Авторска справка

за приносите в научните трудове
на д-р Стою Баров,
представени за участие в конкурс за доцент
в област на висше образование 4. Природни науки, математика и
информатика, професионално направление 4.5. Математика,
научна специалност "Геометрия и топология" (Изпъкнала геометрия в
топологични векторни пространства),
обявен в Държавен вестник, бр. 69 / 11.08.2023 г.

В настоящия преглед ще дискутираме накратко моята научна работа и резултати, които са представени в статиите свързани с конкурса. Работя главно в три научни направления: Обща топология, Теория на селекциите и Геометрична томография/топология. Трябва да кажа, че моята работа в областта на Геометричната топология е много тясно свързана с области в Геометричната томография, Безкрайномерна топология, Теория на мерките, Теория на интегрирането, Изпъкнал анализ, Топология на многообразията. По този начин Геометричната томография е много тясно свързана с изпъкнала геометрия в тополгични векторни пространства.

Моята научна дейност в областта на Геометричната топология/томография е свързана с намирането на важни свойства/характеристики на даден обект/тяло в дадено пространство разполагайки с информация относно проекциите на този обект/тяло върху равнини. В частност, това е свързано с реконструиране на тяло от ренгенови снимки. Проблемът за намиране на важна за обекта информация, базирана на неговите проекции в пространства с малка размерност, е важен в много области на науката. И с времето този въпрос ще придобива все по-голяма важност, особено във времето когато технологиите напредват.

Другата област, Теория на селекциите (свързана с Топология, Анализ, Изпъкналост, Банахови пространства), има общо с намирането на различни видове селекции за дадени многозначни изображения и характеризирането на различни понятия с помощта на селекции.

В този преглед представям 5 научни публикации в областта на Общата топология и останалите 10 (2 в Теория на селекциите и 8 в Изпъкнала геометрия и томография) са свързани с Изпъкнала геометрия в топологични векторни пространства (ТВП).

1. Обща топология

[1] S. Barov, G. Dimov and St. Nedev, On a theorem of H.-J. Schmidt, C. R. Acad. Bulgare Sci., 46, No. 3, (1993), 9-11.

За всяко топологично пространство X нека 2^X да означава множеството на всички непразни и затворени подмножества на X и $cl_X B$ - затворената обвивка на подмножеството B на X в пространството X. Топологичното пространство $2^{X,T}$ е множеството 2^X, снабдено с Тихоновата топология, която се генерира от базата $\{< U >: U \text{ is open}\}$, където $< U >= \{F \in 2^X : F \subset U\}$. Едно топологично пространство X се нарича *HS-пространство*, ако за всяко подпространство A на X, изображението $i_A : 2^{A,T} \rightarrow: 2^{X,T}$, дефинирано чрез формулата $i_A(B) = cl_X B$, за всяко $B \in 2^A$, е непрекъснато изображение. В тази статия ние дискутираме твърдението на Н. Шмидт, а именно, че всяко Хаусдорфово HS-пространство е T_3-пространство. Ние даваме вътрешна характеристика на HS-пространствата и дефинираме клас от пространства, наречен $\mathcal{K}^*$, и показваме, че всяко Хаусдорфово $\mathcal{K}^*$-пространство е нормално, тоест, T_4-пространство.

[2] S. Barov, G. Dimov and St. Nedev, On a question of M. Paoli and E. Ripoli, Bollettino U. M. I. (7), 10-A (1996), 127-141.

За всяко топологично пространство X нека 2^X да означава множеството на всички непразни и затворени подмножества на X и $cl_X B$ - затворената обвивка на подмножеството B на X в пространството X. Топологичното пространство $2^{X,T}$ е множеството 2^X, снабдено с Тихоновата топология, която се генерира от базата $\{< U >: U \text{ is open}\}$, където $< U >= \{F \in 2^X : F \subset U\}$. Едно топологично пространство X се нарича *HS-пространство*, ако за всяко подпространство A на X, изображението $i_A : 2^{A,T} \rightarrow: 2^{X,T}$, дефинирано чрез формулата $i_A(B) = cl_X B$, за всяко $B \in 2^A$, е непрекъснато изображение. В тази статия ние дискутираме твърдението на Н. Шмидт, а именно, че всяко Хаусдорфово HS-пространство е T_3-пространство. В настоящата статия ние даваме частичен отговор на този въпрос. По конкретно: а) даваме вътрешна характеристика на HS-пространствата и показваме, че класът на HS-пространствата е инвариантен по отношение на затворени изображения; b) дефинираме голям клас от пространства, наречени $\mathcal{K}^*$, съдържащи всички Хаусдорфови пространства с изброим характер, където ние отговаряме положително на предположението на Шмидт с) формулираме необходимо и достатъчно условие на твърдението на Шмидт; d) доказваме, че ако X е Хаусдорфово и $\mathcal{K}^*$-пространство, то тогава X е даже нормално просранство (T_4-пространство).

