

Рецензия върху дисертационен труд за получаване на образователната и научна степен „Доктор“ в област на висше образование „4. Природни науки, математика и информатика“, направление „4.5 Математика“, докторска програма „Математическо моделиране и приложение на математиката“

Рецензията на дисертационен труд „Математически модели в популационната динамика с обобщени функции на растеж“ с автор *Тихомир Богословов Иванов* е изготвена на основание на решение на Научното жури от 21 юни 2018 г., определено със заповед №162 от 06 юни 2018 г. на Директора на Института по математика и информатика-БАН, която е издадена на основание на решение на НС на ИМИ (Протокол 5 от 01 юни 2018 г.).

1 Общо описание на дисертацията

Представеният ми комплект материали на компакт диск в електронен вид е в съответствие с правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и за заемане на академични длъжности в ИМИ-БАН и съдържа всички предвидени трудове и документи.

Дисертационният труд се състои от 106 стандартни машинописни страници (включително апробация на резултатите, авторска справка, едно приложение и библиография) и съдържа 35 фигури. Материалът е структуриран в увод и три глави. Библиографската справка показва, че са използвани 84 литературни източници, от които три са статии по дисертацията и един е научен доклад на дисертанта в поредицата *Доклади на ИМИ-БАН*.

Авторефератът се състои от 29 стандартни машинописни страници и съдържа 11 фигури.

Приложени са трите статии, свързани с тематиката на дисертацията и представлящи основните научни резултати от нея. Две от статиите на дисертанта са съвместни с неговия научен ръководител, проф. Нели Димитрова.

Представените трудове отговарят на изискванията на процедурата по обем и форма.

2 Характеристика на научните постижения в дисертационния труд.

Предмет на дисертационния труд са математическите модели в популационната динамика с обобщени функции на растеж.

2.1 Актуалност и познаване на проблема

Дисертацията започва с обзор на основни модели от популационната динамика от тип „хищник-жертва“ (модел на Lotka-Volterra, Rosenzweig-MacArthur и др.) и разглежда биологичната мотивация за употребата на различни функции на растеж при хищника. Различни функции на растеж се използват в зависимост от допусканията за екологичното взаимодействие между популациите (консумация на жертва/биомаса). В повечето случаи тези функции зависят само от числеността на жертвата и са монотонни (по класификацията на Holling отговарят на типове Holling I-III). Обръща се внимание, че тези модели проявяват парадокса на обогатяване, при който увеличаване на капацитета на жизнената среда на жертвата може да дестабилизира екосистемата. Моделите с немонотонна функция на растежа допускат богато разнообразие от точки на съвместно съществуване на двете популации (или *вътрешни равновесни точки*) с различни динамични свойства. Различните сценарии в такива случаи са показани на фиг. 1.6. Представен е и моделът с функция на растеж от тип Beddington-de Angelis, отчитащ съревнованието между индивидите от популацията на хищниците.

В контекста на тази проблематика Тергу (2014) въвежда модел с цел да се видоизмени допускането на гореспоменатите модели за правопрпорционална връзка между функционалната зависимост за консумация на биомаса \mathcal{F} и скоростта на нарастване на популацията на хищника. Така може да се разглеждат по-широк кръг от биологични сценарии за отношението между популациите на хищника и на жертвата. Моделът на Тергу разглежда взаимодействие между популацията на жертвата N и на хищника P , зададено със системата от диференциални уравнения

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= rN(1 - N/K) - P\mathcal{F} \\ \frac{dP}{dt} &= P(\mathcal{B}(\mathcal{F}) - \mathcal{D}(\mathcal{F})).\end{aligned}\tag{1}$$

Модел (1) с обобщени функции на растеж \mathcal{B} и смъртност \mathcal{D} (които са непрекъснато диференцируеми по отношение на аргументите си) цели да внесе по-реалистично описание на растежа на популацията от хищници P , който изисква праг на минимална енергия, под който размножаването на хищниците е невъзможно. Друг аргумент за въвеждането на този тип зависимост е, че скоростта на размножаване на хищниците не може да бъде безкрайно висока, а скоростта на смъртност не може да бъде константа, а трябва да зависи от количеството биомаса. Това означава, че са в сила следните условия: $0 \leq \mathcal{B}(\mathcal{F}) \leq c\mathcal{F}$ за някоя положителна константа c и че $d\mathcal{B}/d\mathcal{F} > 0$ в някакъв интервал (a_1, a_2) и $d\mathcal{B}/d\mathcal{F} = 0$ извън него и че $0 < d_1 < \mathcal{D}(\mathcal{F}) < d_2$ и $d\mathcal{D}/d\mathcal{F} < 0$ в някакъв интервал (b_1, b_2) и $d\mathcal{D}/d\mathcal{F} = 0$ извън него.

