Авторска справка на Николай Николов

Представените статии за конкурса са с номера от 1 до 28 в литературата накрая и са писани след хабилитацията на автора.

Почти всички от тях са в областта на многогомерния комплексен анализ. По-голямата част са свързани със свойствата на различни инвариантни функции и техните инфинитезимални форми, наречени (псевдо)метрики, а друга част са посветени на геометрията на различни важни области в $\mathbb{C}^n$.

Един от най-красивите и важни резултати в класическия комплексен анализ е теоремата на Риман, която гласи, че с изключение на комплексната равнина, всяка едносвързана област е бихоломорфна на единичния кръг $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$. От друга страна, още А. Поанкаре (1907 г.) забелязва, че групите от (холоморфни) автоморфизми на полидиск и кълбо в $\mathbb{C}^2$ не са изоморфни и следователно тези две топологично еквивалентни области не са бихоломорфно еквивалентни. Ето защо е важно с всяка област $D \subset \mathbb{C}^n$ да бъдат свързани бихоломорфно инвариантни обекти. Обобщавайки лемата на Шварц–Пик, К. Каратеодори (1926 г.) дефинира първия такъв обект, различен от групата от автоморфизми, наречен по-късно псевдоразстояние на Каратеодори. Малко по-късно Ст. Бергман (1933 г.) започва да се занимава с възпоризвеждащото ядро на хилбертовото пространство от холоморфните функции в D с интегруем квадрат, с което естествено се свързват ермитова метрика и разстояние (по-късно и трите инварианти са наречени на негово име). С. Кобаяши (1967 г.) въвежда псевдоразстояние, двойствено в известен смисъл на псевдоразстоянието на Каратеодори. По-точно, то е най-голямото псевдоразстояние, което не надминава т. нар. функция на Лемперт.

Да отбележим още, че точното пресмятане на някои от инвариантите или намирането на оценки за тях води например и до критерии за разрешимост на съответни интерполационни задачи или до ограничения за тази разрешимост. Част от статиите са (частично) мотивирани от два актуални примера на такива задачи.

Първо ще направим преглед на статиите, включени в дисертацията на автора за д.м.н., които ще разделим както там.

1. Основни свойства на инвариантни функции и метрики.

Ще направим преглед на 8 статии.

Функцията на Лемперт l_M на произволно комплексно многообразие е най-голямата холоморфно свиваема функция (т.е. намаляваща при холоморфни изображения), която върху единичния кръг $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ съвпада с разстоянието на Мьобиус $m_{\mathbb{D}}$ (с други думи, инфимумът на разстоянието на Мьобиус между прообразите на две точки от D при произволно холоморфно изображение от $\mathbb{D}$ в D). Функцията на Кобаяши k_M^* е най-голямото псевдоразстояние, което не надминава l_M, а функцията на Каратеодори c_M^* е най-малката холоморфно свиваема функция (т.е. най-голямото разстояние на Мьобиус между образите на две точки от D при всевъзможните холомофни изображения от D в $\mathbb{D}$). Тогава $k_M = \tanh^{-1} k_M^*$ и $c_M = \tanh^{-1} c_M^*$ са (псевдо)разстоянията съответно на Кобаяши и Каратеодори (те съвпадат върху $\mathbb{D}$ с разстоянието на Поанкаре $p_{\mathbb{D}}$). (Псевдо)метриките на Кобаяши κ_M, Кобаяши–Буземан $\widehat{\kappa}_M$ и Каратеодори γ_M са инфинитезималните форми съответно на l_M, k_m и c_M. Естествено възникват функциите на Лемперт $k_M^{(m)}$ от по-висок ред, които се намират между $\tanh^{-1} l_D (= k_M^{(1)})$ и $k_M = (= k_M^{(\infty)})$, и техните инфинитезимални форми – метриките на Кобаяши $\kappa_M^{(m)}$ от по-висок ред.

В статията [14] е отбелязано, че разглежданите обекти са полунепрекъснати отгоре, а основният резултат там е

Теорема 1. *Ако $D \subset \mathbb{C}^n$ е хиперболична област в z (т.е. $k_D(z,w) > 0$ за $\forall w \neq z$) и κ_D е непрекъсната в (z, X), то*

$$\kappa_D(z;X) = \lim_{t\to 0, w\to z, Y\to X} \frac{l_D(w, w+tY)}{|t|}.$$

(ii) Ако κ_M е непрекъсната и положителна в (z, X) за всяко $X \neq 0$, то при $m = \mathbb{N} \cup \infty$,

$$\kappa_D^{(m)}(z;X) = \lim_{t\to 0, w\to z, Y\to X} \frac{k_D^{(m)}(w, w+tY)}{|t|}.$$

Теоремата остава вярна за комплексни многбразия (при стандартните изменения в границите). Примери показват, че условията в нея са съществени. Теорема 1 обобщава резултати на М.-Й. Панг [72] и М. Кобаяши [57], които се отнасят за монтелеви многообразия (области) (т.е. $\mathcal{O}(\mathbb{D}, M)$ е нормално семейство).

Доказателството използва следното общо

Твърдение 2. $\kappa_D(z;X) \geq \limsup_{t\to 0, w\to z, Y\to X} \frac{l_D(w, w+tY)}{|t|}.$

В статията [17] са установени връзки между функциите на Минковски на балансирана област или нейната изпъкнала обвивка/обвивка на холоморфност и (част от) дефинираните по-горе бихоломорфни инварианти на областта, когато единият от техните аргументи е началото. Някои от тези връзки са използвани и в други статии.

В статията [8] е доказана следната

Теорема 3. *За всяка област $D \subset \mathbb{C}^n$ имаме, че*

$$\kappa_D^{(2n-1)} = \widehat{\kappa}_D.$$

От друга страна, ако $n \geq 2$ и

$$D_n = \{z \in \mathbb{C}^n : \sum_{j=2}^{n} (2|z_1^3 - z_j^3| + |z_1^3 + z_j^3|) < 2(n-1)\},$$

то

$$\kappa_{D_n}^{(2n-2)}(0;\cdot) \neq \widehat{\kappa}_{D_n}(0;\cdot).$$

Подобен резултат за $2n$ вместо $2n-1$ (която е най-добрата константа според горната теорема) се съдържа в работата [58] на С. Кобаяши (където се въвежда $\widehat{\kappa}_M$).

Доказателството показва, че Теорема 3 остава в сила и за произволно n-мерно комплексно многообразие.

В статията [9] е доказано общо твърдение за апроксимация и интерполация върху т. нар. множества на Аракелян. За целта се привлича известен интерполационно-апроксимационен резултат на Готие–Хенгартнер [48] и А. Нерсесян [67].

