**Р Е Ц Е Н З И Я**

от проф. дмн Румен Петров Малеев

(ФМИ на СУ "Св. Кл. Охридски")

на материалите, представени за участие в конкурс за заемане на академичната длъжност **"професор"** по професионално направление 4.5 Математика научна специалност Изследване на операциите 01.01.11.

В конкурса за заемане на академичната длъжност "професор", обявен в Държавен вестник, бр. 30/22.05.2012 г. като кандидат участва доц. д-р Николай Василев Живков, секция "Изследване на операциите", ИМИ БАН.

**1. Кратки биографични данни**

Доц. Живков е завършил математика със специализация по Математическо моделиране във ФММ на СУ през 1977 г. След редовна аспирантура във ФММ на СУ през 1984 г. защитава докторска дисертация. В периода 1983 – 1993 г. е научен сътрудник в ИМИ БАН, а през 1994 е избран за ст.н.с. II ст.

**2. Общо описание на представените материали**

Доц. Живков участва в конкурса с 22 научни статии и 2 научно-приложни публикации. От тях 22 са излезли от печат, една научна статия е приета за публикуване (по-нататък считана за публикувана) и една е предложена за печат (в J. Math. Anal. Appl.). Десет от научните статии са използвани при защитата на докторската дисертация и при хабилитацията. Статиите, публикувани в списания с импакт фактор, са 13 (8 след хабилитацията) с общ **Thomson-Reuters** Импакт-фактор над **6** (над **4** след хабилитацията). Ще изброя някои от списанията:

преди хабилитацията **- J. Optim. Theory, J. Approx. Theory.**

след хабилитацията **- J. Convex Anal., J. Glob. Optim., Monatsh. Math., Abstract Appl. Anal., Israel J. Math., PAMS, Set-Valued Anal.**

От останалите **9** научни статии **6** са публикувани в Доклади БАН и Сердика и в реномирани списания в чужбина, а **3** - в сборници от статии (**2** в чужбина и **1** у нас). Всички статии са на английски език. Самостоятелни са **11** от научните статии и **1** от научно-приложните публикации. Останалите статии са с по един съавтор, а последната статия, предложена за публикуване, е с **4** съавтора.

**3. Обща характеристика на научната, преподавателската и научно-приложната дейност на кандидата.**

Професионалната кариера на доц. Живков от завършването на университета до наши дни протича в секцията Изследване на операциите (по-рано Математическо оптимиране) на ИМИ БАН и е свързана най-вече с научни изследвания. Научните му интереси са в областта на Функционалния анализ – банахови пространства, Теория на апроксимациите, Теория на оптимизацията и Изследване на операциите. Предложените за конкурса статии и статиите, с които е участвал в предишни процедури, го представят като изграден специалист в областта на апроксимациите и банаховите пространства, с утвърден авторитет и признание както у нас, така и сред специалистите в неговата област в чужбина. Бил е координатор на 2 научни проекта, разработвани в периода 1994-1999 г., финансирани от ФНИ на МОНМ, както и на двустранен международен научен проект "Nonlinear Analysis in Banach Spaces" на Университета в Рим "Tor Vergata" и ИМИ БАН. В периода 2003-2011 г. е активен участник в проектите "Genericity and porosity in optimization and nonlinear analysis" и "Variational analysis and its Applications" по ЕБР с Израелския Технологичен институт Technion в Хайфа, Израел. Изнасял е доклади на международни конференции у нас, в Чехия, Германия, Франция, Израел, както и на специализирани семинари в университетите във Виена, Атина, Рим, Хайфа, Букурещ. В рамките на научно-приложната му дейност ще отбележим участието в периода 2005-2008 г. в научно-приложен проект на НАТО "Наука за мир" 981149, както и разработката на компютърни модели : "Prognosis and management of the material supplies during crises", "Estimation of the area of RA contamination and health impact" TACOM CAX 2006.