Тъй като в областта на теоретичната екология дебатите относно използването на различни функции на растеж не стихват, математическите изследвания могат да доведат до появата на нови и интересни резултати. Изложението на тази проблематика показва, че дисертантът е проучил в детайл литературата и отворените задачи в тази област на популационната динамика, които заслужават внимание от гледна точка на математическия анализ. Анализът се основава на гореизложените необходими условия за обобщените функции.

Като се позовава на резултатите на Terry, дисертацията си поставя следните основни задачи: 1) да докаже глобална устойчивост на вътрешната равновесна точка в модела на Terry, ако тя е локално устойчива (Terry, Theor. 3 е доказал това само за частен случай, при което коефициентите отговарят на точно определено условие); 2) да изследва динамичните характеристики на модела, като се използва функционална зависимост \mathcal{F} от тип Beddington-de Angelis вместо функция от тип Holling II както прави Terry; 3) да изследва появата на ново динамично поведение на модела и въпроса за стабилизируемост на системата при пертурбации.

Получените резултати са в стила на класическите изследвания на модела от тип „жищник-жертва“, но дисертантът с цел 1 обобщава скорошен резултат в тази област, а с цел 2 се показва съществуването на качествено нова динамика в системата, която не се наблюдава в случая на линейни функции. За съжаление нито в увода на дисертацията, нито в увода на конкретната глава, нито в автореферата не е посочено точно мястото в текста, където са решени тези задачи (номер на страница, твърдение или теорема), което създава известна трудност при проследяването им в контекста на целия дисертационен труд.

2.2 Характеристика на избраната методика на изследване

Използвани са класически похвати от теорията на динамичните системи и обикновените диференциални уравнения за локален и асимптотичен анализ: принцип на сравнението за доказване на ограниченост на решението, локален анализ на равновесните точки с помощта на матрица-якобиан, теоремата на Поанкаре-Бендиксън за доказване на устойчивост на периодична орбита, функция на Ляпунов за доказване на глобална устойчивост на равновесна точка.

Теоретичният анализ е допълнен с числени симулации на модела за конкретни функции и за избрани стойности на параметрите на модела. Симулациите са направени с помощта на софтуерната среда Wolfram Mathematica на Wolfram Research.

2.3 Характеристика на резултатите

Глава 2 изследва модела от типа на Terry с функционална зависимост за консумацията на биомаса $\mathcal{A}(N, P)$ от тип Beddington-de Angelis, който след обезразмеряване придобива вида

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= rN(1 - N) - P\mathcal{A}(N, P) \\ \frac{dP}{dt} &= P(\mathcal{B}(\mathcal{A}(N, P)) - \mathcal{D}(\mathcal{A}(N, P))), \end{aligned} \quad (2)$$

където

$$A(N, P) = \frac{aN}{b + N + cP},$$

а функциите на растеж B и смъртност D изпълняват гореписаните условия. Обяснен е биологичният смисъл на тези допускания, в смисъл че съществува праг на консумацията на биомаса, под който хищниците не се размножават, както и ограничение на скоростта на възпроизводство.

Доказани са основни свойства на модела (положителност, равномерна ограниченост на решенията, единственост при зададени начални условия) в част 2.2. Равновесните точки и локалната им устойчивост са изследвани в част 2.3 и 2.4. Резултатите са обобщени на стр. 33. Би било добре в твърдение 4 (стр. 26) да се засегне по-подробно въпросът за структурната неустойчивост, която възниква в случая (ii), и да се изясни с какво използването на повия тип функционална зависимост отличава разглеждания от Тергу случай. В част 2.5 е изследвано глобалното поведение на решенията. В случая, в който съществува вътрешната равновесна точка и тя е локално неустойчива, са изведени условия за глобалното поведение на решенията: периодична орбита (Теорема 5, стр. 34) или клонящи към граничната точка (Теорема 6, стр. 35). Аналитичните резултати са подкрепени с числени симулации, представени в част 2.6. За симулациите са използвани функциите B, D , дефинирани в статията на Тергу.