Забележка. Доколкото знам, твърдението на Шмидт се оказва невярно, така че нашите резултати в положителния аспект на въпроса остават актуални.

[3] S. Barov, A note on spaces which are quotient compact-covering s-images of metric spaces, C. R. Acad. Bulgare Sci., 52, No. 5-6, (1999), 11-14.

По отношение на терминологията читателят може да погледне дефинициите в [8]. Ние характеризираме пространствата, които са изброим-компактно-покриващ факторен s-образ на метрично пространство чрез различни видове покрития. Една от тези характеристики се прилага по-късно в статия [8] за да докажем нашата основна теорема.

[4] S. Barov, Some properties of star-countable covers, C. R. Acad. Bulgare Sci., 52, No. 7-8, (1999), 5-8.

Множеството $\mathcal{F}$ от подмножества на пространството X се нарича *звездно-изброимо* ако за всяко $V \in \mathcal{F}$ множеството $\{U \in \mathcal{F} \colon U \cap V \neq \emptyset\}$ е изброимо. Нашият интерес по отношение на звездно-изброимите покрития идва от две посоки. Един нерешен въпрос на Е. Майкъл и К. Нагами (виж [8]) може да се преформулира в термините на точково-изброими покрития. Тук, ние даваме положителен отговор на този въпрос, когато точково-изброимите покрития се заменят от звездно-изброими покрития. Втората посока на интерес е свързана с различни предположения направени за звездно-изброими покрития. Показали сме някои свойства на топологично пространство X, което има определени звездно-изброими покрития. Тези свойства на X не са валидни или не се знае дали са валидни, ако X притежаваше съответните точкови-изброими покрития вместо тези, които са звездно-изброими.

[8] S. Barov, Covers of topological spaces and compact-covering maps, Topology Proceedings, Vol. 30, No. 1, 2006, 1-10.

Едно непрекъснато изображение $f : X \to Y$ е компактно-покриващо (редица-покриващо, изброим-компактно-покриващо, респ.) ако всеки компакт (сходяща редица, изброим компакт, респ.) K в Y е образ на компакт C в X. Изображението $f : X \to Y$ се нарича s-изображение, ако всеки праобраз $f^{-1}(y)$ е сепарабелен. Отправна точка в тази статия е един въпрос на Е. Майкъл и К. Нагами: Дали всеки факторен s-образ на метрично пространство е също компактно-покриващ факторен s-образ на (евентуално друго) метрично пространство? Г. Грюнхаге, Е. Майкъл и Танака показват, че X е факторен s-образ на метрично пространство тогава и само тогава когато X е редица-покриващ факторен s-образ на метрично пространство. Х. Чен отговаря отрицателно на горния въпрос. В светлината на горните резултати, естествено е да попитаме, дали всеки факторен s-образ на метрично пространство е също изброим-компактно-покриващ факторен s-образ на метрично пространство? В тази статия ние даваме положителен отговор на този въпрос.

2. Теория на селекциите

Нека накратко представим основната терминилогия. Едно топологично пространство X се нарича *паракомпактно* (*изброимо паракомпактно*), ако X е Хаусдорфово и във всяко отворено покритие (респ. всяко изброимо отворено покритие) на X може да се впише локално крайно (всяка точка $x \in X$

има околност, която пресича само краен брой от елементите на покритието) отворено покритие. Ако Y е множество тогава 2^Y означава множеството от всички непразни подмножества на Y. Нека X и Y са топологични пространства и нека $\varphi : X \to 2^Y$ е многозначно изображение. Ако $A \subset Y$, то дефинираме $\varphi^{-1}[A] = \{x \in X : \varphi(x) \cap A \neq \emptyset\}$ и означаваме $\operatorname{int} A$ да бъде вътрешността на A в Y. *Геометричната вътрешност* A° на A е вътрешността на A по отношение на афинната обвивка на A. Функцията φ се нарича *полунепрекъсната отдолу* (LSC за кратко) ако за всяко отворено множество O на Y множеството $\varphi^{-1}[O]$ е отворено в X. Една функция $f : X \to Y$ се нарича *селекция* за φ ако $f(x) \in \varphi(x)$ за всяко $x \in X$.

[6] S. Barov and J. J. Dijkstra, On boundary avoiding selections and some extension theorems, Pacific J. Math., Vol. 203, No. 1, 2002, 79-87.

