

РЕЦЕНЗИЯ

по конкурс за академичната длъжност “Професор”

за нуждите на Институт по математика и информатика, БАН,

обявен в Държавен вестник, брой 69 от 11.08.2023 г.

Област на висше образование: **4. Природни науки, математика и информатика**

Професионално направление: **4.5 Математика**

Научна специалност: **Алгебра (Некомутативни пръстени и алгебри)**

1. Биографични данни. Доцент Петър Василев Данчев е роден в Пловдив (България) през 1970. Защитава дисертация през 2018 г. и оттогава цялата му научна кариера е свързана с БАН. През 2020 г, той защитава дисертация за доктор на науките. Заема последователно академични длъжности: от 2018 г. до 2020 г. е асистент, от 2020 г. до 2021 г. е главен асистент и от 2021 г. досега е доцент. Доцент Данчев участва в няколко национални проекта: от 2019 г. до 2020 г. в проект, ръководен от акад. Веселин Дренски и доц. Иван Чипчаков, финансиран от Фонд „Научни изследвания” на българското Министерство на образованието и науката; през 2020 г. в проект, ръководен от проф. Иво Михайлов и от 2022 г. до 2024 г. в проект, ръководен от проф. Станислав Харизанов, финансиран от Европейския съюз. Той е участвал и в три международни проекта: от 2019 г. до 2021 г. в проект с Унгария, ръководен от акад. Веселин Дренски; от 2022 г. до 2023 г. в проект, озаглавен ”Junta de Andalusia”, финансиран от Университета на Андалусия; от 2023 г. до 2024 г. в проект “Trends in Ring and Module Theory”, финансиран от турското министерство на образованието и науката. Доцент Данчев е автор на 402 статии в реферирани/нереферирани списания, сборници от научни конференции и публикации на университети. Статиите са в периода от 1993 г. до 2024 г.. Първата му публикация е от 3 страници, през 1995 г. има три кратки публикации през 1996 г. една, през 1997 г. четири, през 1998 г. три, през 1999 г. две, през 2000 г. осем, през 2001 г. дванадесет, през 2002 г. осем, през 2003 г. шест, през 2004 г. тринадесет, през 2005 г. шестнадесет, през 2006 г. той има 23 публикации с първа статия със съавтор, а именно с Неделчев, публикувана в Carpathian Journal of Mathematics. Предходните 100 публикации са с един автор. През 2007 г., той има 23 и през 2008 г., той има 28 публикации, където една от тези е със съавтор Неделчев, публикувана в Journal of Advances of Mathematical Studies и една е бележка с P.W. Keef в Archivum Mathematicum (Brno). През 2009 г. той има 25 публикации (две от тях със съавтори Keef и Goldsmith, съответно), през 2010 г. тринадесет публикации (три от тях със съавтор), през 2011 г. двадесет (4 със съавтор), през 2012 г. двадесет и една (4 със съавтори), през 2013 г. и 2014 г. по единадесет. През 2015 г. той има 16 публикации, като една от тях е със съавтор Чипчаков. От 2016 г. до 2019 г. той има 9, 25, 21 и 29 публикации съответно. През 2020 г. той има 13 публикации (5 от тях със съавтори и в престижни списания). През 2021 г. има 13 публикации, главно със съавтор(и) и в престижни списания. През 2022 г. има 12 публикации с различни съавтори. Списъкът за 2023 г. и 2024 г. (приети статии) все още е непълен. Наличието на много съвместни статии в последните 4 години говори за успешно изградена мрежа след постъпването му в БАН. Нещо повече, много от статиите му са в съавторство с различни

автори. Това показва, че доц. Данчев има широка мрежа. Но аз бих препоръчал на кандидатът да намери докторанти и да ги доведе до успешна защита, което ще увеличи неговия научен авторитет в алгебричната общност. Доц. Данчев е член на редколегията на *Turkish Mathematical Journal*.