**3.1. Анализ на научните и научно-приложните постижения на кандидата.**

С няколко изключения работите на доц. Живков са посветени на изследването на изобщо многозначното изображение метрическа проекция, което по зададено (затворено) множество $A$ в метрично пространство $(X,d)$ съпоставя на всяко $x \in X$ множеството от най-близките му относно разстоянието $d$ точки от $A$, т.е.

$$P_A(x) = \{a \in A : d(a,x) = d(x,A) = \inf\{d(x,y) : y \in A\}\},$$

Многобройни изследвания са посветени на изясняване на въпроса за "големината " на множеството

$$Q_P(A) = \{x \in X : P_A(x) = \varnothing \text{ } или \text{ } P_A(x) \text{ } еднозначно\},$$

в което метрическата проекция е немногозначна при предположение, че $X$ е строго изпъкнало, т.е. единичната му сфера не съдържа отсечки. На Стечкин принадлежи хипотеза, според която за всяко строго изпъкнало банахово пространство $X$ множеството на немногозначност $Q_P(A)$ съдържа гъсто $G_\delta$ подмножество на $X$, т.е. е "голямо" от гледна точка на категориите на Бер. Тази хипотеза е потвърдена от самия Стечкин за локално равномерно изпъкнали пространства, а за други класове банахови пространства от Зайчик, Лау, Конягин, Боруейн и Фицджералд.

**Преди хабилитацията** (статии [1-10] от списъка). Голяма част от резултатите са свързани с хипотезата на Стечкин. Ще отбележим най-главните. Доказана е хипотезата на Стечкин за строго изпъкнали слабо компактно породени пространства и за строго изпъкнали асплундови пространства. Получена е характеризация на асплундовите пространства, чрез която се доказва, че хипотезата на Стечкин е вярна в класа от строго изпъкнали банахови пространства, които притежават гъсто подмножество, представляващо линеен непрекъснат образ на асплундово пространство. През 1991 г. Фабиан и Прайс обобщават резултата на кандидата за подпространства на пространствата от този клас, което е и най-общият известен засега резултат. Преди хабилитацията са получени и интересни резултати за диференцируемост по Гато в гъсти $G_\delta$ множества на едностранно диференцируеми непрекъснати изображения. Ще отбележим оригиналният подход на доц. Живков, довел до въвеждането на субдиференциално изображение, междинно в сравнение със субдиференциала на Кларк и този на Екеланд-Лебург. Получена е характеризация на рефлексивните пространства в термините на приближени непрекъснати селекции на крайно-полунепрекъснати отдолу метрически проекции на изпъкнали проксиминални множества. Получени са и резултати , свързани с приближение относно хаусдорфово разстояние на изпъкнали компакти в равнината с многоъгълници. В работа [10] е построено (без използване на категории съображения) компактно множество $K$ в равнината с навсякъде континуално многозначни метрически проекции (във всяко отворено множество в равнината има поне континуум точки, в които $P_A(x)$ е нееднозначна). Доказва се, че $coK$ има аналогичното свойство за антипроекциите $F_A(x)$.

**След хабилитацията** (статии [11-22] от списъка). Споменатата по-горе работа [10] може да се разглежда като конструкция на конкретно компактно множество с метрическа проекция (антипроекция) гъсто множество в $\mathbb{R}^2$. В работа [11] се доказва съществуването в строго изпъкнали банахови пространства с размерност по-голяма от 1 на локално свързани континууми, за които метрическата проекция относно произволна еквивалентна норма е многозначна в гъсто подмножество. Показва се, че съществуването на такива континууми не може да се докаже с категорни методи. Наличието на подмножества от определен клас $P(X)$ на дадено пространство $X$, които притежават многозначна метрическа проекция (антипроекция) в гъсто множество поражда естествения въпрос много ли са подмножествата в класа $P(X)$ с това свойство. Резултати в това направление, предхождащи работите [10-11] на Живков, са получени най-напред от Замфиреску за компакти в $\mathbb{R}^n$, а и в няколко работи на де Блази и Мияк, в работа на Де Блази, Кендеров и Мияк и др. за проекции и антипроекции в различни класове от банахови пространства и за различни класове от подмножества, метризирани с хаусдорфовото разстояние между множества. В [12] се разглежда класа на равномерно изпъкналите банахови пространства $X, \dim X \geq 2$ и класа $B(X)$ на затворените ограничени подмножества на $X$, снабден с хаусдорфовото разстояние между множества. Показва се, че за всяко от множествата от резидуално подмножество на $B(X)$ метрическата проекция е двузначна и полунепрекъсната отгоре в гъсто навсякъде континуално подмножество на $X$. В [13] за строго изпъкнали банахови пространства $X, \dim X \geq 2$ се доказва, че в пространството $K(X)$ на компактните подмножества на $X$ с хаусдорфовото разстояние съществува гъсто $G_\delta$ подмножество от компакти, за всеки от които метрическата и антиметрическата проекции относно произволна еквивалентна строго изпъкнала норма са навсякъде континуално многозначни. Резултатите в [12] и [13] не налагат изискване за сепарабелност на пространството $X$ и обобщават резултати на де Блази и Мияк. В [14] се разглежда класа на сепарабелните строго изпъкнали банахови пространства $X, \dim X > 2$ и класа $B(X)$, като се доказва съществуване на резидуално подмножество на $B(X)$, за всяко множество от което метрическата проекция е двузначна и полунепрекъсната отгоре в гъсто навсякъде континуално подмножество на $X$. По-сложна задача, свързана с изследване на т.н. $n$-локуси