Глава 3 изследва качествените влияния върху динамиката на система от тип хищник-жертва при използване на обобщени функции за растеж и смъртност и ги сравнява с тези на класическия модел. Част 3.1 поставя модела, а част 3.2 представя анализа, следвайки структурата на глава 2. Част 3.2 започва с изследване на динамичното поведение на модела (част 3.2.1): положителност, равномерна ограниченост и единственост на решенията при зададени начални условия. Доказателствата на тези свойства повтарят до голяма степен доказателствата от част 2.2. Частите 3.2.2 и 3.2.3 изследват броя и свойствата на равновесните точки на системата – показано е, че моделът с обобщени функции може да има до 4 вътрешни равновесни точки. Локалната им устойчивост е разглеждана подробно в твърдения 13-15 (стр. 50-52). Показано е, че моделът допуска бифуркация на Хопф и на Богданов-Тakens във вътрешните равновесни точки (условията са изброени в забележка 8 и твърдение 16, стр. 52-53).

Част 3.2.4 изследва глобалното поведение на решенията. Теорема 8, стр.55 показва паличнието на периодична орбита, ако единствената вътрешна равновесна точка е неустойчива. Теорема 9, стр. 56 доказва глобалната устойчивост на вътрешната равновесна точка в модела на Тергу, ако тя е локално устойчива (това е по-силно твърдение от даденото в Тергу, Теог. 3, доказващо глобална устойчивост само за частен случай). Доказателството използва помощта на функция на Ляпунов по примера на Ardito-Ricciardi (1995) и Chiu-Hsiu (1998). Тези резултати са следователно с важен принос за изпълнението на поставените от дисертацията научни цели.

С оглед на по-добро изложение обаче е трябвало да се направи препратка към резултата на Тергу на това място. Твърдението от теорема 3 на Тергу е споменато (непряко) като Следствие 3 (стр. 58), но за съжаление в текста не е дадена препратка към статията на Тергу и липсва коментар за обобщеното доказателство.

Теорема 12 и 13 разглеждат асимптотиката на решения с начални условия в даде-

но множество и обобщават твърденията на теорема 7 и 8 за случая от две вътрешни равновесни точки. Тези твърдения е можело да се обособят като подточки подобно на случаите „нула или една вътрешна равновесна точка“ и „повече от две вътрешни равновесни точки“, но това приемам като редакционен пропуск при набирването на текста. Аналитичните резултати са подкрепени с числени симулации, представени в част 3.2.5. Използвани са същите обобщени функции като в част 2.6.

Част 3.3. сравнява разглежданите и класическите модели и интерпретира резултатите от въвеждането на обобщени функции. Като основни разлики са посочени: 1) реакцията на модела при големи пертурбации, които могат да изместят системата от басейна на привличане на една равновесна точка към друга равновесна точка, което не може да се наблюдава при класическите модели; 2) повече възможност за управление на системата и насочването ѝ към най-подходящото за конкретни цели равновесие. В тази част е можело да се опишат конкретни примери от експерименталната литература, където това насочване би било необходимо.

В последната глава 4 се валидира модел на растеж на микроби в биореактор с обобщени функции на растеж на базата на експериментални данни. Използва се като отправна точка моделът на Моно, но функцията на растежа има вид B , описан във втората глава с мотива, че се описва растеж при субоптимални или инхибиращи условия. Смъртността на микробите се пренебрегва (в забележка 9), но не е обяснено дали при такива условия тя няма да играе ключова роля.

Аналитичните резултати в тази глава са: Теорема 14, стр. 78 за глобална асимптотична устойчивост на точката на отмиване на биомасата (ако не съществува вътрешна равновесна точка) и Теорема 15, стр. 79 за глобална асимптотична устойчивост на вътрешната равновесна точка (ако тя съществува)

Макар че в глава 4 се прави валидиране на модел с обобщени функция на базата на експериментални данни от прекъснат процес, липсва по-детайлна дискусия за качеството на получената параметрична идентификация. Не е обяснено достатъчно ясно дали и как данните от фиг. 4.2 са съпоставими с тези от фиг. 4.1., за да се сравнят моделите на Моно с отчитане или без отчитане на смъртността на микробите и предложения обобщен модел. Би могло да се направи сравнение на различните типове модели за двата (или трите?) набора от данни.

По отношение на използваните данни имам следната забележка. На фиг. 4.3. се наблюдава подскок в данните при $t = 180$, но в текста не се дискутира дали това не се дължи на механична грешка на прибора или на неточност при измерването. В такива случаи посочването на интервала на доверие върху графиката има огромно значение да се изясни поведението на системата и да се избегне подозрението за нагаждане на данни и параметри (а такъв интервал не е посочен за данните).

