Авторска справка

за научните приноси на доц. д-р Наталия Тодорова Кольковска
в трудовете, представени за участие в конкурс за "професор",
обявен от ИМИ-БАН и публикуван в ДВ бр. 35/2016

в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 Математика, научна специалност "Изчислителна математика" (Числен и теоретичен анализ на нелинейни частни диференциални уравнения)

За участие в конкурса са представени 27 статии, разделени в две групи. Статиите, означени с [A1]–[A11], са публикувани в списания с импакт фактор. Статиите [B1]–[B16] нямат импакт фактор, като 13 от тях са в издания със SJR. Всички представени резултати са получени след присъждането ми на научното звание „доцент".

Представените за участие в конкурса статии са групирани тематично в три групи:

1. Теоретичен анализ на нелинейни дисперсни уравнения
2. Числени методи за уравнения от типа на Бусинеск
3. Числен анализ на други проблеми.

1 Увод

Основна част от представените статии третират теоретичния и числен анализ на нелинейни дисперсни уравнения от типа на Бусинеск:

$$\beta_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + \beta_1 \Delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta^2 u + \Delta f(u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < t \le T, \quad T < \infty \tag{1}$$

с начални

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \tag{2}$$

и гранични условия

$$u(x,t) \to 0, \quad \Delta u(x,t) \to 0, \quad |x| \to \infty \tag{3}$$

в безкрайната област $\mathbb{R}^n \times [0,T]$. Тук Δ е операторът на Лаплас по пространствените променливи, β_1 и β_2 са положителни константи. Нелинейността в уравнението на Бусинеск се задава от функцията f. Примери на разглеждани в статиите функции са $f(u) = \alpha|u|^p$, $f(u) = \alpha|u|^{p-1}u$, $p \ge 2$; $f(u) = a|u|^p u + b|u|^{2p} u$, $p \ge 1$.

Разглежданата задача (1)-(3) се получава при моделирането на различни проблеми от физиката, биологията и др.: класическото уравнение на Бусинеск е уравнението (1) с $n = 1$, $\beta_1 = 0$ и $f(u) = \alpha u^2$. То възниква при моделиране на движението на повърхностни вълни в плитки води. Други приложения на (1), в които нелинейността е от вида $f(u) = a|u|^p u + b|u|^{2p} u$, са дадени по-нататък в изложението.

Някои фундаментални свойства на уравнението на Бусинеск са следните: запазване на масата, на момента $M(0)$ и на енергията $E(0)$ в процеса на еволюция на решението във времето; наличието на частни решения на (1), които са локализирани в пространството, движат се с постоянна скорост във времето и запазват формата си с течение на времето. Такива частни решения се наричат солитони.

Задачата (1)-(3) притежава два типа решения: глобално съществуващи, ограничени за всяко фиксирано време решения; и т.н. „избухващи“ за крайно време решения - решения, за които при клонене на времето към крайна величина T^* (наречена време на избухване), някоя норма на решението (например H^1 нормата) клони към безкрайност. Основен проблем в теорията е установяването на критерии, при които в зависимост от началните данни решението на (1)-(3) принадлежи към един от двата типа решения.

За задачи с енергия $E(0) < d$ такива критерии са получени чрез предложения в [13][1] метод на потенциалните ями. Тук константата d (mountain pass level) е равна на дълбочината на потенциалната яма. Например, от [16], [20] и др. е известно, че решението на уравнението на Бусинеск с нелинейност $f(u) = \alpha|u|^p$ избухва, ако началните данни притежават отрицателна енергия, $E(0) < 0$. В случая на субкритична енергия $0 < E(0) < d$ глобалното съществуване или избухване на решението се определя напълно от знака на функционала на Нехари (дефиниран като производна на потенциалната енергия): ако стойността на функционала на Нехари е положителна при $t = 0$, то решението съществува глобално, ако стойността на функционала е отрицателна при $t = 0$, то решението избухва във времето.