Това твърдение не е в областта на многомерния комплексен анализ, но е в основата на доказателството на Теорема 4 по-долу от статията [5], според която т. нар. обобщена функция на Лемперт (на дадена област) не намалява при добавяне на полюси. Последното е доказано от Фр. Викстрьом [78] в случая на изпъкнала област и е поставено от него като въпрос в [79] за общия случай.

По-точно, нека $p \gneq 0$ е функция върху област $D \subset \mathbb{C}^n$, $|\boldsymbol{p}| = \{a \in D : \boldsymbol{p}(a) > 0\}$ и $l_D(\boldsymbol{p},\cdot)$ е функцията на Лемперт на D с полюси върху $|\boldsymbol{p}|$ (като $p(a)$ е теглото на полюса $a \in |\boldsymbol{p}|$). В сила са следните твърдения.

Теорема 4. $l_D(\boldsymbol{p},\cdot) = \inf\{l_D(\boldsymbol{p}|_B,\cdot) : B \subset |\boldsymbol{p}|,\ 0 < \#B < \infty\}$.

В частност, $l_D(\boldsymbol{p},\cdot) = \inf\{l_D(\boldsymbol{p}|_B,\cdot) : \varnothing \neq B \subset |\boldsymbol{p}|\}$.

Следствие 5. *Ако* $0 \lneq \boldsymbol{p} \leq \boldsymbol{q}$, *то* $l_D(\boldsymbol{q}, \cdot) \leq l_D(\boldsymbol{p}, \cdot)$.

В статията [3] се дискутира декартовото свойство на обобщената функция на Лемперт с цел опровергаване на хипотеза на Д. Коман [40] за равенство между тази функция и обобщената плурикомплексна функция на Грийн. В основното твърдение там е намерено необходимо и достатъчно условие функцията на Лемперт на бидиска с (фиксиран аргумент и) полюси в декартовото произведение на две двуелементни подмножества на $\mathbb{D}_* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ да е равна на всяка от съответните функции на $\mathbb{D}$.

В "едномерната" статия [1] е доказана слаба локализация за ядрото и метриката на Бергман на равнинна област с неполярно допълнение. Това е възможно най-общия резултат за не непременно ограничени равнинни области. В случая на ограничена псевдоизпъкнала област тази теорема се съдържа във фундаменталната работа [50] на Л. Хьормандер като приложение на получените L^2-оценки за $\overline{\partial}$-задачата.

Накрая на този раздел ще отбелжим, че възможността за локализация на различни инварианти е тясно свързана с локалната геометрия на областта. Като се използва частично този подход, в статията [16] се дават отговори на въпроси кога локалната валидност на различни свойста (монтелевост, хиперизпъкналост, k-пълнота; k е разстоянието на Кобаяши) около всяка гранична точка (възможно и безкрайната) влече глобално съответните свойства. Приведени са и различни (контра)примери. Също така е намерено необходимо и достатъчно условие за k-хиперболичност на обобщени области на Харгогс, което отговаря положително на въпрос на М. Ярницки и П. ПФлуг [55].

2. Симетризираният полидиск и спектралното кълбо

Този раздел включва 11 статии.

За да разберем по-добре геометрията на т. нар. симетризиран полидиск (на който ще се спрем по-късно) са нужни различни понятия за комплексна изпъкналост на области и връзките между тях, които са подробно дискутирани в [33, 51] заедно с разнообразни приложения. Ще отбележим само, че $\mathbb{C}$-изпъкналостта е тясно свързана с важни свойства на трансформацията на Фантапе и, като дълбоко следствие, с въпроса за разрешимостта на линейни частни диференциални уравнения в класа на холоморфните функции. Една област $D \subset \mathbb{C}^n$ се нарича $\mathbb{C}$-изпъкнала, ако всяко нейно непразно сечение с комплексна права е свързано и едносвързано. Други понятия за комплексна изпъкналост на D са линейната (през всяка точка от допълнението на D минава комплексна хиперравнина, непресичаща D), слабо линейната (същото, но за точките от ∂D) и слабо локално линейната. $\mathbb{C}$-изпъкналостта влече слабата линейна изпъкналост, а всичките четири понятия съвпадат за ограничени области с $\mathcal{C}^1$-гладки граници. В общия случай те се "намират" между изпъкналостта и псевдоизпъкналостта.

Частен случай на резултат в от статията [18] дава положителен отговор на въпрос на Д. Жаке [54, p. 58].

Твърдение 6. *Всяка слабо локално линейно изпъкнала област е псевдоизпъкнала.*

Следващите няколко резултата се съдържат в статията [13].

Първият от тях допълва горното твърдение.

Твърдение 7. *Всяка слабо линейно изпъкнала балансирана област $D \subset \mathbb{C}^n$ е изпъкнала.*

Това усилва същото наблюдение за пълни Райнхардови области в [33, Example 2.2.4].

Резултатът по-долу обобщава резултат на Т. Дж. Барт в [34] за изпъкнали области, като доказателството използва по-нетривиални факти.

Теорема 8. *Нека D е $\mathbb{C}$-изпъкнала област в $\mathbb{C}^n$.*

Ако D съдържа комплексна права, то тя е декартово произведение на $\mathbb{C}$ и друга $\mathbb{C}$-изпъкнала област.

Ако D не съдържа комплексна права, то тя D е бихоломорфна на ограничена област и е c-крайно компактна, значи и c-пълна (c е разстоянието на Каратеодори). В частност, D е хиперизпъкнала, значи и монтелева.

Сега да означим с $\mathcal{L}$ класа от области D, за които най-малката и най-голямата инвариантни функция на D (от гледна точка на комплексния анализ), функциите на Каратеодори c_D^* и Лемперт l_D, съвпадат (в частност, те съвпадат с функцията на Кобаяши k_D^*).

Наскоро Д. Жаке [53] доказа, че всяка ограничена $\mathbb{C}$-изпъкнала област с $\mathcal{C}^2$-гладка граница може да бъде изчерпана $\mathbb{C}$-изпъкнали области с $\mathcal{C}^\infty$-гладки граници. Тогава фундаменталната теорема на Л. Лемперт [61, 62] може да бъде формулирана така:

Всяка ограничена $\mathbb{C}$-изпъкнала област с $\mathcal{C}^2$-гладка граница е от класа $\mathcal{L}$.