В заключението на глава 4 се споменава, че „последващите изследвания биха могли да се фокусират върху дефинирането на конкретни функции на растеж, които да имат правдоподобно от гледна точка на биологията поведение“, но защо това не е направено при положение, че дисертационният труд разглежда и анализира именно модели с обобщени функции на растеж?

2.4 Оценка на приносите

Смятам, че изброените от дисертанта приноси правилно отразяват поставените цели и постигнатите резултати.

3 Критични бележки

В дисертационния труд липсват резюме и общо заключение на труда. Резюме е представено единствено в информационната карта на НАЦИД, а всяка глава завършва със собствено заключение. Това създава впечатление за механично струиране на текстове от статиите в дисертационния труд, каквото е можело да бъде избегнато, ако беше направена една проста, но заключителна систематизация на всички резултати.

Бих искал да засегна по-конкретно обаче начина, по който се борави с измервания и експериментални данни в дисертационния труд. В част 4.4. се използват експериментални данни за верифициране на модела и за параметрична идентификация, но не е дадена никаква статистика за данните (средна стойност и дисперсия) под формата на доверителни интервали (такива липсват на Фиг. 4.1, 4.2). Това статистическо уточнение се прави с цел да се покаже колко точно е експерименталното измерване и да послужи от една страна за оценка на параметричната идентификация, а от друга да послужи като мярка колко добре моделът описва данните. Не са посочени мерните единици на данните от експериментите на осите във фигури 4.1 и 4.2 (време, количество или концентрация). В съответната статия, на която се основава цялата четвърта глава, също липсват мерните единици. Такива пропуски са недопустими при работа с експериментални данни.

Другите забележки са редакционни и засягат общата структурата на текста на дисертационния труд и начина на изразяване.

- Изложени са припокриващи се и сравнително елементарни доказателства (на твърдения 9 и 10 в глава 3 сравнени с твърдения 2 и 3 в глава 2).
- В легендата на фиг. 3.5, стр. 60 е употребено „несвързани множества“ вместо по-точното „непресичащи се множества“.
- Липсват означения на мерните единици на неизвестните и на параметрите, използвани в моделите. За по-добра нагледност стойностите на параметрите биха могли да бъдат включени в таблица.
- На места в текста се използват побългарени английски думи, например, стр. 16: *микробиален* (от англ. *microbial*) вместо правилното *микробен*, стр. 72 *флукутира* вместо по-подходящото *движи се*.

4 Анализ на публикациите на дисертанта

Резултатите от дисертацията са публикувани в три статии. Съавтори на дисертанта са научният му ръководител, проф. Нели Димитрова (ИМИ-БАН), и Гергана Великова (Оксфордски университет, Англия).

Една (Т. Ivanov, N. Dimitrova, A predator-prey model with generic birth and death rates for the predator and Beddington-DeAngelis functional response) е в списание с импакт фактор (*Mathematics and Computers in Simulation*, IF 1.218 (2016)). Една (Т. Ivanov, N. Dimitrova, Qualitative effects of introducing nonlinear birth and death rates for the predator in a predator-prey type mode) е публикувана в списание *Biomath*, индексирано в MathSciNet, zbMATH, EBSCO. Третата статия (Т. Ivanov, Ġ. Velikova, Data fitting in Monod-type models with nonlinear growth rates) е публикувана в изданието *Biomath Communications*.

В статиите липсват данни за припоса на всеки от авторите.

5 Отражение на резултатите в трудове на други автори

Справка в Google Scholar показва 2 цитирания и едно автоцитиране на статията, публикувана в *Mathematics and Computers in Simulation*.

6 Оценка на автореферата

Авторефератът отразява правилно резултатите от дисертацията. За съжаление в него липсва резюме на английски език, както и ясни означения и препратки към твърденията и теоремите, които решават поставените основни задачи. Подредбата на целите и задачите в уводния списък не съответства на подредбата на доказателствата им, например първата в списъка е засегната едва в глава 3, а втората – в глава 2. Резюме на английски е представено единствено в приложената информационна карта на НАЦИД.

7 Заключение

Представеният дисертационен труд напълно отговаря на съвкупността от критерии и показатели, посочени в Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), неговия Правилник и Правилниците за прилагане на ЗРАСРБ на БАН и ИМИ-БАН. Това ми дава основание да дам положителна оценка на дисертацията и да препоръчам на научното жури да гласува положително за присъждане на Тихомир Богословов Иванов на образователната и научна степен „Доктор“.

София, 2 август 2018 г.