Въпросът за глобално съществуване или избухване на решението на (1)-(3) със суперкритична енергия $E(0) > d$ е недостатъчно изучен. Теореми за глобално съществуване на решението са известни в много малко случаи, например за задачи с начални данни, съответващи на солитоните. Освен това знакът на функционала на Нехари не е достатъчен за избухване на решението. Търсят се други, допълнителни условия върху началните данни, които да са достатъчни за избухване на решението.

Основен метод [9] за доказателство на избухване на решението е следният: най-напред се конструира подходяща интегрална характеристика на решението, която се разглежда по-нататък като функция на времето; при подходящия избор тази функция се доказва, че тя е решение на диференциално неравенство; това диференциално неравенство се изследва и се установява например, че решението му клони към безкрайност за крайно време. Добре известен пример за подобно неравенство е това от [6].

[1] цитиранията на статии без буква в означението са от литературата в края на авторската справка

2 Теоретичен анализ на нелинейни дисперсни уравнения

В тази част са изложени теоретични резултати във връзка с разгледаните в увода основни проблеми: извод на точна стойност на критичната енергетична константа при различни нелинейни функции; развиване на идеите на метода на потенциалната яма, предлагайки „нестандартен метод“ на потенциалната яма; изследване на устойчивостта на солитони; формулиране на ново диференциално неравенство с избухващо решение и на нови достатъчни условия за избухване на решения с произволна енергия; предлагане и изследване на нови функционали, запазващи знака си в течение на времето.

За едномерната задача (1)-(3) с произволни дисперсни константи β_1 и β_2 и за нелинейност от вида $f(u) = \alpha|u|^p$, $p \geq 2$, в [B6] и [A5] е получена точната стойност на критична енергетична константа. В [A5] въвеждаме два нови функционала. Единият от тях, I_γ, обобщава класическия функционал на Нехари и зависи от параметъра γ. За него се доказва запазване на знака в течение на времето при подходящи стойности на параметъра и ако $0 < E(0) < d$. Оказва се обаче, че за задачи с положителна енергия при всички достатъчно големи стойности на γ функционалът I_γ е винаги отрицателен. Затова въвеждаме втори функционал K, включващ не само началния профил u_0, но и началната скорост u_1 на решението. В теорема 6 се доказва запазване на положителния знак на K в течение на времето, ако в началния момент K е положителен и началните данни удовлетворяват едно неравенство. Основен резултат в [A5] е теорема 7 за глобално съществуване на решение с произволна положителна енергия, ако в началния момент K е положителен и е изпълнено допълнителното неравенство, свързващо само началните данни. Посочен е метод за намиране на начални данни, за които условията на новата теорема за съществуване са изпълнени.

В статии [A6], [A11] и [B11] се разглежда задачата (1) - (3) с комбинирана нелинейност от вида на Бернули $f(u) = a|u|^p u + b|u|^{2p} u$, $p \geq 1$, при всички възможни комбинации на знаците на a и b. Задачи с нелинейности от този вид възникват например в механиката при моделирането на надлъжни вълни в свиваем еластичен прът, в биологията при разпространението на нервни импулси в биомембрани и др. Базисна роля играе т.н. „основно“ решение, или стационарното решение на (1), известно още като 'ground state'. В [A6], прилагайки резултати от [1], са намерени необходими и достатъчни условия за коефициентите a, b и параметъра p, при които съществува единствено (с точност до транслация) положително стационарно решение на (1). В случая $b < 0$ за всяко p се изчислява критичната енергетична константа d в явен вид чрез сложен интеграл. В частност при $p = 2$, тоест за често срещаната 3-5 нелинейност, формулата за d е опростена и не съдържа интеграли.