Това свойство се пренася и върху изпъкналите области понеже те могат бъдат изчерпани с гладки (даже строго) изпъкнали области. Отворен беше дали въпросът ограничените псевдоизпъкнали области от $\mathcal{L}$ са бихоломорфни на изпъкнали области [84, 55]. Неотдавна беше намерен контрапример, т. нар. симетризиран бидиск $\mathbb{G}_2 \subset \mathbb{C}^2$ – образът на бидиска $\mathbb{D}^2$ при изображението с координатни компоненти двете елементарни симетрични функции на две комплексни променливи. Тази област възниква във връзка със спектралната задача на Неванлина–Пик, която е свързана с проблеми от теория на контрола и приложения в инженерната математика (вж. напр. [29, 31, 52] и литературата там).

Дж. Аглер и Н. Янг [30] показаха, че $\mathbb{G}_2 \in \mathcal{L}$, като пресметнаха $l_{\mathbb{G}_2}$. От друга страна, К. Костара [42] доказа, че $\mathbb{G}_2$ не е бихоломорфна на изпъкнала област. Нещо повече, да означим с $\mathcal{E}$ класа от области, които могат да бъде изчерпана с области, бихоломорфни на изпъкнали области. От теоремата на Лемперт следва, че $\mathcal{E} \subset \mathcal{L}$. А. Едигарян [44] показа, че даже $\mathbb{G}_2 \notin \mathcal{E}$.

В тази насока и споменатия резултат на Д. Жаке ще отбележим следната

[84, Задача 2], хипотеза на Л. А. Азейнберг [32] *Всяка ли ограничена $\mathbb{C}$-изпъкнала област може да бъде изчерпана с гладки $\mathbb{C}$-изпъкнали области?*

По подобен начин на $\mathbb{G}_2$ може да се дефинира и симетризирания полидиск $\mathbb{G}_n \subset \mathbb{C}^n$ – образът на полидиска $\mathbb{D}^n$ при изображението с координати елементарните симетрични функции на n-те променливи.

Първата част на следващата теорема, която се съдържа пак в статията [13] ни казва, че или хипотезата на Айзенберг не е вярна, или фактът, че $\mathbb{G}_2 \in \mathcal{L}$ директно следва от теоремата на Лемперт (и резултата на Д. Жаке).

Теорема 9. *(i) $\mathbb{G}_2$ е $\mathbb{C}$-изпъкнала област.*

(ii) $\mathbb{G}_n$, $n \geq 3$, е линейно изпъкнала област, но не е $\mathbb{C}$-изпъкнала.

Да отбележим, че наскоро (повлияни от тази теорема) П. Пфлуг и В. Звонек [74] доказаха хипотезата на Айзенберг за $\mathbb{G}_2$.

Тези резултати е в унисон с един по-слаб вариант на горната хипотеза, а именно

[84, Задача 4'] *Всяка ли ограничена $\mathbb{C}$-изпъкнала област е от класа $\mathcal{L}$?*

Положителният отговор на Задача 4' би следвал от този на

[84, Задача 4] *Всяка ли ограничена $\mathbb{C}$-изпъкнала област е бихоломорфна на изпъкнала област?*

Тези две задачи са поставени от С. В. Знаменски и П. Пфлуг.

Теорема 9 (i) заедно с резултата на Едигарян дават отрицателен отговор на въпроса от последната задача.

От друга страна, Теорема 9 (ii) дава първото различие между $\mathbb{G}_n$ при $n \geq 3$ и $\mathbb{G}_2$.

Друго, и то съществено различие, следва от отрицателния отговор (който даваме) на следния въпрос на М. Ярницки и П. Пфлуг.

[55, Problem 1.2] *Дали* $\mathbb{G}_n \in \mathcal{L}$ *и даже* $\mathbb{G}_n \in \mathcal{E}$*?*

Ясно е, че ако $\mathbb{G}_n \notin \mathcal{L}$, то $\mathbb{G}_n \notin \mathcal{E}$.

Хронологично първо в статията [7] е показано, че

Теорема 10. $\mathbb{G}_n \notin \mathcal{E}$ *при* $n \geq 3$.

За доказателството на този факт подходът от [42, 44] е пренесен върху т. нар. обобщени балансирани области. За целта в основното твърдение от [7] е доказано, че ако една такава област в $\mathbb{C}^n$ принадлежи на $\mathcal{E}$, то нейно сечение със специално линейно подпространство на $\mathbb{C}^n$ е непременно изпъкнало (подходът там е използван по-късно и от други автори – вж. напр. [59, 82]). Това се съгласува с факта, че (обичайна) балансирана област е от класа $\mathcal{E}$ точно когато е изпъкнала. Теорема 10 следва от споменатото основно твърдение, като се покаже, че съответните сечения за $\mathbb{G}_n$ не са изпъкнали.

Да отбележим още, че $\mathbb{G}_n$ при $n \geq 3$ е линейно изпъкнала област, но не е $\mathbb{C}$-изпъкнала съгласно Теорема 9 (ii) по-горе.

Теорема 10 може да се получи и от

Теорема 11. *Ако* $n \geq 3$, *то*

$$l_{\mathbb{G}_n}(0,\cdot) \gneq k^*_{\mathbb{G}_n}(0,\cdot) \geq c^*_{\mathbb{G}_n}(0,\cdot)$$

В частност, $\mathbb{G}_n \notin \mathcal{L}$ *при* $n \geq 3$.

За целта в основната теорема от статията [10] се оценяват инфинитезималните форми на $c_{\mathbb{G}_n}$, $l_{\mathbb{G}_n}$ и $k_{\mathbb{G}_n}$, а именно съответно метриките на Каратеодори, Кобаяши и Кобаяши–Буземан: $\gamma_{\mathbb{G}_n}$, $\kappa_{\mathbb{G}_n}$ и $\widehat{\kappa}_{\mathbb{G}_n}$. Привлечено е и още едно естествено възникващо разстояние $m_{\mathbb{G}_n}$ върху $\mathbb{G}_n$ (аналог на разстоянието на Мьобуис $m_{\mathbb{D}}$) и неговата инфинитезимална форма в началото – ρ_n. Показано е, че за разлика от случая $n = 2$, при $n \geq 2$ имаме, че

$$c^*_{\mathbb{G}_n}(0,\cdot) \gneq m_{\mathbb{G}_n}(0,\cdot), \quad \gamma_{\mathbb{G}_n}(0,\cdot) \gneq \rho_n.$$

Горните резултати и въведената функция ρ_n се използват съществено в работата [36] на Г. Бхарали.