$$L_P^n(A) = \{x \in X : card\, P_A(x)\} = n\}, \quad L_F^n(A) = \{x \in X : card\, F_A(x)\} = n\},$$

т.е. подмножествата на $X$, състоящи се от точки $x$, в които метрическата проекция $P_A(x)$ (антипроекция $F_A(x)$) на затворено (затворено и ограничено) множество $A$ е $n$-значна, е разгледана в [15]. Доказано е, че в пространството на компактите $K(X)$ в крайномерно евклидово или сепарабелно безкрайномерно банахово пространство $X$, метризирано хаусдорфово, при всеки избор на естествените числа $n, m \geq 2, n+m-2 \leq \dim X$ съществува резидуално подмножество $R^{n,m} \subset K(X)$ такова, че за всеки компакт $K \in R^{n,m}$ множеството $L_P^n(K) \cap L_F^m(K)$ е гъсто в $X$. Аналогичен резултат за $n$-локуси за метрическите антипроекции е доказан в [16] за пространството от изпъкналите компакти $C(X)$ в безкрайномерно сепарабелно хилбертово пространство. В [17] пък за всяко $n > 1$ е доказана гъстота на $n$-локусите за метрическата проекция за типичните (в смисъл на беровите категории) компакти от $K(X)$, когато $X$ е безкрайномерно строго изпъкнало гладко банахово пространство.

Друг насока в задачата за метрическата проекция представлява изследването за коректна поставеност на съответната минимизационна задача в множеството $Q_P(A)$ от точките на немногозначност на метрическата проекция. Двойката $(x, A)$ определя добре поставена апроксимационна задача, ако метрическата проекция $P_A(x)$ е еднозначна в $x$, $P_A(x) = a_0$ и всяка минимизираща редица $\{a_n\} \subset A$ клони към $a_0$, т.е. $d(a_n, x) \to d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\} \Rightarrow \{a_n\} \to a_0$. Възникват задачи за изследване на "големината" на множества като:

$$T_P(A)=\{x\in X:(x,A)\ \textit{е добре поставена}\},$$
$$W_P(A)=\{x\in X:P_A(x)=\varnothing\ \textit{или}\ (x,A)\ \textit{е добре поставена}\},$$
$$K_P(A)=\{x\in X:A\ \textit{е апроксимативно компактно в}\ x\}^1,$$
$$V_P(A)=\{x\in X:P_A(x)=\varnothing\ \textit{или}\ A\ \textit{е апроксимативно компактно в}\ x\}.$$

За целта, като се има пред вид голямата условност в оценките за "голямо" и "малко" на категориите на Бер[2] , често се използват по-финни характеристики за "тънкост" , "малкост", въведени с понятията поресто, $\sigma$- поресто, конусно подпряно, $\sigma$- конусно подпряно множество. В двете безспорно силни работи [19], [21] на Живков и Ревалски се въвеждат компактно равномерно изпъкнали пространства и са получени редица нови резултати като:

- Допълнението на множеството $W_P(A)$ за затворени множества $A$ в локално равномерно изпъкнали пространства е $\sigma$- конусно подпряно;
- Допълнението на множеството $V_P(A)$ за затворени множества $A$ в компактно локално равномерно изпъкнали пространства е $\sigma$- конусно подпряно;
- Допълнението на множеството $K_P(A)$ за затворени подмножества $A$ в компактно равномерно изпъкнали пространства е $\sigma$-поресто.

