Р Е Ц Е Н З И Я

върху дисертационен труд за получаване на образователната и научна степен “Доктор” в област на висшето образование: 4. Природни науки, математика и информатика; професионално направление: 4.5. Математика; докторска програма: математическо моделиране и приложение математиката

Автор на дисертационния труд: маг. мат. Тихомир Богословов Иванов
Тема на дисертацията: “Математически модели в популационната динамика с обобщени функции на растеж”

Рецензент: проф. дтн Светослав Г. Николов, Институт по механика-БАН

1. Общо описание на дисертацията

Представеният дисертационен труд на тема: “Математически модели в популационната динамика с обобщени функции на растеж” е развит на 106 стандартни машинописни страници и съдържа 35 фигури. Библиографската справка показва, че са използвани 84 литературни източници (всички на латиница), от които 3 са статиите по дисертацията (две в съавторство с неговия научен ръководител и една с Гергана Великова), 1 е магистърската дипломна работа на Гергана Великова и 1 самостоятелна статия на дисертанта. Материалът е структуриран в увод, три глави, заключение (в което се обобщават приносите на дисертацията) и приложение представляващо кратък обзор на основни понятия и твърдения от областта на динамичните системи.

2. Актуалност на разработвания проблем

Дисертацията е посветена на едно перспективно направление в науката-математическо моделиране и приложение на методите на нелинейната динамика (в частност бифуркационен анализ) за изучаване поведението на динамични системи в популационната динамика. От това, че общата численост (плътност) на дадена *група организми от определен вид* (*популация*) зависи от множество сложни вътрешни и външни взаимодействия, прави моделирането и изследването на популационното ниво изключително трудно. Получените математични модели в повечето случаи са силно нелинейни и мултиразмерни. Това налага използването на качествен и числен анализ при изучаването им. Получените с помощта на бифуркационния анализ качествени предсказвания за поведението на изследваните системи спомагат за чувствително намаляване на разходите и времето за даден експеримент, както и за откриване на нови (неизвестни досега) механизми на поведение.

3. Познаване на състоянието на проблема

Най-общо дефиниран, проблемът на дисертационния труд се състои в изследване на възможностите на математичните модели от тип „хищник-жертва” (Лотка-Волтера (на англ. Lotka-Volterra)) с обобщени функции на растеж да описват адекватно съществуващите експериментални данни. С помощта на теорията на динамичните системи да се получат предсказания за динамичното поведение на тези модели за стойности на параметрите отговарящи на оптимални и неоптимални условия на съвместно съществуване на взаимодействащите си популации. Изследвано е динамичното поведение на: 1) модифицирания от дисертанта модел на Lotka-Volterra с обобщени функции на растеж (модел на Тери (на англ. Terry)), описващи възпроизводството и смъртността на хищника, като се отчита интерференцията между хищниците (функция на Beddington-DeAngelis); 2) модел от тип „хищник-жертва" описващ защитно поведение на жертвата, когато растежа и смъртността при хищника се задават с линейни и с обобщени функции; 3) модифицирания от дисертанта класически модел на Моно (на англ. Monod) с обобщени функции на растеж за биомасата, като се използват реални експериментални данни за микроорганизмите. Поради сложността на разгледаните процеси на външно и вътрешно взаимодействие в популациите на хищника и жертвата, авторът отделя значително място (в първа глава и приложението на дисертацията) за тяхното описание, както и на съществуващите бифуркации с коразмерност на изроденост едно и две.