Имаме два основни резултата свързани с непрекъснати селекции, които избягват определени граници на множества в Банахови пространства. Също така, с помощта на относително прости средства обобщаваме някои други резултати на Марк Франц включващи продължения на произведения и непресичащи се фамилии от функции. Всички пространства се предполагат да бъдат напълно регулярни (Тихоновски п-ва). Доказваме две характеристични теореми използвайки непрекъснати селекции избягващи граници на изпъкнали множества.

Теорема 1. *Следните твърдения са еквивалентни:*

(1) *X е нормално и изброимо паракомпактно пространство.*
(2) *За всяко сепарабелно Банахово пространство $\mathbb{B}$, за всяко изпъкнало подмножество C на $\mathbb{B}$, за всяко LSC изображение $\varphi : X \to 2^C$, такова че всяко $\varphi(x)$ е* компактно *и изпъкнало в $\mathbb{B}$, и за всяко $A \subset \varphi^{-1}[\operatorname{int} C]$, което е F_σ-подмножество на X съществува непрекъсната селекция f of φ, такава че $A \subset f^{-1}(\operatorname{int} C) \subset \varphi^{-1}[\operatorname{int} C]$.*
(3) *За всяко сепарабелно Банахово пространство $\mathbb{B}$, за всяко изпъкнало подмножество C на $\mathbb{B}$, за всяко LSC изображение $\varphi : X \to 2^C$, такова че всяко $\varphi(x)$ е* затворено *и изпъкнало в $\mathbb{B}$, и за всяко $A \subset \varphi^{-1}[\operatorname{int} C]$, което е F_σ-подмножество на X съществува непрекъсната селекция f of φ, такава че $A \subset f^{-1}(\operatorname{int} C) \subset \varphi^{-1}[\operatorname{int} C]$.*

Теорема 2. *Следните твърдения са еквивалентни:*

(1) *X е паракомпактно пространство.*
(2) *За всяко Банахово $\mathbb{B}$, за всяко изпъкнало подмножество C на $\mathbb{B}$, за всяка LSC изображение $\varphi : X \to 2^C$, такова че всяко $\varphi(x)$ е затворено и изпъкнало в $\mathbb{B}$, и за всяко $A \subset \varphi^{-1}[\operatorname{int} C]$, което е F_σ-подмножество на X съществува непрекъсната селекция f of φ, такава че $A \subset f^{-1}(\operatorname{int} C) \subset \varphi^{-1}[\operatorname{int} C]$.*

Също така, имаме теорема за продължаване на произведение. Нека $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ и $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0]$.

Теорема 3. *Нека X е нормално пространство и нека A е затворено подмножество на X. Ако $f : A \to \mathbb{R}^+$, $g : A \to \mathbb{R}^+$, и $h : X \to \mathbb{R}^+$ са непрекъснати функции, такива че $f \cdot g = h|A$, то тогава съществуват непрекъснати продължения*

$\hat{f}, \hat{g} : X \to \mathbb{R}^+$ на f и g, такива че $\hat{f} \cdot \hat{g} = h$. Ако, освен това, $g^{-1}(0) \subset f^{-1}(0)$, то тогава може да се осигури в допълнение $\hat{g}^{-1}(0) \subset \hat{f}^{-1}(0)$.

[11] S. Barov, On a characterization of normal and countably paracompact spaces via set-valued selections, Comment. Math. Univ. Carolin. 49, 1 (2008) 45-52.

Тук, в тази част, всички топологични пространства се предполагат да бъдат T_1-пространства. Означаваме с $(\mathbb{B}, \rho)$ Банаховото пространство $\mathbb{B}$ с метрика ρ генерирана от дадената норма на $\mathbb{B}$; $2^{\mathbb{B}}$ означава множеството от всички непразни подмножества на $\mathbb{B}$. За да формулираме основния резултат нека да представим необходимата терминология. За пространството $\mathbb{B}$ ние означаваме $E(\mathbb{B}) = \{A \in 2^{\mathbb{B}} \colon A \text{ is convex and } \dim A < \infty\}$. *Геометричната вътрешност* A° на A е вътрешността на A по отношение на афинната обвивка на A. Отворено кълбо с радиус $\varepsilon > 0$ и център x в дадено метрично пространство се означава с $B(x, \varepsilon)$. Нека да формулираме нашата основна теорема.