2 Описание на представените документи. Документацията, представена от кандидата доц. Петър Данчев е в съответствие с изискванията на закона и съпровождащите правила на Института по математика и информатика. Тя съдържа: заявление, че кандидатът желая да кандидатства за позицията Професор; CV; копия от дипломите за магистър, ОНС доктор, доктор на науките и доцент; списък на всички публикации и списък от всички публикации и списък от публикации за конкурса; документ, потвърждаващ научната позиция на кандидата в ИМИ; обява на конкурса в Държавен вестник; доказателства, че кандидатът покрива минималните национални изисквания на закона за позицията професор; списък на цитиранията и списък на цитиранията за участие в конкурса. Доц. Данчев и представил за конкурса 15 статии, 7 без съавтор, 6 с по един съавтор и 2 с по двама съавтори, общо седем различни съавтора: D. D. Anderson, J. Cui, J. P. Bell, T.-K. Lee, A. Cîmpean, E. Garcia, M.G. Lozano. 14 от статиите са публикувани в периода от 2019 г. до 2023 г. Една от статиите е приета в *Ricerche di Matematica* за публикуване през 2024 г. Статиите са силни свързани с областта (не-)комутативни пръстени и алгебри и ги приемам за рецензиране. Статиите са публикувани в следните списания: *Turkish Journal of Mathematics* (1), *Chebyshevskii Sbrnik* (2), *Revista Colombiana de Mathematicas* (1), *Proceedings of the American Mathematical Society* (1), *Journal of Algebra and Its Applications* (2), *Journal of Siberian Federal University* (1) *Russian Mathematics* (1), *Israel Journal of Mathematics* (1), *Journal Algebra & Computation* (1), *Linear and Multilinear Algebra* (1), *Vestnik Udmurskogo Universiteta* (1), *Communications in Algebra* (1) и *Ricerche di Matematica* (1). Искам да отбележа, че *Proceedings of the American Mathematical Society* както и *Communications in Algebra* са списания с висок престиж.

3. Общо описание на научната работа и постиженията на кандидата: Главните научни интереси на доц. Петър Данчев са в областта на теорията на пръстените. В допълнение, той има и работи, посветени на задачи от класическата теория на групите. В алгебрата, теорията на пръстените изучава пръстени, които са алгебрични структури с две бинарни операции събиране и умножение, като тези две операции има свойства, подобни на тези, дефинирани за цели числа. Теорията на пръстените води началото си от алгебричното в алгебричната теория на числата и в теорията на инвариантите. Различни хиперкомплексни числа се интерпретират с матрични пръстени. Пръстените могат да бъдат използвани за решаване на разнообразни задачи в теорията на числата и алгебрата. Едно от най-ранните такива приложения е опитът на Ферма да докаже прочутата теорема за сума на два квадрата. Има и примери на пръстени в топологията и математическия анализ. Ако R е комутативен пръстен, тогава пръстенът от матрици над R е асоциативна алгебра над R , т.нар. матрична алгебра. Важна част от изследванията на кандидата е посветена на изучаването на матричните алгебри. Матричните алгебри са една от фундаменталните направления в българската алгебра, например от акад. Веселин Дренски. В момента, много от българските алгебристи в страната и чужбина работят в теория на пръстените и области, използващи теорията на пръстените, съответно. Тук има възможност за обмен на идеи и сътрудничество между доц. Данчев и колеги от групата. Добре известно е, че има много задачи от теорията на пръстените, например тези, зададени от Cahen, Fontana, Frisch и Glaz през 2013 г. От тази гледна точка е естествено

кандидатът да изследва матрици и пръстени, съответно, т.е. матрици с нулев квадрат, диагонални матрици, нилпотентни матрици, почти n -торзионни чисти матрични пръстени, слабо inv -чисти пръстени, силно по-регулярни пръстени (с инволюция) и периодични пръстени.

4. Главни научни и научно-приложни приноси Ще опиша накратко главните резултати съдържащи се в представените публикации на кандидата, както и моята оценка за тях. Ще разделя разглеждането на части в зависимост от различните области, изследвани в публикациите.