Демонстрирането на съществуване на периодично поведение в числеността на популациите в стационарна среда е един от първите успехи на математичната екология. Моделът на Вито Волтера (на англ. Vito Volterra), в който едната популация се явява храна за другата, дава яснота на редица „необясними" явления на периодично изменение на числеността на популациите без то да е свързано с периодичната промяна на външните фактори (най-вече климатични). В исторически план такъв тип взаимодействие (съобщество) се нарича *система „хищник-жертва"* (*паразит-гостоприемник*). В биологичната литература съществуват огромен брой статии, които показват резултати противоречащи си едни с други, т.е. 1) в едни се наблюдава осцилиращо поведение, а в други не; 2) системата се разрушава достатъчно бързо – хищникът умира, а жертвата остава или жертвата умира (изчезва), а след нея и хищника; 3) хищникът и жертвата съществуват достатъчно дълго. Така, по естествен начин, възниква въпросът: при какви условия съвместното съжителство на хищника и жертвата е устойчиво и кои са механизмите, които го гарантират и контролират. Правилни и достатъчно изчерпателни отговори на този въпрос може да дадат математичните модели на съвместното съжителство на хищника и жертвата и тяхното изследване с помощта на теорията на динамичните системи.

Бифуркационната теория е раздел от теорията на динамичните системи изучаваща как се извършва качествената промяна в поведението на фазовите траектории при изменение на един или няколко параметъра. Ето защо, авторът в първа глава от дисертацията и приложението правилно ѝ отделя специално внимание. Убедително се показва, че качествената теория на динамичните системи може успешно да се приложи за изследване на устойчивостта и бифуркационното поведение на равновесните точки на математичните модели от тип „хищник-жертва" и от тип на Моно – на биопроцеси. Тези математични модели могат да се формулират като динамични системи от нелинейни автономни обикновени диференциални уравнения (ОДУ).

В бифуркационната теория се разглеждат *изродени случаи* с неголяма коразмерност. Една от причините е, че броят на различните изродени случаи лавинообразно нараства с увеличаването на коразмерността. Например, при бифуркация на равновесно състояние с коразмерност едно съществуват *два* различни критични случая. Ако коразмерността е две, критичните случаи стават *пет*. За коразмерност три, случаите са *тринадесет*, като един от тях не допуска в явен вид (във вид на формули) критерии за устойчивост. При коразмерност четири и повече, броят на особените случаи не може да бъде изчислен. Това прави изучаването на толкова високи израждания в теорията нецелесъобразно. Смятам, че дисертанта успешно се е ориентирал в проблематиката, като в потвърждение на това мое твърдение са поставените цели и задачи в дисертацията, т.е. изследване на поведението на математични модели в популационната динамика с помощта на теорията на динамичните системи.

4. Характеристика на избраната методика на изследване

За осъществяване на поставените цели, първоначално авторът в *Глава втора* от дисертацията модифицира известния в литературата модел на Тери [Terry, 2014] с използване на обобщени функции на растеж и смъртност на хищника (ф-я на Beddington-DeAngelis) имащи праг, под който индивидите не се възпроизвеждат. Получава се системата (2.1) от две нелинейни автономни ОДУ, която е структурно устойчива. В точка 2.2 се доказват две твърдения за това, че : 1) R_+^2 (положителният квадрант) е положително инвариантно множество на (2.1); 2) неотрицателните решения на (2.1) са равномерно ограничени отгоре. В точка 2.3 се намират равновесните точки (РТ) на модела (2.1) - $E_1=(0,0)$, $E_2(1,0)$ и $E_3(N^*,P^*)$. Благодарение на доказаната *Лема 1* се формулира и доказва *Твърдение 4*, което дава условията за същесвуване на равновесията E_1, E_2 и E_3.

В следващата подточка от тази глава на дисертацията се разглежда локалната устойчивост на решенията (равновесните точки) на модела (2.1). От доказаните тук четири твърдения и две леми следва, че в зависимост от стойностите на параметрите на системата (2.1) могат да възникнат следните ситуации: i) съществуване само на равновесните точки E_1 и E_2, като първата е от тип седло (т.е. асимптотично неустойчива), а втората е винаги асимптотично устойчива; ii) съществуване и на трите равновесни точки E_1, E_2 и E_3, като първите две са седла, а третата е локално асимптотично устойчива и iii) съществуване и на трите равновесни точки E_1, E_2 и E_3, като разликата с предходния случай е, че сега E_3 (вътрешната равновесна точка) е локално асимптотично неустойчива.

