СТАНОВИЩЕ

от доцент д-р Ваня Христов Хаджийски, ФМИ на СУ „Св.Кл.Охридски”
за дисертацията на мат. Николай Руменов Икономов
„ Апроксимации с рационални функции в комплексната равнина”
за придобиване на образователна и научна степен „доктор”
в областта на висшето образование, Професионално направление:
4.5 Математика, Научна специалност: Математически анализ

Представеният дисертационен труд е в областта на Теорията на апроксимациите на Паде и е съставен от три глави и Библиография с 63 заглавия, с общ обем от 101 страници. Той се основава на 4 научни статии. Две от тях са отпечатани в международни списания с импакт фактор, съответно Compt. rend. Acad. Bulg. Sci. **66**:8 (2013) **IF 0.198** и Изв. РАН Сер. Математика **79**:6 (2015), **IF 0.**630. Една е публикувана в том на международната конференция AMME’2014 и една е дадена за печат в Math. Slovaka **IF 0.409**, като вече има положителна рецензия. Две от работите са съвместни публикации с други математици. Приемам, че приносът на Н. Икономов за получените в тях резултати е равностоен. Ще отбележа още, че по темата на дисертацията, но не включени в нея, авторът е посочил в библиографията още 2 съвместни статии (номера [29] и [30]), които са публикувани в базата за електронни препринти arXiv.

Възникнали като естествен аналог на полиномите на Тейлър през 18-19 век, апроксимациите на Паде се утвъждават като ефективен метод за апроксимиране на аналитични функции чрез рационални функции със свободни полюси през втората половина на 20-ти век, благодарение на привличането на методи от комплексния анализ и теория на потенциала и на бурното развитие на компютърните технологии. Те намират приложение в различни области на физиката, механиката и други науки. Дисертационният труд е посветен на актуални проблеми от теория на апроксимациите на Паде. Свидетелство за това е и фактът, че 24 от цитираните в библиографията публикации са след 2000 г.

Без да бъда изчерпателен, ще изложа накратко съдържанието на представения труд и ще отбележа приносите на докторанта.

Глава 1 е посветена на връзката между скоростта на сходимост на редове от таблицата Паде, на различни обобщения на класическите аппроксимации на Паде, и разпределението на възлите на интерполация. В §1 се разглеждат многоточкови апроксимации на Паде с фиксирана степен на знаменателя. Основният резултат е Теорема 2. Доказано е, че небходимо условие многоточковите апроксимации на Паде да приближават всяка холоморфна в околност на компакт функция с оптимална геометрична скорост е възлите на интерполация да са равномерно разпределени относно равновесната мярка на компакта. Това обобщава резултат на Дж. Уолш в полиномиалния случай. Достатъчността на условието е доказана от А. А. Гончар. В §2 е изложен аналогичен резултат (Теорема 10), за многоточкови аппроксимации на Паде , в които знаменателите са от степен $m_n = o(n/\ln n)$. Това е резултат на Х. Блат и Р. Ковачева (Теорема 10), публикуван в J. App. Th.

2015 г. Тук е предложено друго доказателство. В §3 се разглеждат т.н. обобщени апроксимации на Паде (рационални апроксимации с частично свободни полюси), при които възлите на интерполация и полюсите на апроксимациите на Паде са отделени - принадлежат на два непресичащи се компакта E,F в разширената комплексна равнина. Доказано е (Терема 13, Теорема 18), че необходимо условие за апроксимация на функции холоморфни в околност на E с геометрична скорост е тези точки да са равномерно разпределени относно равновесния заряд на кондензатора (E,F).

Глава 2. е свързана със задачата за изучаване на асимтотичните свойства на полиноми, ортогонални върху отсечка от реалната ос относно комплексно тегло. Тази задача по естествен начин възниква при изучаването на сходимостта на класическите диагонални апроксимации на Паде на функциите от типа на Марков. Основните резултати са Теорема 20 и Теорема 21. При по-слаби предположения за теглото е получена асимтотиката на числителите и на знаменателите на диагоналните апроксимации на Паде на функции от типа на Марков. Получените резултати обобщават класическа теорема на Бернщайн и по-раншни резултати на А. Гончар и С. П. Суетин.

