ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА - БАН

Тодор Петков Митев

НОРМАЛНИ ФОРМИ
И СПЕКТРАЛНИ АСИМПТОТИКИ

АВТОРЕФЕРАТ
на
ДИСЕРТАЦИЯ

за присъждане на научна и образователна степен
"Доктор"
Научна специалност: Диференциални уравнения
Професионално направление: 4.5 Математика

София, 2016г.

ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА - БАН

Тодор Петков Митев

НОРМАЛНИ ФОРМИ И СПЕКТРАЛНИ АСИМПТОТИКИ

АВТОРЕФЕРАТ
на
ДИСЕРТАЦИЯ

за присъждане на научна и образователна степен
"Доктор"
Научна специалност: Диференциални уравнения
Професионално направление: 4.5 Математика 22.05. 2016 г.

Научен ръководител:

проф. дмн Георги Попов

Официални Рецензенти:

София, 2016г.

Дисертационният труд съдържа 83 страници, от които 3 страници литература , включваща 42 заглавия.

Защитата на дисертационния труд ще се състои на .... от.............. часа в .... - София. Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в библиотеката на ИМИ-БАН.

0.1 Обосновка и състояние на проблема

В тази дисертация се изучава устойчивостта на квази-периодични решения на хамилтонови системи и се дават приложения в квази-класическия анализ на оператора на Шрьодингер.

Проблемът за устойчивост или неустойчивост на решенията на хамилтонови системи е централен проблем за хамилтоновата динамика.

Този проблем възниква още при изучаването на устойчивостта на слънчевата система.

Най-общо казано, устойчивостта е свойство на динамичната система , което се характеризира с това, че на близки начални данни съответстват решения, които са близки в голям интервал от време.

В зависимост от големината на интервала от време и близостта на решенията в този интервал, в математическата и физическата литература са дадени различни определения на понятието устойчивост - устойчивост по Ляпунов, асимптотична устойчивост и т.н.

Устойчивост по Ляпунов се наблюдава сравнително рядко при хамилтоновите системи.

Най-подходяща е така наречената ефективна устойчивост за хамилтониани H които са $\epsilon > 0$ близки до даден напълно интегруем хамилтониан, което означава че съществуват $a > 0$ и $b > 0$ такива, че вариацията на действието на интегралните криви на H е ϵ^b малка в интервал от време, който е експоненциално голям по отношение на ϵ^{-a}.

За да осмислим понятието устойчивост на хамилтонови системи ще разгледаме класа на напълно интегруемите хамилтонови системи.

Съществуват различни определения за интегруемост.

Тук използваме следната дефиниция.

Казваме, че хамилтоновата система с хамилтониан H, зададен в симплектично $2n$-мерно многообразие M е напълно интегруема, ако съществуват n комутиращи по Поасон функции $H_1, \ldots, H_n$ които са функционално независими почти навсякъде и $H_1 = H$ (т.е. скобките на Поасон $\{H_i, H_j\}$, $1 \leq i, j \leq n$, са тъждествено равни на нула и диференциалите $dH_1(m), \ldots, dH_n(m)$ са линейно независими за почти всяко $m \in M$).

Казваме, че $c = (c_1, \ldots, c_n)$ е регулярно значение на изображението $m \to (H_1(m), \ldots, H_n(m))$, ako $dH_1(m), \ldots, dH_n(m)$ са линейно независими за всяко m принадлежащо на $\Lambda = \{m \in M : H_1(m) = c_1, ..., \quad H_n(m) = c_n\} \neq \emptyset$.

Нека $c = (c_1, \ldots, c_n)$ е регулярно значение, тогава Λ е подмногообразие на M от размерност n и хамилтоновите векторни полета $X_{H_1}, \ldots, X_{H_n}$ са тангенциални на Λ и образуват базис в тангенциалното пространство на Λ във всяка точка.

В частност Λ е лагранжево подмногообразие на M и е инвариантно относно интегралните криви на тези векторни полета. Следното твърдение принадлежи на Лиувил.

Теорема 0.1 *(Лиувил)*

Да предположим, че $c = (c_1, \ldots, c_n)$ *е регулярно значение и че многообразието* Λ *е компактно.*

Тогава Λ *е дифеоморфно на плоския тор* $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n$.

Освен това съществуват локални координати $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \pmod{2\pi}$ *в* Λ *и вектори* $\omega^j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \cdots, n$ *такива, че в тези координати интегралните криви на* X_{H_j} *решават уравнението* $\dot{\varphi} = \omega^j$, *т.е.* $\varphi(t) = \varphi_0 + t\omega^j \pmod{2\pi}$ *е „квази-периодично" решение с честота* ω^j.

Арнолд допълва теоремата на Лиувил като построява координати „действие-ъгъл" в околност на Λ.

Теорема 0.2 *(Арнолд)*

Да предположим, че $c = (c_1, \ldots, c_n)$ *е регулярно значение и че многообразието* Λ *е компактно.*

Тогава съществуват околност U *на* Λ *в* M *и симплектична трансформация* $\Phi^{-1} = (\varphi, I) : U \to \mathrm{T}^*\mathbb{T}^n$ *такива, че хамилтонианът* $K := H \circ \Phi$ *зависи само от действието* I.