а) Представяния на пръстени: В линейната алгебра е класическа задачата да се представи всяка матрица като сума на две матрици с определени свойства. Този въпрос е разгледан в статиите [3, 11, 12] от списъка със статии за конкурса. В [12], доц. Петър Данчев, заедно с двама съавтори, показва, че всяка квадратна матрица над безкрайно поле може да се представи като сума на диагонализуема матрица и нилпотентна матрица от ред по-малък или равен на две. Диагонализуемите матрици са базисни в алгебрата. Една матрица A се нарича диагонализуема, ако съществуват обратима матрица P и диагонална матрица D , такива, че $A = P^{-1}DP$. От друга страна, квадратна матрица A се нарича нилпотентна, ако нейна достатъчно голяма степен е равна на нулевата матрица. Нилпотентните матрици са интересни, защото те са точно матриците с единствена собствена стойност 0. Това означава, че кандидатът е намерил значими представяния. Нещо повече, в случая на крайно поле, такова представяне съществува за 2×2 матрици и за $n \times n$ матрици ($n > 2$), когато полето има по-малко от $n+1$ елемента. Резултатите на кандидата за крайни полета допълват резултатите на Simon Breaz. В кратка бележка е доказано, че всяка $n \times n$ матрица над поле с нечетна характеристика е сума на периодична и нилпотентна матрица от ред 3. Това показва, че резултатите на доц. Петър Данчев са доста дълбоки както са представени в споменатата статия. Нещо повече, кандидатът доказва, че всяка нилпотентна матрица над поле може да бъде представена като сума на потентна матрица и матрица с нулев квадрат в [12]. Тези резултати подобряват резултати на Ayzov, Mukhametgaliev и Shitov. В работата [11] на кандидата е доказано, че всяка матрица е сума на потентна матрица и нилпотентна матрица от ред най-много две, когато радикалът на Джекобсън на пръстена има нулев квадрат. Това е стриктен резултат в сравнение със съществуващите. Нещо повече, този резултат подобрява предишен резултат на кандидата в [3], който е публикуван в Chebyshevskii Sbornik. В статията [7] доц. Петър Данчев завършва резултатите от [11,12]. Всъщност, в [12], радикалът на Джекобсън за пръстена има нулев квадрат, докато в [7] кандидатът разглежда алгебрично затворено поле на просто крайно поле. Пълен отговор на въпроса кога една квадратна матрица над безкрайно поле може да бъде представена като сума на периодична матрица и нилпотентна матрица от ред 2 е даден от кандидата. В статията [4], доц. Петър Данчев доказва, че всяка квадратна матрица над поле е разлика на две идемпотентни матрици. Нещо повече, кандидатът доказва, че всяка квадратна матрица на алгебрически затворено поле е сума на нилпотентна матрица с нулев квадрат и диагонализуема матрица. Този резултат е свързан с предишен резултат на кандидата в [12] за безкрайни полета. Всъщност, в статията [4] се разглежда алгебрически затворено поле и нилпотентната матрица може да бъде указана.

б) Пи-регулярни пръстени: Един пръстен се нарича пи-регулярен, ако подходяща степен на всеки елемент на пръстена и ляво регулярен или дясно регулярен елемент, където елемент x на пръстена се нарича ляво (дясно) регулярен, ако съществува елемент y на

пръстена, такъв, че $x^2y = y$ (съответно, $yx^2 = x$). С други думи, пръстен R е пи-регулярен, ако за всеки a в R съществува естествено число n , за което $a^n R$ се поражда от идемпотент. Ако R е ляво пи-регулярен и дясно пи-регулярен, то R се нарича силно пи-регулярен. Силно пи-регулярните пръстени се изучават почти от 100 години. В работата [1] от списъка за конкурса, кандидатът въвежда обобщение на концепцията на пи-регулярни и силно пи-регулярни пръстени. Доц. Петър Данчев въвежда концепция за регулярност на нил-чист пръстен. Мотивацията на тази нова концепция идва от свойствата на други концепции за пръстени. По мое мнение, за мотивация на нова концепция е необходимо по-голямо фокусиране върху използването на новата концепция, отколкото на препратките към други нови концепции. Главните резултати на статията [4] дават връзки с други изследвани класове от пръстени. Така че, на мен ми се губи силната обосновка на въвеждането на тази нова концепция. Подобна ситуация имаме и в статията [15] на кандидата. Някои техники от статията [1] са за крайни полета. Добре известно е, че крайните полета не са алгебрически затворени. Целта на статията [2] на кандидата е да покаже, че подобрене се възможно чрез усилване на техниките от [1] за случая на алгебрично затворени полета. Всъщност, статията [2] на Петър Данчев е бележка към неговата статия [1], която подобрява някои от предходните му резултати. Изразяването на (нилпотентни) квадратни матрици на (алгебрично затворени) полета в [4] са приложени към вариация на пи-регулярни пръстени.