Точка 2.5 от дисертационния труд е свързана с глобалното поведение на решенията на (2.1). От доказаната *Теорема 4* и теорията на асимптотичните автономни динамични системи следва, че решенията на (2.1) са сходящи към седлото E_1 или към E_2, а вътрешни равновесни точки не съществуват. В случай, че $E_3(N^*,P^*)$ е единствената вътрешна равновесна точка на системата (2.1) използвайки последователно теоремата на Poincare-Bendixson, лемата на Butler-McGehee, лема 3, условието $b > a/_{rc}$, твърдение 8 (случай б1) и правилото на Dulac оригинално се доказват *Теорема 5* и *6*. От тези доказателства следва: 1) ω-граничното множество на всяка траектория на (2.1) е периодична орбита и 2) всяко решение $(N(t),P(t))$ на (2.1) (при начални условия $N(0)>0, P(0)>0$) клони към E_3. Трябва да се отбележи, че остава недоказан случаят за глобалната устойчивост на E_3 и за другите случаи посочени в твърдение 8. Верността на доказаните теореми, леми и твърдения в тази глава от дисертацията се демонстрира с помощта на четири числени примера в подточка 2.6. За числените пресмятания са взети стойности на параметрите и вид на функциите на растеж и смъртност на хищника от работата на Тери [Terry, 2014]. Използвана е вградената функция NDSolve в системата за компютърна алгебра Wolfram Mathematica.

В *Глава трета* от дисертационния труд се изследват качествените ефекти върху динамиката на система от тип хищник-жертва при използването на нелинейни функции на растеж и смъртност при хищника. Тази глава се явява естествено продължение на предходната глава втора.

Първоначално в подточка 3.1 се представя известният модел в литературата на Танг и Хиао (на англ. Tang and Xiao) от 2015 година, описващ защитното поведение на жертвата. Този модел (уравнения (3.1) в дисертацията) в зависимост от стойностите на параметрите си има богато качествено поведение, т.е. възможни са три случая: 1) с две равновесни точки $E_0=(0,0)$ - седло и $E_K=(K,0)$ - глобално устойчива; 2) с три равновесни точки $E_0=(0,0)$ - седло, $E_K=(K,0)$ - седло и вътрешна такава $E_1(x_1,y_1)$ - устойчива/неустойчива, около която съществува устойчив граничен цикъл (периодично решение); 3) с четири равновесни състояния $E_0 = (0,0)$ - седло, $E_K = (K,0)$ - устойчива, първа вътрешна точка $E_1(x_1, y_1)$ - устойчива/неустойчива, около която съществува устойчив граничен цикъл и втора вътрешна точка $E_2 = (x_2, y_2)$ - седло. В този последен случай се наблюдават два басейна на привличане в зависимост от началните условия. По-нататък в тази подточка се модифицира системата (3.1), като се включват обобщени функции на растеж и смъртност на хищника – *E*(N). За отбелязване тук е фактът, че за постигане на по-добра нагледност на математичния анализ се използва спицифична функция на растеж на Холинг (на англ. Holling), тип II. Така, модифицираният модел в (3.2) е от две нелинейни автономни ОДУ.