В работата [30] на Аглер–Янг е доказано, че

$$l_{\mathbb{G}_2} = k^*_{\mathbb{G}_2} = c^*_{\mathbb{G}_2} = m_{\mathbb{G}_2},$$

като за целта $m_{\mathbb{G}_2}$ е (почти) явно пресметнато. Доказателството се базира на метода на комплексните геодезични; тяхното пълно описание за $\mathbb{G}_2$ може да се намери в работата [73] на П. Пфлуг и В. Звонек.

В [43] това равенство е получено и за някои специални двойки точки от $\mathbb{G}_n$, $n \geq 3$. В този случай обаче, съгласно резултат в [10], се оказва, че

$$l_{\mathbb{G}_n}(0, \cdot) \gneq k^*_{\mathbb{G}_n}(0, \cdot) \geq c^*_{\mathbb{G}_n}(0, \cdot) \gneq m_{\mathbb{G}_n}(0, \cdot).$$

Тези неравенства се получават директно от съответните неравенства между инфинитезималните форми, които основно се разглеждат върху координатни направления.

В твърдение от статията [12] е получена оценка, която показва доколко количествено се различават $\gamma_{\mathbb{G}_{2n+1}}(0; \cdot)$ и ρ_{2n+1} по първото направление, където не съвпадат. Тази оценка се базира на едно "полиномиално" описание на $\gamma_{\mathbb{G}_n}$. С помощта на това описание и компютърни изчисления е показано, че

$$\widehat{\kappa}_{\mathbb{G}_3}(0; \cdot) \neq \gamma_{\mathbb{G}_3}(0; \cdot)$$

и значи метриките на Каратеодори и Кобаяши не съвпадат върху $\mathbb{G}_3$. Може да се предполага, че подходът от доказателството е приложим и за по-големите размерности.

Това, че $\mathbb{G}_n$ при $n \geq 3$ има твърде различни свойства от $\mathbb{G}_2$ се потвърждава и от статията [6], където е даден положителен отговор на следния въпрос на М. Ярницки и П. Пфлуг.

[55, Problem 3.2] *Дали (за разлика от $\mathbb{G}_2$) ядрото на Бергман на $\mathbb{G}_n$ има нули?*

Теорема 12. *$\mathbb{G}_n$ при $n \geq 3$ не е област на Лу Ки-Кенг, т.е ядрото на Бергман има нули.*

Доказателството се базира на явна формула, получена от А. Едигарян и В. Звонек в [45].

Както отбелязахме, симетризираният полидиск възниква във връзка със спектралната задача на Неванлина–Пик, т.е. интерполационна задача от единичния диск $\mathbb{D}$ в спектралното кълбо Ω_n – множеството от комплексните $n \times n$ матрици със спектрален радиус, по-малък от 1 (т.е. със собствени стойности в $\mathbb{D}$). Инфинитезималната форма на тази задача е спектралната задача на Каратеодори–Фейер. Най-лесните варианти на тези задачи се свеждат до намирането съответно на l_{Ω_n} и κ_{Ω_n}, а непрекъснатата им зависимост от данните – до непрекъснатостта на тези две функции. В случая на циклични матрици (т.е. имащи цикличен вектор) те съвпадат със съответните функции на монтелевата област $\mathbb{G}_n$ (и значи са непрекъснати). Това позволява в случая на циклични матрици горните две задачи (които са върху Ω_n) да бъдат редуцирани до съответните същи задачи (с корен квадратен по-малко параметри!) върху $\mathbb{G}_n$).

В случай на нециклични матрици и $n = 2, 3$ резултатите от статията [25] описват напълно съответните интерполационни задачи върху $\mathbb{G}_n$, до които се редуцират споменатите две спектрални задачи.

В статията [15] са намерени необходими и достатъчни условия за непрекъснаттоста на l_{Ω_n} и κ_{Ω_n}, когато единият аргумент е скаларна матрица. Резултати оттам съществено се изполват за доказателство на основния резултат в статията [22], а именно

Теорема 13. *Ако $A \in \Omega_n$, то $l_{\Omega_n}(A, \cdot)$ е непрекъсната функция тогава и само тогава, когато A е скаларна матрица или A е 2×2 циклична матрица с равни собствени стойности.*

В статията [16] се изследват нулите на κ_{Ω_n} (като една от целите подетайлно изучаване на (не)прекъснатостта на тази функция). В частност, намерени са всички матрици $A \in \Omega_3$, за които $\kappa_{\Omega_3}(A; B) > 0$ при $B \neq 0$ (този въпрос е сравнително лесен при $n = 2$).

Последните няколко резултата са използвани и продължени в различни насоки от други автори – вж. напр. [76, 77].

Като приложение на предишните разглеждания, в статията [24] е показано, че метриката на Кобаяши на псевдоизпъкнала област не е равна на слабата "производна" на функцията на Лемперт в общия случай. Това дава частичен положителен отговор на въпрос от статията [14]. Съответният (контра)пример е областта $\widetilde{\Omega}_3 \subset \mathbb{C}^8$ от матриците в Ω_3 с нулева следа.

Твърдение 14. *Съществуват $A, B \in \widetilde{\Omega}_3$ така, че*

$$\kappa_{\widetilde{\Omega}_3}(A; B) \geq \kappa_{\Omega_3}(A; B) > 0 = \limsup_{t \to 0} \frac{l_{\widetilde{\Omega}_3}(A, A + tB)}{|t|}.$$

3. Оценки за инвариантни метрики на $\mathbb{C}$-изпъкнали области

Този раздел се базира само на статията [24], част от резултатите в която пренасят или обобщават резултатите в по-ранната работа на автора [69]. В [24] са получени (по геометричен начин) оценки за метриките на Каратеодори, Кобаяши и Бергман, както и за ядрото на Бергман (върху диагонала), на произволна $\mathbb{C}$-изпъкнала област $D \subset \mathbb{C}^n$, която не съдържа комплексна права, в термините на разстоянието $d_D(z; X)$ от точката $z \in D$ до границата ∂D по направлението $X \in (\mathbb{C}^n)_*$. Тези оценки показват, че трите метрики съвпадат върху такава област с точност до константи, зависещи само от n. Подобни резултати в частния случай на $\mathcal{C}^\infty$-гладка ограничена $\mathbb{C}$-изпъкнала област от краен тип, и то с тежки доказателства, са основните резултати в дисертациите на С. Блумберг [37] и М. Лидер [63]. При това константите в тях зависят от областта. Предишни такива резултати, но за изпъкнали области и със съществен проблем в доказателствата, могат да се намерят в работата [39] на Дж.-Х. Чен и работите [65, 66] на Дж. Д. Макнийл.