Теорема 4. *За T_1-пространство X следните условия са еквивалентни.*

(i) *X е нормално и изброимо паракомпактно.*

(ii) *За всяко сепарабелно Банахово пространство $\mathbb{B}$ и за всяка LSC изображение $\phi : X \to E(\mathbb{B})$, такова че $\dim \phi(x) = \dim \phi(y)$ за всяко $x, y \in X$ съществува непрекъсната селекция f за ϕ, такава че $f(x) \in [\phi(x)]^\circ$.*

(iii) *За всяко сепарабелно Банахово пространство $\mathbb{B}$ и за всяка LSC изображение $\phi : X \to E(\mathbb{B})$, такова че $\dim \phi(x) = \dim \phi(y)$ за всяко $x, y \in X$ съществува непрекъсната селекция f за ϕ, такава че за всяко $x \in X$ съществува околност V_x на x и $\varepsilon_x > 0$, такива че $B(f(y), \varepsilon_x) \cap \phi(y) \subset [\phi(y)]^\circ$ for every $y \in V_x$.*

3. Изпъкнала Геометрия в ТВП и Геометрична Томография

Нека B е затворено множество или в $\mathbb{R}^n$ или в Хилбертово простанство l^2 и нека проекциите на B върху всички равнини с коразмерност k са изпъкнали. Какво може да се каже за B? Какви топологични свойства B притежава? Също така, ние се интересуваме от намирането за всяко затворено и изпъкнало множество B "минимални имитации" C of B, тоест, затворени множества C на B, които имат съшите проекции върху равнини с коразмерност k, при фиксирано k, и имат минимална размерност.

Нека да дефинираме основните понятия за да формулираме след това основните ни резултати. В този преглед $\mathbb{V}$ винаги ще означава сепарабелно реално Хилбертово пространство. Така, че $\mathbb{V}$ е изоморфно или на $\mathbb{R}^n$ или на ℓ^2. Нека B е изпъкнало и затворено в $\mathbb{V}$ и нека $\mathcal{G}_k(\mathbb{V})$ се състои от всички линейни подпространства на $\mathbb{V}$ с размерност k. В $\mathcal{G}_k(\mathbb{V})$ дефинираме естествената топология, това е, топологията дефинирана от Хаусдорфовата метрика. За удобство пишем понякога (виж, например, [13]) само $\mathcal{G}_k$ вместо $\mathcal{G}_k(\mathbb{V})$ когато знаем точно дали $\mathbb{V} = \ell^2$ или $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$. Нека да припомним, че Хаусдорфовата метрика d_{H}, свързана с метриката d на $\mathbb{V}$, между две непразни, затворени и ограничени множества A и B се дефинира по следния начин:

$$d_{\mathrm{H}}(A,B) = \sup\{d(x,A), d(y,B) : x \in B \text{ and } y \in A\}.$$

Дефинираме топология в $\mathcal{G}_k(\mathbb{V})$ чрез метрика ρ в $\mathcal{G}_k(\mathbb{V})$:

$$\rho(L_1, L_2) = d_{\mathrm{H}}(L_1 \cap \mathbb{B}_{\mathbb{V}}, L_2 \cap \mathbb{B}_{\mathbb{V}}),$$

където $\mathbb{B}_{\mathbb{V}}$ означава затвореното единично кълбо във $\mathbb{V}$. Когато $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ тогава $\mathcal{G}_k(\mathbb{V})$ се нарича *многообразие на Грасман.* С тази метрика $\mathcal{G}_k(\mathbb{V})$ е пълно, а ако $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$, то даже е компактно. Нека $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}_k(\mathbb{V})$. Казваме, че $x \in B$ *е експозиционна точка по отношение на* $\mathcal{P}$ или $\mathcal{P}$*-експозиционна*, ако съществува $P \in \mathcal{P}$, такова че $(x+P) \cap B = \{x\}$. Означаваме с $\mathcal{X}_{\mathrm{p}}^k(B,\mathcal{P})$ множеството на всички експозиционни (по отношение на $\mathcal{P}$) на B. Тази дефиниция обобщава понятието експозиционна точка, тоест, точка в $B \subset \mathbb{R}^n$, която е експозиционна по отношение на $\mathcal{G}_{n-1}(\mathbb{R}^n)$. Ако $B, C \subset \mathbb{V}$ и $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}_k$, то B и C се наричат $\mathcal{P}$*-имитации* една на друга, ако $B+P = C+P$ за всяко $P \in \mathcal{P}$, тоест, B и C имат едни и същи проекции по посока на всеки елемент на $\mathcal{P}$. Ако $\overline{B+P} = \overline{C+P}$ за всяко $P \in \mathcal{P}$, то тогава B и C се наричат *слаби* $\mathcal{P}$*-имитации* една на друга. Ако $A \subset \mathbb{V}$ тогава дефинираме $A^\perp$ по следния начин:

$$A^\perp = \{v \in \mathbb{V} \colon v \cdot x = v \cdot y \text{ for all } x, y \in A\}.$$