Задачата (1) - (3) с допусканията $b > 0$, $a < 0$, $a^2 > \frac{(p+2)^2}{p+1} b$ в нелинейността f се разглежда в [A6] за първи път в литературата. В този случай се въвежда нов „нестандартен“ метод на потенциалните ями. Изследва се структурата на функционала на Нехари и на многообразието на Нехари, които са по-сложни от тези в случая $b < 0$. Доказва се, че величината d, изчислена върху функциите от цялото многообразието на Нехари, клони към минус безкрайност. Това позволява разглеждането на нова потенциална яма и дефинирането на нова критична енергетична константа d_+ като минимум на потенциалната енергия само върху една част от функциите от многообразието на Нехари. Доказва се, че d_+ е положителна величина и се намира нейната стойност в явен вид чрез сложен интеграл при $p \neq 2$. Формула за d_+ е опростена при $p = 2$. С помощта на новата критична енергетична константа d_+ се доказва основната Теорема 6.3 за съществуване на глобално решение на задачи с енергия $E(0) < d_+$.

Случаят $b > 0$, $a < 0$, $a^2 = \frac{(p+2)^2}{p+1} b$ се разглежда подробно в статия [B11]. В [A6] при разглежданите ограничения се доказва съществуване на две симетрични нетривиални решения на стационарното уравнение, но не от вида на солитон, тоест с гранични условия $u(x,t) \to 0$ при $|x| \to \infty$, а от вида 'kink', когато имаме гранични условия $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Подобно на [A6], в [B11] се намира нова потенциална яма и се дефинира нова критична енергетична константа d_+ - аналог на константата d от класическия метод на потенциалните ями. Доказва се основната теорема 2 за съществуване на глобално решение при субкритична енергия $E(0) < d_+$. В теорема 4 се доказва, че L_2 нормата на градиента на решението е винаги ограничена в максималния интервал на съществуване на решението, тоест избухване на решението чрез клонене на нормата на градиента му към безкрайност е невъзможно. За разлика от предишните случаи на връзки между коефициентите a и b, при които критичната енергетична константа се изчислява в явен вид чрез стационарното решение, в случая $b > 0$, $a < 0$, $a^2 = \frac{(p+2)^2}{p+1} b$ и за всяко p в теорема 5 са намерени само оценки отгоре и отдолу на константата d_+.

В останалите два случая, свързани с нелинейността на Бернули ($b > 0$, $a > 0$) и ($b > 0$, $a < 0$, $a^2 < \frac{(p+2)^2}{p+1} b$), и задачата (1) - (3), в [A6] се доказва съществуване на единствено глобално решение чрез закона за запазване на енергията.

В [B12] се разглежда уравнението на Бусинеск с линейна възстановяваща сила и с нелинейност $f(u) = \alpha |u|^{p-1} u$. Това уравнение описва напречните деформации в еластичен прът. За пръв път, прилагайки метода на потенциалните ями, в теорема 3 и теорема 4 се доказва глобалното съществуване или избухване на решението в случая на субкритична енергия. Изведена е оценка отдолу на критичната енергетична константа. При изпълнение на две допълнителни неравенства за началните данни, в теорема 5 и теорема 6 се изследва знакът на функционала на Нехари, като се доказва, че той е винаги отрицателен. Основние резултати, получени в теорема 7, са за избухване на решението в случая на произволна положителна енергия и оценката отгоре на времето на избухване. Даден е метод за построяване на начални данни с енергия, по-голяма от произволно положително число, за които са изпълнени условията на теоремата за избухване на решението.