Използвайки 1/4-теоремата на Кьобе, получаваме

Твърдение 15. *Нека $D \subset \mathbb{C}^n$ е $\mathbb{C}$-изпъкнала област. Ако $d_D(z; X) < \infty$, то*

$$1/4 \leq \gamma_D(z; X) d_D(z; X) \leq \kappa_D(z; X) d_D(z; X) \leq 1.$$

Двете (абсолютни) константи са точни, като 1/4 може да се замени с 1/2 в случая на изпъкнали области (вж. [35]).

В статията [24] се разискват и основните в многомерния комплексен анализ понятия за тип и мултитип на гладка гранична точка на дадена област. Като приложение на горните и други оценки е доказано

Твърдение 16. *Стандартните и линейните мултитипове на Д'Анжело и на Катлин съвпадат за гладка гранична точка на $\mathbb{C}$-изпъкнала област.*

Това обобщава резултати на М. Конрад [41] и Дж. Ю [80] (вж. също работите на Дж. Д. Макнийл [64], и Х. П. Боас и Е. Щраубе [38]), като същевременно доказателството е съществено различно и доста по-кратко. То се базира на несложен резултат от [81] и пренасяне на основния резултат Л. Ли в [60] от изпъкналия в $\mathbb{C}$-изпъкналия случай (при това разсъжденията са по-лесни от тези в [60]).

Основният резултат в статията [24] гласи, че подобни неравенства на тези от са в сила и за метриката на Бергман B_D, като съответните константи зависят само от размерността n на областта D.

Теорема 17. *Съществува константа* $c_n > 0$, *зависеща само от* n, *така, че за всяка* $\mathbb{C}$*-изпъкнала област* $D \subset \mathbb{C}^n$, *несъдържаща комплексна права, е в сила неравенството*

$$1/4 \leq B_D(z;X)d_D(z;X) \leq c_n.$$

Оттук и Твърдение 15 получаваме, че трите разглежданите инварианти метрики за сравними върху такива области в $\mathbb{C}^n$ с точност до константа, зависеща само от n.

Следствие 18. *Съществува константа* $c_n \geq 1$, *зависеща само от* n, *така, че за всяка* $\mathbb{C}$*- изпъкнала област* $D \subset \mathbb{C}^n$, *несъдържаща комплексна права, имаме, че*

$$\kappa_D/4 \leq B_D \leq c_n\gamma_D \geq \kappa_D.$$

Ако D *е изпъкнала област, то константата 4 може да се замени с 1.*

Един от ключовите моменти в доказателството на Теорема 17 е Теорема 19 по-долу, където са получени оценки за ядрото на Бергман $K_D(z)$ (върху диагонала), които имат и самостоятелно значение. Константите в тях зависят само от n и са точни за класа на изпъкналите области. Тези оценки са свързани с т. нар. минимален базис (за точка от дадена област), въведен от Т. Хефер [49] за гладкия случай (от краен тип) и малко по-късно, но независимо, от автора и П. Пфлуг [69] в общия случай. Той се използва и в доказателството на Теорема 17, като почти всички аргументи са геометрични. Тези аргументи се допълват от устойчивостта на $\mathbb{C}$-изпъкналостта при проектиране.

За точка z от област $D \subset \mathbb{C}^n$ да означим с $p_D(z)$ произведението на n-те разстояния от z до ∂D по направления на базисните вектори.

Теорема 19. *Нека* $D \subset \mathbb{C}^n$ *е* $\mathbb{C}$*-изпъкнала област, несъдържаща комплексна права. Тогава*

$$\frac{1}{(16\pi)^n} \leq K_D(z)p_D^2(z) \leq \frac{(2n)!}{(2\pi)^n}.$$

Освен това, оценката отдолу е точна при $n = 1$, *а оценката отгоре е точна за всяко* n *(дори за изпъкнали области), като неравенството е строго при* $n \geq 2$.

В допълнение, ако D е изпъкнала област, несъдържаща комплексна права, оценката отдолу може да се подобри, като числото 16 се замени с 4. В този случай оценката е точна за всяко n.

Накрая ще отбележим, че в споменатите по-горе работи [39, 65, 66], освен $\overline{\partial}$-техника, е използван подобен (но значително по-сложен) подход в термините на базис, който се нарича максимален. В препринта [70] е приведен естествен контрапример за основното "свойство" на този базис, което се използва в тези и в други работи за различни задачи (например за линейния тип и типа на Д'Анжело в цитираната вече работа [64]). От друга страна, в този препринт е показано как получените оценки в термините на минималния базис влекат тези в максималния (като са привлечени и комбинаторни разсъждения).

4. Статии извън дисертацията

Ще проследим 6 статии хронологично.

Статията [2] е продължение на предишна работа на автора [68]. С техники и от теорията на потенциал е доказано, че т. нар. сингулярна функция на Каратеодори съвпада с функцията на Грийн на равнинна област, за която множеството от едноточковите свързани компоненти на чието допълнение образуват полярно множество. Същото е вярно и за съответните инфинитезимални форми – сингулярната метрика на Каратеодори и метриката на Азукава. Както показва общо твърдение там, резултатът не е верен, ако множеството не е полярно, но с нулев капацитет. Доказано е още че т. нар. сингулярна метрика на Кобаяши (в смисъл на Полецки) съвпада с метриката на Азукава върху произволно отворено множество в $\mathbb{C}^n$. Това обобщава (и същевременно коригира доказателството) на резултат на Ст. Нивош [71].

Почти не са известни формули за инвариантни разстояния и метрики на комплексни многообразия с особености. В статията [11] са намерени такива формули за обобщената парабола на Нейл

$$A_{m,n} = \{(z, w) \in \mathbb{D}^2 : z^m = w^n\},$$

където $1 < m < n$ са взаимно прости естествени числа. В частност, показано е, че разстоянието на Каратеодори на $A_{m,n}$ при $m > 1$ не е вътрешно (факт, който не е чест феномен). Статията е мотивирана от работата [56] на Гр. Кнезе за семикубичната парабола ($m = 2$, $n = 3$), а подходът от [11] е използван в по-високи размерности в работата [82] на П. Запаловски.

В статията [19] е установена локалната липшицовост на функцията на Лемперт и плурикомплексната фунцкия на Грийн, както на техните инфинитезимални форми – метриките на Кобаяши и на Азукава, за широки класове от области в $\mathbb{C}^n$, включващи строго псевдоизпъкналите области. За целта са използвани елементи и от теорията на плурипотенциала.