Ако L е затворено линейно подпространство на $\mathbb{V}$ то $L^\perp$ се нарича *ортогонално допълнение* на L и имаме $L^{\perp\perp} = L$. Също, дефинираме $\operatorname{codim} A = \dim A^\perp \in \{0, 1, \ldots, \infty\}$. *Екстремална точка* на B по отношение на проекциите по посока на множеството $\mathcal{P}$ (тоест проектираме върху $P^\perp$ ако $P \in \mathcal{P}$) - или за по-кратко $\mathcal{P}$*-екстремална точка* - е точка, която принадлежи на сечението на всички затворени подмножества на B, които са $\mathcal{P}$-имитации на B. Ако $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}_k(\mathbb{V})$, то тогава множеството от $\mathcal{P}$-екстремални точки на B се означава с $\mathcal{X}_{\mathrm{t}}^k(B,\mathcal{P})$.

Равнина в $\mathbb{V}$ е затворено афинно подпространство на $\mathbb{V}$ и една равнина L се нарича k*-равнина* ако $\dim L = k$; а k*-подпространство* е линейно подпространство на $\mathbb{V}$ с размерност k. *Афинната обвивка* $\operatorname{aff} A$ на A се дефинира като сечение на всички равнини, които съдържат A; $\overline{A}$ означава затворената обвивка и $\operatorname{int} A$ вътрешността на A в $\mathbb{V}$. Също, $\langle A \rangle$ означава изпъкнала обвивка на A. Да забележим, че $A^\perp = (\operatorname{aff} A)^\perp$ и $\operatorname{codim} A = \operatorname{codim}(\operatorname{aff} A)$. *Геометричната вътрешност* A° на A е вътрешноста на A спрямо афинната обвивка на A. *Геометричната граница* на A е $\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$. По-нататък, k*-хиперравнина* H е равнина с $\operatorname{codim} H = k$. Ако L е равнина, то тогава $\mathfrak{p}_L : \mathbb{V} \to L$ означава ортогоналната проекция върху L, дефинирана като $\{\mathfrak{p}_L(x)\} = L \cap (x + L^{\perp})$ за $x \in \mathbb{V}$. Ако L е линейно подпространство на $\mathbb{V}$, то ψ_L е ортогоналната проекция на $\mathbb{V}$ по посока на L върху $L^{\perp}$. Проекцията $\psi_L(A)$ се нарича *съществена*, ако $\psi_L(A) \neq L^{\perp}$. Да припомним, че едно множество $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}_k(\mathbb{V})$ е *някъде гъсто*, ако $\operatorname{int} \overline{\mathcal{P}} \neq \emptyset$. Накрая, единичната сфера в $\mathbb{R}^n$ се означава с S^{n-1}.

[9] S. Barov and Jan J. Dijkstra, On closed sets with convex projections in Hilbert space, Fundamenta Mathematicae, Vol. 197, No. 1, 2007, 17-33.

Нека k е естествено число. Нашите основни резултати са: a) показали сме, че ако C е затворено и неизпъкнало множество в Хилбертово пространство l^2, такова че затворените обвивки на проекциите върху всички k-хиперравнини (равнини с коразмерност k) са изпъкнали и съществени, то тогава C съдържа затворено топологично копие на l^2. За да докажем този резултат ние дефинираме за изпъкнали и затворени множества B множеството $\mathcal{E}^k(B)$ състоящо се от всички точки на B, които са екстремални по отношение на проекциите върху k-хиперравнини; b) доказваме, че $\mathcal{E}^k(B)$ е точно сечението на всички k-имитации C на B, тоест, затворени множества C, които имат същите проекции като B върху всички k-хиперравнини; c) за всяко затворено изпъкнало множество B в l^2 с непразна вътрешност конструираме “минимални” k-имитации C, такива че $\dim(C \setminus \mathcal{E}^k(B)) \leq 0$; d) накрая, показваме, че ако едно компактно множество има изпъкнали проекции върху крайномерни равнини, то този компакт е изпъкнал.

[10] S. Barov and Jan J. Dijkstra, On closed sets with convex projections under a narrow set of directions, Transactions of Amer. Math. Soc., Vol. 360, No. 12 (2008), 6525-6543.

Тук, имаме следния резултат: Нека $k, n \in \mathbb{N}$, като $k < n$ и нека $\mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n)$ означава многообразието на Грасман, състоящо се от всички линейни подпространства на $\mathbb{R}^n$ с размерност k, снабдени с Хаусдорфовата метрика. Показали сме, че ако проекциите на неизпъкнало затворено множество $C \subset \mathbb{R}^n$ са изпъкнали и съществени по отношение на отворено множество $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n)$ от посоки на проектиране, то тогава C съдържа затворено копие на $(n-k-1)$-многообразие.