В [A11] се изследва орбиталната устойчивост или неустойчивост на солитонните решения на (1) при квадратично-кубичната нелинейност $f(u) = au^2 + bu^3$. Най-напред, в зависимост от знаците на участващите в уравнението параметри, се извеждат всички движещи се със скорост c солитони и интервалите за скоростите им. За един основен случай на комбинация на параметрите, свързан с моделирането на нервни импулси, се прилагат идеи от теорията от [5] и [3] за устойчивост или неустойчивост на солитони. В теорема 1 и теорема 2 се извеждат в явен вид свързаната със законите за запазване на енергия и момент функция $d(c)$ и втората и производна $d''(c)$. Това позволява да се установи орбиталната устойчивост или неустойчивост на солитоните, като просто се заместят конкретните параметри от задачата във формулата за $d''(c)$ и се определи знакът на $d''(c)$. В теорема 5 са получени резултати за устойчивост или неустойчивост, валидни в околности на крайните точки от интервалите на съществуване на възможните скорости на солитоните. В теорема 3 е направен прецизен анализ на устойчивостта за частния случай на уравнение (1), в което $\beta_1 = 0$. Получените в статията резултати обобщават известни резултати от [3], [4].

В статиите [A7]–[A10], [B12] и [B13] се разглеждат въпроси за избухване на решения с произволно висока положителна енергия на уравнението на Клайн-Гордон и уравнението на Бусинеск с линейна възстановяваща сила, като разглежданите нелинейности са от общ вид. В частен случаи на нелинейностите се получава нелинейността на Бернули. Трудностите при третирането на такива нелинейности е липсата на хомогенност при рескалиране на уравнението и началните данни.

В статията [A7] се разглежда уравнението на Клайн-Гордон с нелинейност от два общи вида. Въвежда се и се изследва нов функционал P от решението, идеята за който е взета от подходяща декомпозиция на производната по времето. В основната теорема 2.2 се доказва избухване на решението на уравнението за крайно време, ако са удовлетворени допълнителни условия върху началните данни. Предложеното в статията достатъчно условие за избухване на решението обобщава и отслабва известните до сега достатъчни условия от [15], [18], [7], [19]. Освен това получаваме, че някои условия върху началните данни, наложени в [18] и [19], са излишни. Конструират се начални данни с произволно голяма положителна енергия, за които предложеното в статията условие е изпълнено, а известните до сега достатъчни условия - не. Методът на доказателство се основава на изпъкналия метод на Левин [9].

В статията [A8] се разглежда избухването на решението на уравнението на Бусинеск с линейна възстановяваща сила и с два типа общи нелинейности. В теорема 4.1 се формулира достатъчно условие върху началните данни, при изпълнението на което се доказва избухване на решението за крайно време. Дава се оценка отгоре на времето на избухване. Предложен е нов функционал P от решението и се доказва, че функционалът на Нехари е винаги отрицателен, ако е удовлетворено достатъчното условие за началните данни. Доказателството на резултата се базира на предложена в статията модификация на изпъкналия метод на Левин. Това е първият получен в литературата резултат за несъществуване на глобално решение за разглежданото уравнение.

Основен резултат, получен в статията [A9], е формулираното в теорема 3.1 ново диференциално неравенство с несъществуващо глобално решение. В теоремата се извежда и оценка отгоре на максималното време на съществуване на решението. Подобни неравенства, известни в литературата, са тези от [6], [15], [8]. Оказва се, че новото неравенство се удовлетворява естествено при третирането на нелинейни дисперсни уравнения от вида на Клайн-Гордон и уравнението на Бусинеск с линейна възстановяваща сила и с нелинейности от два общи вида. Като следствие от новото неравенство са получени теореми за избухване на решенията на уравнението на Клайн-Гордон и уравнението на Бусинеск с линейна възстановяваща сила при удовлетворяване на допълнително условие за началните данни, което е по-общо от съответните условия в [19], [7].

В теорема 3 от [A10] е представено по-общо допълнително условие за началните данни от това в [A9], при което се доказва несъществуване на глобално решение на новото обикновено диференциално неравенство от [A9]. В теорема 2 се формулира едно необходимо и достатъчно условие за избухване на решението на диференциалното неравенство от [A9]. Като основно приложение на теорема 3 се доказва избухване за крайно време на решението на уравнението на Клайн-Гордон с нелинейност от общ вид при по-общо от известните до сега допълнително условие за началните данни.