Основният резултат в статията [20] гласи, че ако $D \subset \mathbb{C}^n$ е $\mathcal{C}^{1+\varepsilon}$-гладка ограничена област, то съществува константа $c > 0$ така, че

$$l_D(z, w) \le 1 - c d_D(z) d_D(w), \quad z, w \in D$$

където d_D е разстоянието до ∂D и l_D е функцията на Лемперт. Този резултат обобщава подобен резултат от [47], отнасящ се до разстоянието на Кобаяши и намиращ приложение в продължаването на холоморфни изображения между области в $\mathbb{C}^n$. Приведен е и пример, показващ, че $\mathcal{C}^1$-гладкост не е достатъчна. Доказателството на горната оценка използва детайлно изучаване (което има и самостоятелно значение) на поведението на конформните изборажения между $\mathcal{C}^1$-гладки ограничени едносвързани области в $\mathbb{C}$ и единичния кръг $\mathbb{D}$, когато тези области клонят към дадена ограничена област.

В статията [26] е доказано, че ако a е непсевдоизпъкнала $\mathcal{C}^2$-гладка гранична точка на ограничена област $D \subset \mathbb{C}^n$, то за най-голямата инвариантна метрика $\widetilde{\kappa}_D$ на D с псевдоизпъкнала индикатриса е в сила оценката

$$\widetilde{\kappa}_D(z; X) \sim \frac{|\langle \nabla d(z), X \rangle|}{d(z)^{1/2}} + |X| \quad \text{около } a.$$

Тази метрика е въведена от автора и горната оценка (която е вярна и за метриките на Азукава и Сибони) усилва основния резултат от работата [46] на Дж. Е. Форнес и Л. Ли.

Един от резултатите в статията [27] обобщава факта, че псевдоизпъкналостта е двумерен феномен: едно отворено множество в $\mathbb{C}^n$ $(n \ge 3)$ е псевдоизпъкнала тогава и само тогава, когато всяко негово непразно сечение с двумерна комплексна равнина е псведоизпъкнало. Достатъчността в това твърдение е нетривилна. От друга страна, тя може да бъде отслабена в $\mathcal{C}^2$-гладкия случай. По-точно,

Теорема 20. *Ако дадено $\mathcal{C}^2$-гладко отворено множество в $\mathbb{C}^n$ е такова, че всяко негово сечение с двумерна комплексна равнина през на-*

чалото е псевдоизпъкнало, то и самото множество е псевдоизпъкнало.

Приведен е и пример, който показва, че резултатът престава да бъде в сила, ако гладкостта се наруши даже само в една гранична точка.

5. Други статии

Последните две статии, на които ще се спрем, също са извън дисертацията и са в областта на анализа (но не на комплексния).

В статията [21] се разглеждат т. нар. супермедианни функция – обобщение на суперхармоничните функции, които имат свойството стойностите им във всяка точка да не са по-малки от техните средни стойности върху произволна окръжност с център тази точка. За супермедианните функции това свойство пак е изпълнено за всяка точка, но само за една окръжност с център точката. Подобна е връзката между хармоничните и медианните функции, въведени от Литълууд. Доказано е, че при минимални изисквания за радиуса на окръжнстта, теоремата на Лиувил остава в сила и за супермедианните функции. Нещо повече,

Теорема 21. *Нека* $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ *е такава непрекъсната функция, че*

$$\limsup_{|x|\to\infty} (r(x) - |x|) < \infty, \quad \liminf_{|x|\to\infty} (r(x) - |x|) = -\infty,$$

а $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *е полунепрекъсната отдолу функция, за която*

$$\liminf_{|x|\to\infty} f(x)/\ln|x| \geq 0.$$

Ако средната стойност на f *върху окръжността с център* x *и радиус* $r(x)$ *не надминава* $f(x)$ *за всяка точка* $x \in \mathbb{R}^2$*, то* f *е константа.*

Дадени са различни примери, показващи, че всички условия са съществени. Доказана е и едномерната версия на горната теорема.

В статията [28] е решена напълно една класическа минимаксна задача, а именно за дадено число $\lambda > 0$ и окръжност Γ да се пресметне

$$\min_{A,B,C\in\Gamma} \max_{M\in\Gamma}(MA^\lambda + MB^\lambda + MC^\lambda).$$

Изцяло са решени и задачите за минимум и максимум на сумата $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} MA_i^\lambda$, когато M се мени върху окръжност, концетрична на описаната около даден правилен n-ъгълник $A_1 \dots A_n$. Частни случаи на горните три задачи са решени в работата [75] на К. Столарски.

6. Основни приноси (според автора)

– Намиране на универсални оценки за метриките на Каратеодори, Кобаяши и Бергман, както и на ядрото на Бергман, на произволна $\mathbb{C}$-изпъкнали област, несъдържаща комплексни прави; тези оценки показват, че трите метрики съвпадат с точност до константа, зависеща от размерността на областта.

– Пример на ограничена $\mathbb{C}$-изпъкнала област (симетризираният полидиск), която не може да бъде изчерпана с области, бихоломорфни на изпъкнали области.

– Доказателство, че теоремата на Лемперт не е в сила за симетризирания полидиск в размерност, по-голяма от 2.

– Пълна характеризация на непрекъснатостта на функцията на Лемперт на спектралното кълбо при фиксиран първи аргумент и на нулите на метриката на Кобаяши (при $n \leq 3$), което влече информация за "устойчивост" на спектрални задачи.

– Установяване на монотонноста на обобщената фунцкия на Лемперт при добаване на полюси.

– Намиране на минималния ред на метрика на Кобаяши, която съвпада с метриката на Кобаяши–Буземан.

– Тест за псевдоизпъкналост чрез двумерни сечения през началото.

– Равенство между сингулярната функция на Каратеодори и функцията на Грийн за широк клас равнинни области.

Литература

[1] N. Nikolov, *The completeness of the Bergman distance of planar domains has a local character*, Complex Variables 48 (2003), 705–709.

[2] N. Nikolov, W. Zwonek, *Some remarks on the Green function and the Azukawa pseudometric*, Monatsh. Math. 142 (2004), 341–350.

[3] N. Nikolov, W. Zwonek, *On the product property for the Lempert function*, Complex Variables 50 (2005), 939–952.

[4] N. Nikolov, P. Pflug, *Local vs. global hyperconvexity, tautness or k-completeness for unbounded open sets in* $\mathbb{C}^n$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5), Vol. IV (2005), 601–618.

[5] N. Nikolov, P. Pflug, *The multipole Lempert function is monotone under inclusion of pole sets*, Mich. Math. J. 54 (2006), 111–116.

[6] N. Nikolov, W. Zwonek, *The Bergman kernel of the symmetrized polydisc in higher dimensions has zeros*, Arch. Math. 87 (2006), 412–416.