[12] S. Barov and Jan J. Dijkstra, On closed sets with convex projections under somewhere dense sets of directions, Proc. Amer. Math. Soc., 137 (2009), 2425-2435.

Доказваме следния резултат.

Теорема 5. Нека $0 < k < n$, нека C е затворено неизпъкнало подмножество на $\mathbb{R}^n$, и нека $\mathcal{P}$ е отворено в $\mathcal{G}_{n-k}(\mathbb{R}^n)$. Нека $\psi_{P^*}(\langle C \rangle) \neq (P^*)^{\perp}$ за някое $P^* \in \mathcal{P}$

и нека $\overline{\psi_P(C)}$ е изпъкнало за всяко $P \in \mathcal{P}$. Ако $\langle C \rangle$ не съдържа k-равнина, то тогава C съдържа затворено множество, което е хомеоморфно на

(i) $\mathbb{R}^{k-1}$ или
(ii) $S^i \times \mathbb{R}^{k-i-1}$ за някое $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$.

[13] S. Barov and Jan J. Dijkstra, On closed sets in Hilbert space with convex projections under somewhere dense sets of directions, Journal of Topology and Analysis, Vol. 2, No. 1 (2010), 123-143.

В настоящата статия имаме, че $\mathbb{V} = \ell^2$ и за това, за удобство, полагаме $\mathcal{G}_k = \mathcal{G}_k(\mathbb{V})$. По-нататък, теоремата в [9] (част а)) е обобщена значително чрез предположението, че множеството от посоки на проектиране е някъде гъсто. Да припомним, че едно множество $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}_k$ е *някъде гъсто*, ако $\operatorname{int} \overline{\mathcal{P}} \neq \emptyset$. За да покажем силата на нашата основна теорема, ние конструираме "минимални имитации" на затворени изпъкнали множества в ℓ^2. Имаме следните резултати.

Теорема 6. *Нека $k \in \mathbb{N}$, нека B е затворено и изпъкнало подмножество на ℓ^2, което не съдържа k-хиперравнина, и нека $\mathcal{P}$ е подмножество на $\mathcal{G}_k$, такова че B не е $(\operatorname{int} \overline{\mathcal{P}})$-имитация на ℓ^2. Ако C е затворена слаба $\mathcal{P}$-имитация на B, такава че $C \neq B$, то тогава $C \cap B$ съдържа затворено множество, което е хомеоморфно на ℓ^2.*

За да докажем Теорема 6 ние дефинираме множеството $\mathcal{E}^k(B, \mathcal{P})$ състоящо се от екстремалните точки на B по отношение на $\mathcal{P}$ ($\mathcal{P}$-екстремални точки). Доказваме, че всяка затворена слаба $\mathcal{P}$-имитация на B съдържа множеството $\mathcal{E}^k(B, \mathcal{P})$. Тогава доказваме Теорема 6 чрез намиране на копие на ℓ^2 в множеството $\mathcal{E}^k(B, \mathcal{P})$. Следващата теорема показва, че за затворено множество да имитира едно изпъкнало множество B това затворено множество може да съдържа много малко извън $\mathcal{E}^k(B, \mathcal{P})$. Едно топологично пространство е *нулмерно*, ако има база състояща се от отворени-затворени множества.

Теорема 7 *(Имитационна Теорема)***.** *Нека $k \in \mathbb{N}$, нека B е затворено и изпъкнало подмножество на ℓ^2, такова че $\operatorname{codim} B \neq k$, и нека $\mathcal{P}$ е подмножество на $\mathcal{G}_k$. Тогава съществува затворена $\mathcal{P}$-имитация C на B, такава че $C \subset B$ и $C \setminus \mathcal{E}^k(B, \mathcal{P})$ е нулмерно.*

Ако $A \subset \ell^2$ тогава *геометричната вътрешност* A° на A е вътрешността на A спрямо неговата афинна обвивка. If A е крайномерно и изпъкнало множество, то тогава A° е непразно (даже гъсто в A) и този факт играе ключова роля когато сме в $\mathbb{R}^n$. В ℓ^2 има много затворени и изпъкнали множества B с празна геометрична вътрешност (например, всеки безкрайномерен компакт има това свойство). Ние посвещаваме секция на този вид множества. Доказваме две главни теореми—Имитационна Теорема и Експозиционна Теорема. Имитационната теорема казва, че този вид множества не могат да се имитират от други затворени множества:

Теорема 8. *Нека $k \in \mathbb{N}$ и нека B е затворено и изпъкнало подмножество на ℓ^2, такова че $B^\circ = \emptyset$. Нека $\mathcal{P}$ е някъде гъсто в $\mathcal{G}_k$. Ако C е затворена слаба $\mathcal{P}$-имитация на B, то тогава $C = B$.*

За да формулираме Експозиционната теорема да припомним следната дефиниция. Нека $B \subset \mathbb{V}$, нека $w \in B$, и нека $\mathcal{P}$ е множество от линейни подпространства на $\mathbb{V}$. Казваме, че w е *експозиционна точка по отношение на* $\mathcal{P}$, или $\mathcal{P}$-*експозиционна точка*, ако $B \cap (w + P) = \{w\}$ за някое $P \in \mathcal{P}$.