В [B13] се разглежда уравнението на Бусинеск с линейна възстановяваща сила и нелинейност от общ вид. Дефинирани са три обобщения на класическия функционал на Нехари. За всеки от обобщените функционали, в теорема 4 - теорема 6 се доказва запазването на отрицателния знак на функционала в течение на времето, ако в началния момент стойността на функционала е отрицателна. Като следствие се установява избухване на решението на разглежданата задача, което може да има произволно голяма енергия. Основният резултат в статията е теорема 7, в която е формулирано допълнително условие за началните данни (подобно на това от [A10]), при удовлетворяването на което се доказва избухване на решението за крайно време.

3 Числени методи за уравнения от типа на Бусинеск

Статиите [A4], [B3]–[B5], [B7]–[B10], [B14]–[B16] са посветени на числени методи за решаване на многомерното уравнение на Бусинеск (1)-(3) и на определянето на критичната енергетична константа в многомерния случай. За простота изложението е направено за двумерната задача.

За решаване на едномерното уравнение на Бусинеск в литературата са предложени различни числени методи, като диференчни методи, метод на крайните елементи, спектрални и псевдоспектрални методи, симплектични методи и др. Числени резултати за двумерната задача са публикувани само в [2]. Теоретичен анализ е направен само за случая $\beta_1 = 0$ в (1), съответно в [12] - за метода на крайните елементи, и в [11] - за един диференчен метод.

Основните цели, поставени в числените изследвания, са:

- построяване и теоретично изследване за сходимост и точност на диференчни схеми за общото уравнение на Бусинеск (1), главно с $\beta_1 \neq 0$;
- построяване на *консервативни схеми* (запазващи подходящи дискретни аналози на енергията, момента и др.);
- построяване на ефективни (с брой на пресмятанията пропорционален на броя на възлите) алгоритми (в едномерния и многомерния случаи) за компютърна симулация на тези схеми.

Консервативността на изследваните числени методи е особено важна характеристика за пресмятането на численото решение *в дълъг период от време.*

В [B3], [B4] и [A4] са разгледани три семейства от трислойни диференчни схеми, зависещи от параметър, за числено решаване на многомерното уравнение на Бусинеск с произволна нелинейност. Те се различават по апроксимацията на нелинейния член в (1). Едната от предложените схеми, т.н. „явна“ схема, апроксимира нелинейността чрез стойности на решението на основния слой по времето. Останалите две схеми са „неявни“ - те включват численото решение на горния слой по времето като аргумент на нелинейна функция - и се различават по апроксимацията на нелинейността. Анализът на главния член от грешката на апроксимация, проведен в [A4], показва предимството на едната „неявна“ схема пред другата по отношение на грешката на апроксимация, което е съществено при задачи с големи производни.

В [B3], [B4] и [A4] е доказана консервативността на двете „неявни“ семейства диференчни схеми- запазване на началната енергия при еволюция на численото решение във времето. При третата схема, т.н. „явна схема“, се удовлетворява интегрално тъждество, валидно за всеки два съседни слоя по времето, виж [B3].

При основните предположения, че точното и численото решение са ограничени в разглеждания времеви интервал, а стъпката по времето е достатъчно малка (ограничена отгоре от максимума на точното и числено решение), за всички предложени схеми в [A4] и [B4] са доказани за пръв път теореми за сходимост на численото решение към точното със скорост $O(h^2 + \tau^2)$ (h е характерната стъпка по пространството, а τ е стъпката по времето). Получени са съгласувани оценки на грешката в дискретна равномерна норма (с точност до логаритмичен множител) и в дискретна Соболева норма $W^1_{2,h}$. В теорема 3.4 от [A4] допълнително е доказано съществуването на локално (по времето) ограничено в дискретното пространство $W^1_{2,h}$ числено решение, при достатъчно малка стъпка по времето, ограничена отгоре от входни параметри на задачата. Основните преодолени трудности при численния анализ на схемите са нелинейността на изходната диференциална задача и наличието на нестандартния член $\beta_1 \Delta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ в нея.