[7] N. Nikolov, *The symmetrized polydisc cannot be exhausted by domains biholomorphic to convex domains*, Ann. Polon. Math. 88 (2006), 279–283.

[8] N. Nikolov, P. Pflug, *On the definition of the Kobayashi–Buseman pseudometric*, Internat. J. Math. 17 (2006), 1145-1-149.

[9] N. Nikolov, P. Pflug, *Simultaneous approximation and interpolation on Arakelian sets*, Can. Math. Bull. 50 (2007), 123–125.

[10] N. Nikolov, P. Pflug, W. Zwonek *The Lempert function of the symmetrized polydisc in higher dimensions is not a distance*, Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2007), 2921–2928.

[11] N. Nikolov, P. Pflug, *Invariant metrics and distances on generalized Neil parabolas*, Mich. Math. J. 55 (2007), 255–268.

[12] N. Nikolov, P. Pflug, P. J. Thomas, W. Zwonek, *Estimates of the Carathéodory metric on the symmetrized polydisc*, J. Math. Anal. Appl. 341 (2008), 140–148.

[13] N. Nikolov, P. Pflug, W. Zwonek, *An example of a bounded $\mathbb{C}$-convex domain which is not biholomorphic to a convex domain*, Math. Scand. 102 (2008), 149–155.

[14] N. Nikolov, P. Pflug, *On the derivatives of the Lempert functions*, Ann. Mat. Pura Appl. 187 (2008), 547–553.

[15] N. Nikolov, P. J. Thomas, W. Zwonek, *Discontinuity of the Lempert function and the Kobayashi–Royden metric of the spectral ball*, Integr. Equ. Oper. Theory 61 (2008), 401–412.

[16] N. Nikolov, P. J. Thomas, *On the zero set of the Kobayashi–Royden pseudometric of the spectral ball*, Ann. Polon. Math. 93 (2008), 53–68.

[17] N. Nikolov, P. Pflug, *Remarks on Lempert functions on balanced domainsz*, Monatsh. Math. 156 (2009), 159–165.

[18] N. Nikolov, P. Pflug, P. J. Thomas and W. Zwonek, *On a local characterization of pseudoconvex domains*, Indiana Univ. Math. J. 58 (2009), 2661–2671.

[19] N. Nikolov, P. Pflug and P. J. Thomas, *Lipschitzness of the Lempert and Green functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), 2027–2036.

[20] N. Nikolov, P. Pflug and P. J. Thomas, *Upper bound for the Lempert function of smooth domains*, Math. Z. 266 (2010), 425–430.

[21] N. Nikolov, W. Hansen, *One-radius results for supermedian functions on $\mathbb{R}^d$, $d \leq 2$*, Math. Ann. 348 (2010), 565–575.

[22] N. Nikolov, P. J. Thomas, *Separate continuity of the Lempert function of the spectral ball*, J. Math. Anal. Appl. 367 (2010), 710–712.

[23] N. Nikolov, P. Pflug, W. Zwonek, *Estimates for invariant metrics on $\mathbb{C}$-convex domains*, Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011), 6245–6256.

[24] N. Nikolov, P. Pflug, *Kobayashi-Royden pseudometric vs. Lempert function*, Ann. Mat. Pura Appl. DOI: 10.1007/s10231-010-0164-z.

[25] N. Nikolov, P. Pflug, P. J. Thomas, *Spectral Nevanlinna-Pick and Carathéodory–Fejér problems for $n \leq 3$*, Indiana Univ. Math. J. (to appear); http:www.iumj.indiana.edu/IUMJ/forthcoming.php

[26] N. Q. Dieu, N. Nikolov, P. J. Thomas, *Estimates for invariant metrics near non-semipositive boundary points*, J. Geom. Anal. DOI: 10.1007/s12220-011-9255-3.

[27] N. Nikolov, P. Pflug, *Two-dimensional slices of non-pseudoconvex open sets*, Math. Z. DOI: 10.1007/s00209-011-0938-z.

[28] N. Nikolov, R. Rafailov, *On the sum of powered distances to three points*, Pacific J. Math. (to appaer);
http://pjm.berkeley.edu/scripts/coming.php?jpath=pjm
***

[29] J. Agler, N. J. Young, *The two-point spectral Nevanlinna–Pick problem*, Integr. Equ. Oper. Theory 37 (2000), 375–385.

[30] J. Agler, N. J. Young, *The hyperbolic geometry of the symmetrized bidisc*, J. Geom. Anal. 14 (2004), 375–403.

[31] J. Agler, N. J. Young, *The two-by-two spectral Nevanlinna–Pick problem*, Trans. Amer. Math. Soc. 356 (2004), 573–585.

[32] Л. А. Айзенберг, *Линейные функционалы в пространстве аналитических функций и линейная выпуклость в* $\mathbb{C}^n$, В кн.: Исследования по линейных операторам и теории функций: 99 нерешенных задач линейного и комплексного анализа. Записки научных семинаров ЛОМИ, Том 81, Ленинград: Наука, 1978, 29–32.

[33] M. Andersson, M. Passare, R. Sigurdsson, *Complex convexity and analytic functionals,* Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 2004.

[34] T. J. Barth, *Convex domains and Kobayshi hyperbolicity*, Proc. Amer. Math. Soc. 79 (1980), 556–558.

[35] E. Bedford, S. I. Pinchuk, *Convex domains with noncompact groups of automorphisms*, Sb. Math. 82 (1995), 1–20.

[36] G. Bharali, *Some new observations on interpolation in the spectral unit ball*, Integral Equat. Operator Theory 59 (2007), 329–343.

[37] S. Blumberg, *Das Randverhalten der Bergman-Kerns und der Bergman-Metrik auf lineal konvexe Gebieten endlichen Typs*, Dissertation, Universität Wuppertal, 2005.

[38] H. P. Boas, E. Straube, *On equality of line type and variety type of real hypersurfaces in* $\mathbb{C}^n$, J. Geom. Anal. 2 (1992), 95–98.

[39] J.-H. Chen, *Estimates of the Invariant Metrics on Convex Domains*, Ph. D. dissertation, Purdue University, 1989.

[40] D. Coman, *The pluricomplex Green function with two poles of the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, Pacific J. Math. 194 (2000), 257–283.

[41] M. Conrad, *Nicht isotrope Abschätzungen für lineal konvexe Gebiete endlichen Typs*, Dissertation, Universität Wuppertal, 2002.

[42] C. Costara, *The symmetrized bidisc and Lempert's theorem*, Bull. London Math. Soc. 36 (2004), 656–662.