Теорема 9*(Експозиционна Теорема)***.** *Нека $k \in \mathbb{N}$, нека B е затворено и изпъкнало множество в ℓ^2, такова че $B^\circ = \emptyset$, и нека $\mathcal{P}$ е непразно отворено множество в $\mathcal{G}_k$. Тогава всяка точка $w \in B$ е $\mathcal{P}$-експозиционна.*

Следващата теорема показва важността на множеството $\mathcal{E}^k(B, \mathcal{P})$, а именно, че то е множеството на всички $\mathcal{P}$-екстремални точки на B когато $\operatorname{codim} B \neq k$.

Теорема 10. *Нека $k \in \mathbb{N}$, нека Bе затворено и изпъкнало множество в ℓ^2, такова че $\operatorname{codim} B \neq k$, и нека $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}_k$ е такова, че $\mathcal{P} \subset \operatorname{int} \overline{\mathcal{P}}$. Тогава*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^k(B, \mathcal{P}) &= \bigcap \{C : C \text{ е затворена слаба } \mathcal{P}\text{-имитация на } B\} \\ &= \bigcap \{C : C \text{ е затворена } \mathcal{P}\text{-имитация на } B\}.\end{aligned}$$

[14] S. Barov, Jan J. Dijkstra and Maurits van der Meer, On Cantor sets with shadows of prescribed dimension, Topology and its Applications, 159 (2012), 2736-2742.

Да припомним, че *сянка* на $A \subset \mathbb{V}$ е ортогоналната проекция на A върху хиперравнина. Нашите основни резултати гласят следното.

Теорема 11. *Нека m, k са цели числа, такива че $m \geq 2$ и $0 \leq k \leq m - 1$. Тогава съществува Канторово множество в $\mathbb{R}^m$, такова че всички негови сенки са с размерност k.*

Следващите две теореми засягат проекциите на Канторови множества в ℓ^2 с предписана размерност. Първата теорема показва, че Теорема 11 не може да бъде продължена върху Хилбертовото пространство ℓ^2, докато втората ни дава положителен резултат когато проекциите върху m-равнини, $m \in \mathbb{N}$, са засегнати.

Теорема 12. *Нека $m \in \mathbb{N}$, и нека K е компакт в ℓ^2. Тогава множеството $\mathcal{P} = \{P \in \mathcal{G}_m(\ell^2) \colon (w + P) \cap K = \{w\}$ for every $w \in K\}$ е гъсто и G_δ в $\mathcal{G}_m(\ell^2)$.*

Теорема 13. *За $m \in \mathbb{N}$ съществува Канторово множество $C \subset \ell^2$ такова, че неговите проекции върху всички $m-$равнини са точно с размерност $(m - 1)$.*

[15] S. Barov and Jan J. Dijkstra, On exposed points and extremal points of convex sets in and Hilbert space , Fundamenta Mathematicae, 232 (2016), 117-129.

Нека $k \in \mathbb{N}$, $B \subset \mathbb{V}$ е затворено и изпъкнало и нека $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}_k(\mathbb{V})$ е множество от линейни подпространства на $\mathbb{V}$ с размерност k. Да припомним, точката $x \in B$ е *експозиционна точка по отношение на* $\mathcal{P}$, ако $B \cap (x + P) = \{x\}$ за някое $P \in \mathcal{P}$. Означаваме с $\mathcal{X}^k_{\mathrm{p}}(B, \mathcal{P})$ множеството на всички $\mathcal{P}$-експозиционни точки на B. Множеството от всички *екстремални* точки на B по отношение на $\mathcal{P}$ се означава с $\mathcal{X}^k_{\mathrm{t}}(B, \mathcal{P})$ и се дефинира като сечение на всички затворени подмножества на B, които са $\mathcal{P}$-имитации на B. Очевидно, всяка експозиционна точка е екстремална. Един от основните резултати в тази статия е да докажем следната връзка между експозиционни и екстремални точки в найобщия случай.

