Иванов Кръстанов/