[43] C. Costara, *On the spectral Nevanlinna–Pick problem*, Studia Math. 170 (2005), 23–55.

[44] A. Edigarian, *A note on Costara's paper*, Ann. Polon. Math. 83 (2004), 189–191.

[45] A. Edigarian, W. Zwonek, *Geometry of the symmetrized polydisc*, Arch. Math. (Basel) 84 (2005), 364–374.

[46] J. E. Fornaess, L. Lee, *Kobayashi, CarathJ'eodory, and Sibony metrics*, Complex Var. Elliptic Equ. 54 (2009), 293–301.

[47] F. Forstneric, J. P. Rosay, *Localization of the Kobayashi metric and the boundary continuity of proper holomorphic mappings*, Math. Ann. 279 (1987), 239—252.

[48] P. M. Gauthier, W. Hengartner, *Complex approximation and simultaneous interpolation on closed sets*, Can. J. Math. 24 (1977), 701–706.

[49] T. Hefer, *Hölder and L^p estimates for $\overline{\partial}$ on convex domains of finite type depending on Catlin's multitype*, Math. Z. 242 (2002), 367–398.

[50] L. Hörmander, *L^2 estimates and existence theorems for $\overline{\partial}$ operator*, Acta Math. 113 (1965), 89–152.

[51] L. Hörmander, *Notions of convexity*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1994.

[52] H.-N. Huang, S. A. M. Marcantognini, N. J. Young, *The spectral Carathéodory-Fejér problem*, Integr. Equ. Oper. Theory 56 (2006), 229–256.

[53] D. Jacquet, *$\mathbb{C}$-convex domains with C^2 boundary*, Complex Variables and Elliptic Equations 51 (2006), 303–312.

[54] D. Jacquet, *On complex convexity*, Ph.D. thesis, Stockholm, 2008.

[55] M. Jarnicki, P. Pflug, *Invariant distances and metrics in complex analysis–revisited*, Diss. Math. 430 (2005), 1–192.

[56] G. Knese, *Function theory on the Neil parabola*, Mich. Math. J. 55 (2007), 139—154.

[57] M. Kobayashi, *On the convexity of the Kobayashi metric on a taut complex manifold*, Pacific J. Math. 194 (2000), 117–128.

[58] S. Kobayashi, *A new invariant infinitesimal*, Internat. J. Math. 1 (1990), 83–90.

[59] L. Kosinski, *Geometry of quasi-circular domains and applications to tetrablock*, Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011), 559–569.

[60] L. Lee, *Asymptotic behavior of the Kobayashi metric on convex domains*, Pacific J. Math. 238 (2008), 105–118.

[61] L. Lempert, *Holomorphic retracts and intrinsic metrics in convex domains*, Analysis Mathematika 8 (1982), 257–264.

[62] L. Lempert, *Intrinsic distances and holomorphis retracts*, In: Complex analysis and applications '81 (Varna, 1981), L. Iliev & V. Andreev (eds.), Sofia: Bulg. Acad. Sci., 1984, pp. 341–364.

[63] M. Lieder, *Das Randverhalten der Kobayashi und Carathéodory-Metrik auf lineal konvexe Gebieten endlichen Typs*, Dissertation, Universität Wuppertal, 2005.

[64] J. D. McNeal, *Convex domains of finite type*, J. Funct. Anal. 108 (1992), 361–373.

[65] J. D. McNeal, *Estimates on the Bergman kernels of convex domains*, Adv. Math. 109 (1994), 108–139.

[66] J. D. McNeal, *Invariant metric estimates for $\overline{\partial}$ on some pseudoconvex domains*, Ark. Mat. 39 (2001), 121–136.

[67] A. A. Nersesyan, *Uniform approximation with simultaneous interpolation by analytic functions*, Sov. J. Contemp. Math. Anal., Armen. Acad. Sci. 15, No. 4 (1980), 1–9.

[68] N. Nikolov, *Continuity and boundary behavior of the Carathéodory metric*, Math. Notes 67 (2000), 183–191.

[69] N. Nikolov, P. Pflug, *Estimates for the Bergman kernel and metric of convex domains in* $\mathbb{C}^n$, Ann. Polon. Math. 81 (2003), 73–78.

[70] N. Nikolov, P. Pflug, P. J. Thomas, *On different extremal bases for* $\mathbb{C}$-*convex domains*, arXiv:0912.4828.

[71] S. Nivoche, *Geometric properties of pluricomplex Green function with one and several poles in* $\mathbb{C}^n$, Michigan Math. J. 47 (2000), 33–56.

[72] M.-Y. Pang, *On infinitesimal behavior of the Kobayashi distance*, Pacific J. Math. 162 (1994), 121–141.

[73] P. Pflug, W. Zwonek, *Description of all complex geodesics in the symmetrized bidisc*, Bull. London Math. Soc. 37 (2005), 575–584.

[74] P. Pflug, W. Zwonek, *Exhausting domains of the symmetrized bidisc*, Ark. Mat. DOI: 10.1007/s11512-011-0153-5.

[75] K. Stolarsky, *The sum of the distances to certain pointsets on the unit circle*, Pacific J. Math. 59 (1975), 241–251.

[76] P. J. Thomas, N. V. Trao, *Discontinuity of the Lempert function of the spectral ball*, Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010), 2403-2412.

[77] P. J. Thomas, N. V. Trao, W. Zwonek, *Green functions of the spectral ball and symmetrized polydisc*, J. Math. Anal. Appl. 377 (2011), 624–630.

[78] F. Wikström, *Non-linearity of the pluricomplex Green function*, Proc Amer. Math. Soc. 129 (2001), 1051–1056.

[79] F. Wikström, *Qualitative properties of biholomorphically invariant functions with multiple poles*, Preprint (2004).

[80] J. Yu, *Multitypes of convex domains*, Indiana Univ. Math. J. 41 (1992), 837–849.

[81] J. Yu, *Singular Kobayashi metrics and finite type conditions*, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), 121–130.

[82] P. Zapalowski, *Invariant functions on Neil parabola in* $\mathbb{C}^n$, Serdica Math. J. 33 (2007), 321–338.

[83] P. Zapalowski, *Geometry of symmetrized ellipsoids*, Univ. Iag. Acta Math. XLVI (2008), 105–116.

[84] С. В. Знаменский, *Семь задач о $\mathbb{C}$-выпуклости*, В кн.: Комплексный анализ в совремнной математике. К 80-летию со дня рождения Бориса Владимировича Шабата, Е. М. Чирка (ред.), Москва: ФАЗИС, 2001, стр. 123–131.