В подточка 3.2 се изследва динамиката на системата (3.2), т.е. с доказателството на осем твърдения и шест теореми последователно се показва: *1)* съществуването, единствеността и положителността на решенията; *2)* съществуването винаги на две гранични точки $E_0 = (0,0)$ и $E_K = (K,0)$, а в зависимост от това дали $E'(N) > \eta$ или $E'(N) < \eta$ (където η е параметър) може - да няма вътрешни РТ, да има само една вътрешна РТ или да има две вътрешни РТ; *3)* показва се при какви условия РТ са устойчиви и кога възникват бифуркацията на Андронов-Хопф (или само Хопф, както е в дисертацията) и бифуркацията на Богданов-Такенс. Тук основните идеи са взаимствани от Кузнецов и Уигинс [Kuznetsov, 1998; Wiggins, 1996], като по-важното за отбелязване е, че бифуркацията на Хопф е с коразмерност едно и поради нейната специфичност се налага допълнителна стъпка, с която се въвеждат комплексни координати и се прави проверка за неизроденост, чрез пресмятане на така наречения първи коефициент на Ляпунов l_1 на границата на устойчивост. Смятам, че в тази връзка дисертантът би могъл да продължи своите изследвания в бъдещите си разработки. От своя страна бифуркацията на Богданов-Такенс е с коразмерност две. Основното тук (от гледна точка на теорията) за отбелязване е: ако разгледаме равнината образувана от двата бифуркационни параметъра, то особен интерес представлява точката, където се пресичат Хопф линията и седло-възел линията. При дву-мерни непрекъснати системи тя е точка на Богданов-Такенс, докато при три-мерни системи тази точка може да бъде точка на Богданов-Такенс или точка на Гукенхаймер-Гаврилов (на англ. Guckenheimer-Gavrilov). И в двата случая линейната част на нормалната форма е двойно дегенерирана, т.е. при Богданов-Такенс е $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, а при Гукенхаймер-Гаврилов $\begin{pmatrix} 0 & \omega & 0 \\ -\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. В случая на точка на Богданов-Такенс се появяват две нулеви собствени стойности, т.е. реалната и имагинерната част на една двойка комплексно спрегнати собствени стойности изчезва- с което свършва и *Хопф линията*. Ето защо тази бифуркация е възможна само при дву-мерни непрекъснати динамични системи. За появата на *точка на Гукенхаймер-Гаврилов* е необходима най-малко три-мерна система, защото в нея има една нулева реална собствена стойност и една нулева реална част на комплексно спрегнати собствени стойности с неизчезваща имагинерна част. Считам, че полученият резултат в *Твърдение 16* за E_b - рогова равновесна точка (роговидна бифуркация с коразмерност две) е доста интересен от теоретична (математична) гледна точка, на който обаче не е изяснен биологичният смисъл; *4)* глобалната асимптотична устойчивост на граничната РТ E_K и вътрешната РТ E_1 - използва се функцията на Ляпунов (*Теорема 9*).

В подточка 3.2.5 с единадесет числени примера нагледно се илюстрира поведението на системата (3.2) за всички възможни случаи разгледани в аналитичните доказателства. Тук подобно на *Глава втора* се използва вградената функция NDSolve в системата за компютърна алгебра Wolfram Mathematica.

Последната *Глава четвърта* от дисертационния труд е посветена на изследването на обобщените функции на растеж на биомасата включени в класическия модел на Моно, чрез тяхното валидиране с експериментални данни за микроорганизми отглеждани в лабораторни условия.

Моделът на Моно (4.1), описващ растежа на микробите в биореактор, е от две нелинейни автономни ОДУ. Независимите променливи на модела са: $s(t)$ - концентрацията на субстрата и $x(t)$ - концентрация на биомасата. Този модел се модифицира с въвеждането на обобщена функция на растеж на биомасата (имаща вида предложен от Terry) и придобива вида (4.2). След обезразмеряване на системата (4.2) се получава (4.3), която в подточка 4.2 се изследва качествено. Получава се, че РТ могат да бъдат две, като $E_1 = (1,0)$ съществува винаги, а $E^* = (s^*, x^*)$ - вътрешна, само ако е изпълнено условието $0 < s^* < 1$. От доказаните две теореми и една лема следва, че: 1) при $s^* > 1$, E_1 е глобално асимптотично устойчива; 2) при $0 < s^* < 1$, E_1 е неустойчива, а E^* е глобално асимптотично устойчива. При доказателствата се използва функцията на Ляпунов и принципа на LaSalle.

