Р Е Ц Е Н З И Я

от доц. д-р Георги Любомиров Илиев

относно дисертационния труд **"Апроксимации с рационални функции в комплексната равнина"**

на **Николай Руменов Икономов**

за придобиване на образователно-научната степен **"доктор по математика"**,

Научна специалност **01.01.04 "математически анализ"**

1 Биографични данни

Николай Икономов е роден през 1986 г в Стара Загора, където през 2004 г.завършва средното си образование като възпитаник на Математическата гимназия с преподаване на английски език. През същата година е приет за студент във Факултета по приложна математика и информатика на Техническия Университет-София, където през 2008 г. придобива бакалавърска степен по специалност "приложна математика". Защитава дипломна работа на тема "Ортогонални полиноми и развитие на функциите в ред на ФУрие". През 2009 г. му е присъдена образователната степен магистър; темата на магистърската работа е "Редове на ФУрие на аналитични функции по системи от ортогонални полиноми, свръхсходимост"; успехът от защитата на магистърската работа е отличен 6.00. През 2011 г. е зачислен, след успешно положен приемен изпит, в редовна докторантура в Института по математика и информатика на БАН. През 2014, г. е отчислен поради изтичане на тригодишния срок с право на защита, като докторантурата е продължена без право на заплащане с една година, за оформяне на дисертационния труд. През декември 2015 г. е назначен като математик в Института.

2 Тематиката на дисертацията

Темата на представения дисертационен труд е "Апроксимации с рационални функции в комплексната равнина".

По-конкретно- областта, в която се провеждат изследванията, е посветена на Паде-апроксимациите-класически, многоточкови, обобщени, както и на "апроксимации на Ермит - Паде".

Класическите рационални апроксимации на Паде са въведени през 1890 г. от френския математик А. Паде . Реализирането на този вид апроксимации е предложено също така от Фробениус, а Марков открива връзката на апроксимациите на Паде с верижните дроби. Първата монография е на О. Перон от 1921 г.

Паде-ароксимациите (PA) са една актуална и силно развиваща се област в съвременната математика. Става дума както за класическите апроксимации, така и за различните техни обобщения - многоточкови апроксимации, т.н. "Обобщени"PA, както и за апроксимациите на Ермит-Паде. Този интерес към PA е обусловен от една страна от връзката с модерния математически анализ-теорията на потенциала, а от друга (след създаване на подходящи числени методи и алгоритми) PA имат силни практически приложения.

Най-общо може да обобщим, че има две основни причини, които обуславят **актуалността** на PA:

1) Силно теоретично значение в областта на комплексния анализ и теория на апроксимациите.

2) Практически приложения.

За да бъдат получени добри резултати по т. 1) са необходими значителна професионална подготовка както и творческа работа по проблеми, свързани с имената на водещи в областта математици.

За да бъдат получени добри резултати по т. 2) наред с казаното по т.1), е необходимо още създаване на подходящи числени методи и алгоритми, както и много добра компютърна грамотност.

Може да се окаже понякога, че т. 1) (в някакъв смисъл) е против т. 2), както и обратното. Ще проследим това по-долу при анализ на резултатите от тази дисертация.

3 Анализ на резултатите

Представеният дисертационен труд "Апроксимации с рационални функции в комплексната равнина"съдържа 101 страници, в това число три глави, заключение , декларация за оригиналност на резултатите, библиография и списък на авторските публикации.

Глава 1 (Редове на апроксимации на Паде) разглежда Паде-апроксимации с фиксирана степен на знаменателите, т.н. "редове"(в Паде-таблицата на Перрон)

Към този тип Паде-апроксимации се отнасят

многоточковите PA (при които точките на интерполация са предварително зададени, а фиксираните полюси са разположени в безкрайната точка)

и **"обобщените"Паде-апроксимации**, при които точките на интерполация, както и фиксираните полюси се намират в предварително зададени точки, наречени "възли".

Доказани са две теореми (в дисертацията Теорема 2 и Теорема 10), които изразяват следното :

Ако за всяка функция, аналитична върху регулярното компактното множество, където е дефинирана, PA я представят по такъв начин, че е налице т.н. "максимална сходимост"в областта на нейната мероморфна продължимост с краен брой полюси, то "всички"възли по необходимост имат екстремално разпределение спрямо равновесната мярка на компакта, при многоточкови РА , съответно спрямо хармоничната мярка на кондензатора , при обобщени РА .

Тези теореми са в известен смисъл "обратни"на теоремите на Уолш, Сафф и Гончар , според които РА клонят "максимално"към функцията в областта на мероморфна продължимост (равномерно в Чебишевата метрика върху сферата върху компактни подмножества).

Въпросът за асимптотичното разпределени на възлите при многоточковите апроксимации е поставен и в случая, когато степента m(n) на знаменатели на РА клонят към безкрайност, макар и "бавно"в сравнение със степените на знаменателите, т.е., m(n) = o(n/ln n). Доказано е (Теорема 10), че при наличие на "максимална сходимост"възлите са равномерно разпределени спрямо равновесната мярка, но по подредица. Тази теорема е доказана през 2013 г. от Блатт/Ковачева; тук е публикувано ново доказателство.