с) Около теоремата на Джекобсън: Един пръстен R се нарича периодичен ако за всеки елемент a от R съществуват две различни естествени числа m и n , такива, че m -тата степен на a и n -тата степен на a съвпадат. Важен резултат касаещ периодичните пръстени е даден в статията [5] на кандидата. Доц. Данчев заедно с Anderson дава важно обобщение на класическата теорема на Джекобсън: Нека R е пръстен, такъв, че за всеки елемент a съществува естествено число $n > 1$, за което n -тата степен на a съвпада с a . Тогава R е комутативен. Тази теорема е публикувана през 1956 г. от Нейтън Джекобсън. Има няколко доказателства на тази теорема. Няколко автора разглеждат теоремата на Джекобсън от различни гледни точки. Например Susan Montgomery обобщава теоремата за пръстени с инволюция. Доц. Петър Данчев доказва, че пръстенът R е комутативен, ако за всеки елемент a на R съществуват две естествени числа m и n с различна четност, такива, че m -тата степен на a и n -тата степен на a съвпадат. По този начин е доказана комутативността на широк клас от периодични пръстени, което е важен резултат в теорията на пръстените. Едни от най-важните резултати на Джекобсън са теоремите, които описват комутативността на пръстен, което е класическа задача в теорията на пръстените. Това е целта на статията [9] на кандидата. Доц. Петър Данчев заедно с Janson Bell разглеждат алгоритми за решаване дали даден пръстен е комутативен или не. Като инструмент те използват полиномни тъждества в алгебри. Главният резултат в статията [9] на кандидата е теорема, която може да се разглежда като вид машина за прозиводство на теореме за комутативност. Главната теорема в [9] е Теорема 2.5. Тази теорема дава възможност за пълна характеристика на хомогенните мултилинейни полиномни тъждества, които карат пръстен да бъде комутативен. Въпреки че главният резултат изглежда твърде технически, неговите приложения показват важността на тази теорема. По мое мнение, тази статия дава важен принос към изучаването на (не-)комутативните пръстени.

д) Пръстени с инволюция: Един пръстен се нарича пи-ши-пръстен, ако за всяка единица u съществува естествено число n , такова, че $(u^n) - 1$ е нилпотентен елемент. В статията

[6] на кандидата е дадена характеристика на пи-и-пръстени от гледна точка на други пи-и-пръстени. Но най-важният резултат в [6] е характеризиранието на периодични пръстени в Теорема 3.4. Не е трудно да се покаже, че всеки периодичен е силно регуларно нил чист с помощта на Теорема 3.4 на Данчев. Това е пример за важността на Теорема 3.4 от работата [6] на Данчев. Един пръстен R се нарича пръстен с инволюция, ако съществува бинарна операция $*$, която е ендоморфизъм върху R . В теорията на пръстените се изучава версията с инволюция. В статията [6] на кандидата е дадена характеристика на периодичните пръстени с инволюция, която е паралелна на споменатата Теорема 3.4 в същата статия. Получена е и характеристика на пръстени чрез пи-и-пръстени. В [14], доц. Петър Данчев изследва (силно) пи-регуларни пръстени с инволюция. Теорема 2.5 е главният резултат в тази статия. Доказано е, че пръстен с инволюция е пи-регуларен тогава и само тогава, когато съответният пръстен е пи-регуларен и за нилпотентните елементи на или за радикала на Джекобсън следва допълнително условие. Статията [14] на кандидата допринася за подобно изучаване на класове от пръстени с инволюция. Друг клас от пръстени, за който има такива отворени проблеми във версията с инволюция, е класът на слабо *invo*-чисти пръстени. Един пръстен R се нарича слабо *invo*-чист, ако за всеки елемент r на R съществуват елемент v на R , който е самообратим, и идемпотент e в R , такива, че $r = v + e$ или $r + e = v$. Тази концепция е въведена от кандидата преди няколко години. Концепцията на слаба инволюция също е въведена от кандидата в друга статия две години по-късно. Всъщност, казваме, че пръстен R е *invo*-чист със слаба инволюция ако за всеки елемент r на R съществуват елемент v на R с $v^2 = 1$ или $v^2 = -1$ и елемент e , такива, че $r = v + e$. Ако имаме $r = v + e$ или $r + e = v$, тогава пръстенът R се нарича слабо *invo*-чист със слаба инволюция. В работата [13], доц. Петър Данчев характеризира пръстени като директно произведение на три пръстена, идващи от два по два различни класа от пръстени. Този повече или по-малко технически резултат е главният в работата [13] на кандидата.