В едномерния случай в [B3], [B7] и [A4], а в двумерния случай в [B5], са направени многочислени експерименти относно реда на сходимост и удовлетворяването на дискретния закон за запазване на енергията. Всички те показват втория ред на сходимост и запазване на дискретната енергия с много висока точност.

Предложените в [B3], [B4] и [A4] диференчни схеми за уравнението на Бусинеск (1) са използвани многократно при числените експерименти, представени в теоретичните статии [A5], [A6], [B6], [B11] и [B12]. Например, в [A5] и [B6] се демонстрира числено точността на критична енергетична константа, като се изследва поведението на числени решения с енергии, близки под и над тази константа. Проведените в [B6] и [A5] други числени експерименти показват, че глобалната разрешимост или избухване на решенията на задачи със субкритична енергия $E(0) < d$ зависят не само от началния профил на решението u_0, а и от скоростта u_1. Това ни мотивира да въведем в [A5] двата нови енергетични функционала. Основните идеи за числено решаване на (1)–(3) са приложени при построяването на числени методи за решаване на уравнението на Бусинеск от шести ред и при уравнението на Бусинеск с линейна възстановяваща сила в [B12].

Алгоритъмът, реализиран в [B5], е основан на разцепването на диференчните схеми на дискретна двумерна елиптична задача и на хиперболична задача. За изчисляване на решението на „неявните“ схеми се изисква и допълнителен итерационен процес. Така в [B5], едновременно с [2], са представени първите известни в литературата числени резултати за решаване на двумерната задача на Бусинеск.

В [B7] е предложено различно, т.н. покоординатно, разцепване на предложените диференчни схеми, което се основава на решаването на серия от едномерни задачи най-напред в едната, а после в другата координатна посока, и на решаването на двумерна елиптична задача със стандартен дискретен Лапласиан.

В [B10] се предлагат и изследват две числени схеми за решаване на двумерното уравнение на Бусинеск, записано в движеща се едновременно със солитона координатна система. Смесената производна по времето и по едната пространствена променлива в едната схема се апроксимира чрез централна крайна разлика по пространствената променлива, а във втората схема - чрез разлика „срещу потока“ (upwind). Линейните схеми, съответстващи на предложените нелинейни, се анализират и се показва тяхната устойчивост по начални данни и дясна част. За едномерната задача са проведени многочислени експерименти за намиране на числения ред на сходимост. Предимството на тези схеми е в запазването на солитона винаги в центъра на координатната система в течение на времето. То позволява успешното използване на неравномерна мрежа, сгъстяваща се около началото на координатната система, където производните по пространствените променливи са големи.

В [B9] се предлага нова четирислойна двупараметрична диференчна схема за решаване на двумерното уравнение на Бусинеск, като в теорема 1 се доказва нейната консервативност. При подходящ избор на единия от параметрите и слабо ограничение отгоре за стъпката по времето чрез характерната стъпка по пространството, намирането на решението на получената диференчна схема се свежда само до решаване на дискретно елиптично уравнение от втори ред върху правоъгълна мрежа, което е стандартна задача в числените методи. Така числената реализация на метода става много ефективна. В теорема 2 от [B14] се доказва, че четирислойната диференчна схема има $O(h^2 + \tau^2)$ скорост на сходимост. В [B9] и [B14] са представени числени експерименти за установяване на числения ред на сходимост и запазване на дискретния енергетичен функционал, както и сравнение с известните вече трислойни диференчни схеми.