Общо при анализа на **Глава 1** може да се каже:

1) Резултатите са свързани със задълбочени познания на Паде-апроксимациите, както и с последни изследвания на водещи математици в тази област като Гончар, Уолш, Сафф, Блатт, Ковачева и др.

2) Някои от резултатите може и да са очаквани от тесните специалисти в РА, но това не може да умаловажи творческата работа на кандидата, както и заслугите на неговия научен ръководител.

3) Има технически и редакционни неточности в текста.

Глава 2 (Диагонали на апроксимации на Паде)

Втората глава на дисертацията разглежда диагонални апроксимации на Паде на функции на Марков. Известно е, че знаменателите на класическите Паде апроксимации в безкрайната точка съвпадат (с точност до мултипликативна константа) с полиномите, ортогонални спрямо мярката, дефинираща изходната функция на Марков.

Класическият резултат на Бернщайн дава пълна характеристика на поведението на ортогоналните полиноми извън носителя на мярката, така и върху самия дефиниционен интервал, примерно [-1,1] . Резултатър на Бернщайн е валиден за мерки, положителни върху [-1,1] и от класа на Дини-Липшиц.

През 1993 г. канадският учен Натол доказва същата теорема, допускайки комплекснозначни мерки, но само от класа на Липшиц. В дисертацията е публикувано доказателство за случая когато мерките са комплекснозначни и от класа на Дини-Липшиц. Работата е съвместна, със съавтори С.Суетин и Р.Ковачева. Основният резултат в тази глава е Теорема 20.

Общо при анализа на **Глава 2** може да се каже:

1) Теорема 20 е свързана с класически резултат на Бернщайн, допускайки комплекснозначни мерки. Тук съвместната публикация със С.Суетин и Р.Ковачева в реномирано списание би трябвало да се отбележи като предимство.

2) Въпреки, че е отбелязана връзката на Теорема 20 с резултати за редовете на Фурие, би трябвало по-подробно тази връзка да се обясни.

Глава 3 (Алгоритми за изчисление на апроксимации на Паде)

В тази глава са изложени алгоритмите за изчисление на

-класическа апроксимация на Паде на $f(z)$,

-класическа апроксимация на Ермит–Паде за набора от три функции $[1, f, g]$,

-двуточкова апроксимация на Паде на функция $f(z)$ или на две функции $f(z)$ и $g(z)$,

-многоточкова апроксимация на Паде на $f(z)$.

Даден е изходният код на алгоритмите, който е написан за програмата PARI/GP.

Общ анализ на резултатите от **Глава 3** :

1) Резултатите имат научно-приложен принос. Особено важни и нови (според мен) са разработените алгоритми за класическа апроксимация на Ермит–Паде за набора от три функции $[1, f, g]$.

2) Резултатите имат приложен принос. Разработен е софтуер за решаването на по-горе изложените алгоритми.

3) Трябва да се отбележат уменията на дисертанта в създаването на числени методи за решаването на задачи в РА и тяхната компютърна реализация.

4 Забележки и препоръки

1) Прочита на дисертацията, както и на автореферата създава впечатление за небрежност и прибързаност при написването им.

2) В дисертацията липсва увод. Това, според мен, не е добра идея, въпреки, че е посочен приноса във всяка отделна глава. Увода в една дисертация посочва взаимосвързаността на проблемите, в случая достатъчно значими и актуални.

3) Смятам, че не е нужно да се излага кода на програмите в Глава 3.

4) Има няколко номерирани, но празни страници в Глава 3.

5) Без да се спирам конкретно на техническите и редакционни грешки, ще отбележа най-дразнещите:

- Има неточности (бих казал неверни твърдения) при превода на терминология от английски.

- Има места в отделните глави, където английският текст е оставен без превод.

6) Препоръчвам на дисертанта в бъдещата му работа да бъде така стриктен в описването на теоретични материали както е стриктен при написването на компютърни програми.

7) Препоръчвам на дисертанта в бъдещата му работа да не губи връзка между сериозни теоретични резултати и тяхното практическо приложение - едно умение, което той демонстрира чрез настоящата дисертация.

5 Наукометрични данни

Списъкът на публикациите на Н. Икономов обхваща 4 заглавия: 3 излезли от печат: самостоятелна статия в Доклади на БАН от 2013 г. , съвместна статия с Р. Ковачева в AIP Conf. Proc. 2014, съвместна статия с Р. Ковачева и С. Суетин в Известия РАН, 2015. Една самостоятелна статия е приета за печат в Matematika

Slovaka. Към този списък трябва да отчетем и две статии в ARXIV от 2015, като съвместни публикации с Р. Ковачева и С.Суетин.

6 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

След направените забележки в т.4, отчитайки значимостта на теоретичните и приложни резултати както и наукометричните данни, смятам, че са налице препоръчителните критерии и предлагам на Уважаемото жури ДА ПРИСЪДИ образователно научната степен "доктор"на Николай Руменов Икономов.

12. 04. 2016