В подточка 4.3 се описват взетите от литературата експериментални данни за два вида (щама) дрожди (едноклетъчни гъби), които са поставени при инхибиращи условия – наличие на високи концентрации на етанол. В следващата подточка 4.4 се извършва: 1) параметрична идентификация по метода на най-малките квадрати, като за решаването на минимизационната задача е използван вграденият във Wolfram Mathematica метод Nelder-Mead. За решаването на системите ОДУ е използван вграденият във Wolfram Mathematica адаптивен метод Stiffness switching; 2) с помощта на числени експерименти се прави сравнение между резултатите (за първата фаза на растежа на микроорганизмите) от класическия модел на Моно (4.1) и модифицирания (4.2) за двата щама. Получава се едно значително по-добро съвпадение на решенията на (4.2) с експерименталните данни в сравнение с тези на (4.1).

5. Характеристика на резултатите

Резултатите в дисертацията са следствие от извършените качествен и числен анализи на различни биоматематични модели от нелинейни ОДУ. Освен това са получени и важни аналитични резултати за глобалната устойчивост на някои от равновесните точки на математичните модели. Условно те могат да се разделят в две групи.

Първата група са резултатите допринасящи за развитието на научното познание и насоки за бъдещи експериментални и теоретични изследвания. Към тях спада създаването (модифицирането) на математични модели от тип „хищник-жертва" с обобщени функции на растеж и смъртност на хищника и на модели от тип на Monod с обобщени функции на растеж на биомасата.

Втората група са качествените и количествени оценки за процесите протичащи в модифицирания модел на Lotka-Volterra с обобщени функции на растеж (модел на Terry), модел от тип „хищник-жертва" описващ защитно поведение на жертвата, когато растежа и смъртността при хищника се задават с линейни и с обобщени функции, модифицирания класически модел на Monod с обобщени функции на растеж за биомаса - като се използват реални експериментални данни за микроорганизмите. За тях са доказани редица свойства свързани с глобалната устойчивост на решенията им.

6. Оценка на приносите

Мнението на рецензента е, че формулираните от дисертанта приноси правилно отразяват постигнатите резултати.

7. Преценка на публикациите

Съществените части на дисертацията са публикувани в 3 статии, една от които е в списание с IF 1.218. Всички публикаци са в съавторство – две с научния му ръководител проф. д-р Нели Димитрова и една с Гергана Великова. В трите статии дисертантът е пръв автор.

8. Оценка на автореферата

Авторефератът правилно отразява основните положения и научните приноси на дисертационния труд. Авторската справка правилно отразява приносите. Основните забележки тук са: 1) липсва резюме на английски език в края на автореферата и 2) ненужно въвеждане на два вида глави – едните с римски, а другите с арабски цифри.

9. Критични бележки

Част от допуснатите грешки в дисертацията имат технически характер и не се отразяват на крайните резултати и приносите. Например, фигури 2.2 и 3.7 са едни същи. На всички фигури липсва означение коя е положителната посока на координатните оси. На фиг. 2.2, 3.2-3.4, 3.7, 3.11 и 4.1-4.3 липсва коя е променливата(ите) по ординатната ос. За параметрите на някои от разгледаните модели липсва информация, какъв е биологичният им смисъл.

При доказателствата с теоремата на Ляпунов за устойчивост (функцията на Ляпунов $V(N,P)$) липсва важното условие, че частните производни $\frac{\partial V}{\partial P}$ и $\frac{\partial V}{\partial N}$ трябва да съществуват и да са непрекъснати.

Една част от формулираните цели в дисертационния труд представляват задачи. Забележки 5, 6 и 7 (в Глава трета) са всъщност следствия.

10. Заключение

Представеният дисертационен труд напълно отговаря на изискванията на закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ) и правилника за неговото прилагане. Представените към дисертацията трудове са достатъчни по качество и количество, като няма съмнение относно значимостта на приносите в тях.

Това ми дава основание убедено да препоръчам на научното жури да гласува положително за присъждане на маг. мат. Тихомир Богословов Иванов образователната и научна степен "Доктор" в област на висшето образование 4, Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 Математика, докторска програма „Математическо моделиране и приложение на математиката".

02.08.2018 г.
гр. София