Теорема 14 *(Екстозиционна Теорема).* *Нека $k \in \mathbb{N}$ като $k < \dim \mathbb{V}$, нека $B \subset \mathbb{V}$ е затворено и изпъкнало, и нека $\mathcal{P}$ е G_δ-подмножество на $\mathcal{G}_k(\mathbb{V})$, такова че $\mathcal{P} \subset \operatorname{int} \overline{\mathcal{P}}$. Тогава $\mathcal{X}^k_{\mathrm{p}}(B, \mathcal{P})$ е гъсто в $\mathcal{X}^k_{\mathrm{t}}(B, \mathcal{P})$.*

По-нататък, имаме следното обобщение на Теорема 9.

Теорема 15. *За затворени и изпъкнали множества $B \subset \ell^2$ с празна геометрична вътрешност B° имаме $\mathcal{X}^k_{\mathrm{p}}(B, \mathcal{P}) = \mathcal{X}^k_{\mathrm{t}}(B, \mathcal{P}) = B$ за всяко $k \in \mathbb{N}$ и някъде гъсто G_δ-множество $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}_k(\ell^2)$.*

Също така, имаме следната теорема.

Теорема 16. *Нека B е затворено и изпъкнало в $\mathbb{R}^n$ и нека $n \in \mathbb{N}$ като $n \geq 2$. Тогава $\mathcal{X}^1_{\mathrm{p}}(B, \mathcal{G}_1(\mathbb{R}^n))$ е G_δ-множество в $\mathcal{X}^1_{\mathrm{t}}(B, \mathcal{G}_1(\mathbb{R}^n))$.*

Накрая, в тази статия, показваме, че ако $k \neq 1$ тогава не съществува гъсто подмножество на $\mathcal{X}^k_{\mathrm{p}}(B, \mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n))$, което да е G_δ-множество в $\mathcal{X}^k_{\mathrm{t}}(B, \mathcal{G}_k(\mathbb{R}^n))$.

[16] S. Barov, Smooth convex bodies in with dense union of facets, Topology Proceedings, 58 (2021), 71-83.

Нека B е затворено и изпъкнало в $\mathbb{R}^n$; B се нарича *изпъкнало тяло* ако B е компактно и има непразна вътрешност по отношение на $\mathbb{R}^n$. По-нататък, B е *гладко*, ако B има единствена опорна хиперравнина във всяка точка от нейната границата. Нека $k, n \in \mathbb{N}$ като $k < n$ и нека $\mathcal{G}_k$ означава *многообразието на Грасман*, състоящо се от всички линейни подпространства в $\mathbb{R}^n$ с размерност k. Сечението F на B и на опорна хиперравнина се нарича *стена*, ако $\dim F = n - 1$. Една точка x от B се нарича *експозиционна* по отношение на $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}_k$, ако съществува $P \in \mathcal{P}$, такова че $(x + P) \cap B = \{x\}$. В тази статия, за всяко $n \geq 2$ сме контруирали симетрични и гладки изпъкнали тела $B(n)$ в $\mathbb{R}^n$ чиито обединение от всички стени е гъсто в границата на $B(n)$ и такова, че множеството от всички стени дефинира гъсто множество $\mathcal{P}$ в $\mathcal{G}_k$, така че множеството от всички експозиционни точки на $B(n)$ по отношение на $\mathcal{P}$ е празно.

[17] S. Barov, More on exposed points and extremal points of convex sets in and Hilbert space, Comment. Math. Univ. Carolin., 64, 1 (2023), 63-72.

В тази статия ние имаме една теорема от Крейн-Милман вид. Да припомним, че *полупространство* на равнина L в $\mathbb{V}$ е подмножество на L което се състои от хиперравнина на L заедно с една от двете страни. Непразното множество F на B се нарича *лице* на B, ако съществува опорна хиперпавнина H на aff B, със свойството $F = B \cap H$. Ако F е лице на B, то това го означаваме с $F \prec B$. Казваме, че подмножеството F на B е *наследствено лице* на B, ако $F = B$ или съществува редица $F = F_1 \prec F_2 \prec \cdots \prec F_m = B$ за някое m. Ние сме доказали следната теорема.

Теорема 17. *Нека $k \in \mathbb{N}$, $k < \dim \mathbb{V}$, нека $B \subset \mathbb{V}$ е затворено и изпъкнало, което не съдържа k-хиперравнина и нека $\mathcal{P}$ е гъсто G_δ-множество на $\mathcal{G}_k(\mathbb{V})$. Ако не съществува наследствено лице на B, което е полупространство на k-хиперравнина, то*

$$\overline{\langle \mathcal{X}^k_{\mathrm{p}}(B, \mathcal{P}) \rangle} = \left\langle \overline{\mathcal{X}^k_{\mathrm{p}}(B, \mathcal{P})} \right\rangle = B.$$

Също така, ние обобщаваме Theorem 16.