В [B8] се предлага векторна адитивна схема, наричана още „многокомпонентен метод на променливите направления“, за двумерното уравнение на Бусинеск. При този метод на всяка една стъпка по времето се определя вектор от решения, които са приближения на точното решение. Редът на апроксимация на този метод е $O(h^2 + \tau)$, ако за коефициента β_1 от уравнението (1) е изпълнено $\beta_1 \neq 0$, и $O(h^2 + \tau^2)$, ако $\beta_1 = 0$. В теорема 1 се доказва, че разликата между енергетичните норми на решението, изчислени за два последователни слоя по времето, е $O(\tau)$. В теорема 2 и следствие 1 се доказва сходимост на численото решение към точното в силна дискретна норма $W^2_{2,h}$ със скорост $O(h^2 + \tau)$, ако $\beta_1 \neq 0$. Алгоритъмът за намиране на вектора от приближените решения е ефективен, като на всяка стъпка се решават линейни 5-диагонални системи уравнения. Представени са числени експерименти, като е направено сравнение с други диференчни схеми.

В статиите [B15] и [B16] се намира числено стационарното (т.н. „ground state“) решение на двумерното уравнение на Бусинеск с единична нелинейност или нелинейност от вида на Бернули. Трябва да отбележим, че точно решение на това стационарно уравнение не е известно. Методът се основава на записване на обикновенното диференциално уравнение от втори ред като начална задача за система от уравнения от първи ред; решаването на последната чрез метода на стрелбата в подходяща посока на намиране на решението, в съответствие с устойчивия по отношение на грешки от закръгляне алгоритъм на Miller [14]; прилагане на метода на Рунге-Кута с глобален ред на сходимост $O(h^4)$. Намира се численият ред на сходимост на метода, който се оказва $O(h^3)$ за едномерната задача и $O(h^4)$ за двумерната задача. С помощта на изчисленото с висока точност стационарно решение, в [B15] е намерена с точност $\approx 10^{-12}$ критичната енергетична константа d за двумерното уравнение на Бусинеск при квадратична и кубична нелинейност. Това позволява да се приложат за двумерните задачи на Бусинеск със субкритична енергия $E(0) < d$ теоретичните резултати, формулирани в увода, като се определи отнапред, без да се решава числено задачата, поведението на решението (глобално съществуване или избухване).

4 Числен анализ на други проблеми

В статиите [A1] и [A2] се изследва метод за числено намиране на логаритмичния потенциал от двоен слой и на обемен потенциал, който свежда двете задачи до решаване на дискретно елиптично уравнение със стандартен дискретен лапласиан и подходяща дясна част. Тези задачи възникват при прилагането на метода на гранични елементи за решаване на двумерни елиптични задачи в области с гладка граница. В теорема 1 от [A1] и теорема 1 от [A2] са получени оценки на грешката в дискретното Соболево пространство W_p^2, съгласувани с гладкостта на потенциалите от пространство на Бесов. С тяхна помощ са изведени оценки на грешката в дискретна максимална норма, които са оптимални по порядък с точност до логаритмичен множител. В частнност се получават известните схеми от [10].

В статията [A3] се разглежда процес на кристален растеж в многокомпонентни системи (например при формирането на стъкло). Математическият модел се свежда до нелинейно параболично уравнение, разглеждано в област с неизвестна граница, и допълнителни условия върху неизвестната граница от типа на тези при еднофазната задача на Стефан. Предложеният числен метод се базира на изправяне на границата чрез смяна на променливите и се свежда до решаване на нелинейна система от уравнения. Проведените с конкретни физически параметри числени експерименти показват съответствие с експерименталните данни.

В статията [B1] се разглежда елиптично уравнение от втори ред с нестандартни гранични условия, включващи както неизвестната функция и нормалната ѝ производна, така и втората производна на неизвестната функция в тангенциално направление. Такива гранични условия се наричат условия на Венцел [17]. За апроксимация на посочената задача се предлага диференчна схема със специфична апроксимация на граничното условие. В лема 3 е получена априорна оценка на дискретното решение в специална норма чрез норма на дясната част. В теорема 1 е доказана сходимост на дискретното решение към точното, като редът на сходимост е съгласуван с гладкостта на точното решение.