е) Други свойства на пръстени: Статията [10] е много важна работа на доц. Данчев. В тази работа кандидатът (заедно със съавтора си Tsiu-Kwen Lee от Тайван) изучава n -обобщените комутатори на пръстени и доказва, че ако R е некомутативен прост пръстен и $n > 2$, то всеки n -обобщен лиев идеал на R съдържа ненулев идеал. Най-важният резултат от статията [10] е, че всеки елемент в ненулев n -обобщен лиев идеал има вида $(a_1 \dots a_n) - (a_n \dots a_1)$. Това обобщава резултат на Israel Herstein. Той доказва, че всеки елемент на прост Артинов пръстен е сума на три обобщени комутатора. В работата [10], която се състои от 32 страници и е публикувана в престижното списание "Journal of Algebra and Its Applications" има няколко други много важни резултата, например Теорема 5.1, която показва, че всеки n -обобщен лиев идеал в некомутативен прост пръстен съдържа ненулев идеал, където концепцията за n -обобщен лиев идеал е въведена в статията [10] на кандидата като обобщение на добре известната концепция на лиев идеал. В работата [8], доц. Петър Данчев, заедно със съавтора си A. Simrean, отговаря на въпроси от предходни негови статии. В работата [8], триъгълния пръстен и пълният матричен пръстен над полето с два елемента са описани чрез почти n -торзионни чисти пръстени. Последният е почти m -торзионен чист както в Теорема 2.1 в [8]. Тази теорема не е представена коректно в [8], тъй като m не може да бъде фиксирано. Накрая, кандидатът показва, че пръстенът от $n \times n$ триъгълни матрици е почти чист тогава и само тогава, когато n е степен на 2.

5 Значимост на приносите в науката и практиката. Получените резултати в статиите на кандидата са интересни и стойностни. Те съдържат нова информация за обекти от теорията на пръстените, линейната алгебра и други области на математиката. Резултатите на доц. Петър Данчев често обобщават резултати на други автори. Самите резултати и методите за тяхното получаване могат успешно да бъдат използвани в други изследвания от този вид в бъдеще.

6. Критични бележки и препоръки. Нямам съществени критични бележки към публикациите на кандидата.

7. Лични впечатления от кандидата. Познавам лично доц. Петър Данчев от времето, през което той работеше над своята дисертация за ОНС доктор в ИМИ-БАН, като член на секция по Алгебра и логика и от семинара по алгебра и логика. Представял съм негови статии в списанието “Asian European Journal of Mathematics” след положителни рецензии от експерти. Имам отлични впечатления от него като колега и учен.

Заклучение

В представените научни публикации доц. Петър Данчев е получил интересни резултати в актуални области на теорията на пръстените и линейната алгебра. Повечето от резултатите вече са използвани или могат да бъдат използвани от други изследователи. Някои резултати са публикувани в уважавани списания. Имам пълното основание да предложа доц. Петър Данчев за академичната длъжност “Професор” в област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика, Професионално направление: 4.5 Математика, Научна специалност: Алгебра (Некомутативни пръстени и алгебри).

Благоевград, 8 ноември 2023 г. Рецензент:

(Проф. др. Йорг Копиц, ИМИ-БАН)