В **Глава 3.** са изложени нови алгоритми за числено пресмятане на класическата апроксимация на Паде, на многоточковата апроксимация на Паде и на съвместната апроксимация на Паде за набор от функции. Приложени са и реализации на тези алгоритми за конкретни функции. Намирането на ефективни алгоритми за пресмятане на апроксимациите на Паде е важно не само за практическото приложение на апроксимациите на Паде. Много от забележителните свойства на тези апроксимации са открити най-напред чрез числени експерименти и след това доказани строго математически. Ще отбележа още, че съвсем наскоро в базата за електронни препринти arXiv е публикувана съвместна статия на докторанта със С.П.Суетин и Р.Ковачева, в която въз основа на числените експерименти (вж. [29] и [30]), използващи алгоритмите разработени от него, са изказани две хипотези за сходимостта на т.н. апроксиманти на Ермит за многозначни аналитични функции (вж. arXiv 1603.03314v1[math.CV], 10.03.2016).

Критични бележки и препоръки. Забележките ми не касаят по същество получените в дисертационния труд резултати. Те са свързани с изложението и то най-вече в Глава 1. Според мен изложението би спечелило, ако основните означения, дефиниции и необходими факти (от теория на потенциала) се изложат в един отделен параграф на Глава 1, а не след формулирането на основните резултати. Ще отбележа и част от забелязаните неточности и печатни грешки.

стр. 6 трети ред отдолу нагоре: k не е естествено число, и трябва да се замени с τ;

стр. 7 При дефиницията на нормализацията на полинома q се появяват множества G и F не въведени преди това; в дефиницията на каноничната област S_σ „=” трябва да се замени с „<”;

стр. 8 В дефиницията на $cap(E)$, $n \to \infty$ да се замени с $z \to \infty$;

стр. 9 В дефиницията на логаритмичния потенциал трябва да се добави изискването μ да е положителна единична мярка (в доказателствата автора го предполага); $U^{\mu}(z)$ е хармонична в $\mathbb{C}\setminus E$, а не в $\overline{\mathbb{C}}\setminus E$; μ_E е равновесната мярка на E, а не „равновесна мярка на разпределението на E", и не е „хармонична мярка"; $I[\mu_E]$ се нарича равновесна константа, а не „интеграл на равновесната енергия"; В Теорема 3. $G(z)$ е функцията на Грийн за неограничената компонента на $\overline{\mathbb{C}}\setminus E$, а не за $\overline{\mathbb{C}}\setminus E$;

стр.11 „балаяж" на български няма смисъл. По добре е „изметане"; в Теорема 7. а) Ако h има..., а не „Ако h запазва...";

стр. 13 Разсъждението, с което се доказва, че (1.5) е изпълнено за цялата редица е неясно и е излишно. От доказаното на стр 12 следва,че единствената „точка" на сгъстяване на редицата от мерки $\{\mu_n\}$ е равновесната мярка μ_E и следователно цялата редица $\{\mu_n\}$ е слабо сходяща към μ_E, което е еквивалентно на (1.5). Това е известен факт и не е тривиален. Авторът го използва и би било добре да изложи доказателство, разбира се само на тази част, че от $\mu_n \to \mu_E$ следва (1.5) (при условие, че носителите на μ_n са равномерно ограничени, което в конкретния случай е изпълнено), или поне да посочи съответна литература.

стр. 14 Теорема 9.: Понятие „многократна съществена особеност" няма. Това е особена точка от многозначен характер (или точка на разклонение);

стр. 20 ред 8, отгоре надолу: $E \subset \mathbb{C}$ е произволен компакт, не непременно „континуум"(Под континуум се разбира свързан компакт.);ред 9 отдолу нагоре; k не естествено число, и трябва да се замени с τ;

стр. 23 ред 2. отгоре надолу :„необходимо" трябва да се замени с „достатъчно"; ред 3 отдолу нагоре: „...някаква функция... има точна максимална сходимост към редица от полиноми..." – няма смисъл.

Посочените неточности са лесно отстраними и не влияят на положителното ми впечатление от дисертацията.

Авторефератът е написан според изискванията и пълно и точно отразява приносите на дисертанта.

Заключение. Считам, че изследванията на автора са в една актуална и перспективна област на математиката и нейните приложения и представеният дисертационен труд удовлетворява изискванията на ЗРАСРБ, Правилника за неговото прилагане, и съответните правилници на БАН и на ИМИ на БАН за придобиване на научна и образователна степен „доктор". Ето защо предлагам на Уважаемите членове на Научното жури да предложат на Научния съвет на Института по Математика и Информатика на БАН да присъди на мат. Николай Руменов Икономов, образователната и научна степен „доктор" в областта на висшето образование, Професионално направление: 4.5 Математика. Научна специалност: Математически анализ.

София
04.04.2016 г.

Подпис: ....
/доц. д-р В.Хаджийски/