Задачата с гранични условия на Венцел от [B1] е мотивирана от разгледания в [B2] модел на електричното поле около върха на атомно силов микроскоп (AFM), който пробива диелектрик. Неизвестната функция е потенциалът на електричното поле, а моделът се свежда до решаване на двумерно елиптично уравнение в цилиндрични координати, с на части постоянни коефициенти и с условия за свързване от вида на Венцел. Численият метод се базира на метода на крайните разлики. При апроксимацията на условието на свързване на Венцел се прилага методът на крайните елементи (използват се триъгълни крайни елементи). Върху редица от вложени мрежи се изследва численият ред на сходимост в равномерна норма, който се оказва първи.

27.06.2016 г. Подпис:

(доц. д-р Наталия Кольковска)

Литература

[1] Berestycki H. , Lions P.-L., Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state, Arch. Ration. Mech. Anal., 82, 4, 313–345, 1983

[2] Chertock A., Christov C.I., Kurganov A., Central-Upwind Schemes for the Boussinesq paradigm Equation, In: Proc. 4th Russian-German Advanced Research Workshop on Computational Science and High Performance Computing, NNFM, 113, 267-281 , 2011

[3] Erbay H.A., Erbay S., Erkip A., Instability and stability properties of travelling waves for the double dispersion equation, Nonlinear Analysis, 133, 1–14, 2016

[4] Freistühler H., Höwing J., An analytical proof for the stability of Heimburg-Jackson pulses, ArXiv:1303.5941v1, 2013

[5] Grillakis M. , Shatah J., Strauss W., Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry I., Journal of Functional Analysis, 74, 160–197, 1987

[6] Kalantarov V., Ladyzenskaya O., The occurrence of collapse for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types, J. Soviet Math., 10, 1, 53–70, 1978

[7] Korpusov M., Blow up of a positive-energy solution of model wave equations in nonlinear dynamics, Theoretical and Mathematical Physics, 171, 421–434, 2012

[8] Korpusov M., Non-existence of global solutions to generalized dissipative Klein-Gordon equations with positive energy, Electronic Journal of Differential Equations, 119, 1–10, 2012

[9] Levine H., Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equation in the form $Pu_{tt} = Au + F(u)$, Trans. Amer. Math. Soc., 192, 1–21, 1974

[10] Mayo A., The rapid evaluation of volume integrals of potential theory on general regions, J Comput. Physics, 100, 236—245, 1992

[11] Ortega, T., Sanz-Serna J.M., Nonlinear stability and convergence of finite difference methods for the "good" Boussinesq equation, Numer. Math., 58, 215—229, 1990

[12] Pani A., Saranga H., Finite Element Galerkin Method for the "Good" Boussinesq Equation, Nonlinear Analysis 29, 937—956, 1997

[13] Payne L., Sattinger D., Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations, Israel J. Math., 22, 273–303, 1975

[14] Press W., Teukolsky S. et al., Numerical Recipes in C++, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002

[15] Straughan B., Further global nonexistence theorems for abstract nonlinear wave equation, Proc. Amer. Math. Soc., 48, 381–390, 1975

[16] Turitsyn, Blow-up in the Boussinesq equation, Phys.Rev., E47, R769-R799, 1993

[17] Ventssel A., On boundary conditions for multidimensional diffusion processes, Teor. Veroyatn. i Primenen., 4, 172–185, 1959

[18] Wang Y., A sufficient condition for finite time blow up of the nonlinear Klein–Gordon equations with arbitrary positive initial energy, Proc. Amer. Math. Soc., 136, 3477–3482, 2008

[19] Xu R., Ding Y., Global solutions and finite time blow up for damped Klein–Gordon equation, Acta Math Scienta, 33B (3), 643–652, 2013

[20] Xu R. and Liu Y., Global existence and nonexistence of solution for Cauchy problem of multidimensional double dispersion equations, J Math. Analysis Applic., 359, 729–751, 2009