Ще отбележим, че като следствия от тези резултати се получават редица известни теореми на Ердьош, Конягин, Зайчек и на Де Блази, Мияк, Папини. В работа [18] са получени резултати за големината на множества, представляващи обединение на лъчите от точка $x$, които пресичат (не пресичат) $A\setminus\{x\}$ за повечето множества $A$ от различни класове в сепарабелни банахови пространства. Като следствие се получава, че повечето компакти в такива пространства имат гладка изпъкнала затворена обвивка. Работа [20] е посветена на любопитната задача, произхождаща от Витсенхаузен, да се оцени големината на мярката на измерими подмножества на $n$-мерната сфера $S^n$ в евклидовото пространство $\mathbb{R}^{n+1}$, които не съдържат ортогонални вектори. Доказва се, че съществува продължение на попълнението на повърхнинната мярка и измеримо относно продължението подмножество на $S^n$, което не съдържа ортогонални елементи и има допълнение с мярка нула. В [22] се доказва, че свойството компактна равномерна изпъкналост, въведено в [21], съвпада изометрически с $(\beta)$-свойството на Ролевич и е получена характеризация на това свойство, позволяващо дефиниране на $(\beta)$-свойството чрез фамилии от локално-крайни графи.

---

[1] Апроксимативна компактност в $x$ означава , че всяка минимизираща $P_A(x)$ редица притежава сходяща подредица.

[2] Реалната права допуска представяне като обединение на непресичащи се множества, от които едното е от първа категория на Бер, а второто има лебегова мярка 0.

В [23] и [24] са предложени математически формализации на реални задачи за проучване на сценарии на критични ситуации и на моделиране на процеса на дългосрочно планиране за нуждите на войската. Създадени са подходящи модели и са дискутирани възможности за практическото им приложение.

**3.2. Отражение на научните публикации на кандидата в литературата.**

Доц. Живков е представил впечатляващ достоверен списък с намерени цитирания без автоцитати на **17** свои статии, който лесно се сравнява например с базата на Google Scholar. Списъкът съдържа общо **107** цитирания, от които **6** в монографии. От тях всичко **11** са в статии с поне един български автор.

**3.3. Принос на кандидата в колективни публикации.**

Оценявам приноса на кандидата в съвместните му публикации с други автори най-малкото като равностоен, като имам пред вид тематиката и методите, използвани в самостоятелните му работи и успешната му работа с със специалисти от различни страни.

**4. Критични бележки и препоръки на рецензента**

Нямам нито принципни, нито формални забележки по представените материали. Авторската справка вярно и точно, на места излишно скромно, отразява главните приноси на кандидата.

**5. Лични впечатления на рецензента за кандидата и други данни, посочени в чл. 3 на Правилника за прилагането на ЗРАСРБ в ИМИ.**

Познавам доц. Живков от много години като талантлив, задълбочен, скромен и отдаден на работата си, специалист.

**5. Заключение:** Научните публикации на доц. Живков, неговото участие в научни проекти, съвместните му работи със изявени наши и чуждестранни специалисти от различни страни, както и цитируемостта на работите му, го определят като изграден специалист, активно и успешно работещ в динамична област на функционалния анализ, изискваща владеенето на разнообразни топологични и аналитични методи. Кандидатурата му удовлетворява всички изисквания на ЗРАСРБ. **Имайки предвид гореизложеното, предлагам доц д-р Николай Василев Живков да бъде избран за „професор“ по професионално направление 4.5 Математика, научна специалност 01.01.11 Изследване на операциите.**

септември.2012 г. Рецензент:

(проф. Р. Малеев)