Да отбележим, че съответната хамилтонова система е

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial K}{\partial I}, \quad \dot{I} = -\frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

т.е. действието $I(t) = I_0$ е константно и $\varphi(t) = \varphi_0 + t\omega(I_0) \pmod{2\pi}$, където $\omega(I_0) = \nabla K(I_0)$. В часност действието се запазва.

Да отбележим, че $\mathbb{T}^n \times \{I_0\}$ е инвариантен тор на хамилтоновото векторно поле X_K.

Този тор е слоение от периодични траектории, ако компонентите $\omega_1(I_0), ..., \omega_n(I_0)$ на $\omega(I)$ са рационално зависими.

В общия случай, ако $\omega_1(I_0), ..., \omega_n(I_0)$ са рационално независими, тогава всяко решение $t \to (\varphi_0 + t\omega(I_0), I_0)$, $\varphi_0 \in \mathbb{T}^n$, е квази-периодично и неговата траектория е навсякъде гъста върху тора.

Такива са и интегралните криви на X_H върху $\Lambda(\omega) = \Phi(\mathbb{T}_n \times \{I_0\})$, където $\omega = \omega(I_0)$.

Теоремата на Лиувил-Арнолд показва, че регулярната част на фазовото пространство е слоение на торове на Кронекер.

Тор на Кронекер на хамилтониана H с честота $\omega \in \mathbb{R}^n$ в симплектичното многообразие M е гладко вложено лагранжево подмногообразие $\Lambda(\omega)$ (с вектор на въртене $\omega/2\pi$) на M, дифеоморфно на плоския тор $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$, инвариантно относно потока Φ^t на H и такова, че рестрикцията на Φ^t върху $\Lambda(\omega)$ е гладко спрегнато на линейния поток

$$g^t_\omega(\varphi) := \varphi + t\omega \pmod{2\pi}$$

върху $\mathbb{T}^n$.

С други думи, следната диаграма е комутативна

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}^n & \xrightarrow{g_\omega^t} & \mathbb{T}^n \\ \downarrow f_\omega & & \downarrow f_\omega \\ \Lambda & \xrightarrow{\Phi^t} & \Lambda \end{array} \tag{0.1}$$

за всяко $t \in \mathbb{R}$, където $f_\omega : \mathbb{T}^n \to M$ е съответното влагане с образ $\Lambda(\omega)$.

Един от основните въпроси в хамилтоновата механика е дали тези „торове"се запазват при малки смущения на K (респ. H).

Друг основен въпрос е дали действието остава устойчиво при малки смущения на K (респ. H)

Поанкаре показва, че по принцип рационалните торове съставени само от периодични траектории се разрушават при малки смущения на K (респ. H).

През 60-те години на миналия век Колмогоров, а по-късно и Арнолд и Мозер показват, че ако хамилтонианът K е неизроден, тогава торовете чиито честоти ω удовлетворяват специално аритметично условие, се запазват при малки смущения на K (респ. H) и само малко се деформират.

Аритметичното условие е от диофантов тип и се задава както следва:

Съществуват $\kappa > 0$ и $\tau > n-1$ такива, че

$$\forall\, 0 \neq k \in \mathbb{N}^n : \quad |\langle \omega, k\rangle| \geq \frac{\kappa}{|k|^\tau} \tag{0.2}$$

където $|k| = |k_1| + ... + |k_n|$ и $\langle .,. \rangle$ е скаларното произведение в $\mathbb{R}^n$.

Векторите $\omega \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяващи горното условие наричаме (κ, τ)-диофантови и множеството от тези вектори означаваме с $D(\kappa, \tau)$.

Да отбележим, че за фиксирани $\kappa > 0$ и $\tau > n-1$ това множество е с положителна Лебегова мярка, освен това за всяко фиксирано $\tau > n-1$ обединението на множествата $D(\kappa, \tau)$ по $\kappa > 0$ е с пълна Лебегова мярка.

Условието за неизроденост (по Колмогоров) на хамилтониана $\mathbb{T}^n \times D \ni (\varphi, I) \to K(I)$ означава, че изображението

$$D \ni I \to \omega(I) = \nabla K(I) \in \Omega := \nabla K(D)$$

е дифеоморфизъм.

Ako D е достатъчно малка околност на I_0, условието на Колмогоров е еквивалентно на $\det \frac{\partial^2 K}{\partial^2 I}(I_0) \neq 0$.

Това условие ни позволява да параметризираме фамилията от инвариантни торове $\mathbb{T}^n \times \{I\}$, $I \in D$, на K посредством $\omega = \nabla K(I) \in \Omega$.

Да означим с $\Omega_\kappa \subset \Omega$ множеството от онези $\omega \in D(\kappa, \tau)$, които са на разстояние поне κ от границата на Ω.

Теоремата на Колмогоров-Арнолд-Мозер за реалноаналитични хамилтониани ($(\varphi, I) \to H(\varphi, I)$ е реалноаналитична функция, ако е аналитична и приема реални стойности за реални (φ, I)) гласи както следва:

Теорема 0.3 *(KAM)*

Да предположим, че хамилтонианът K е реалноаналитичен и неизроден в D.

Тогава съществува $\varepsilon > 0$ такова, че всеки реалноаналитичен хамилтониан $H = K+R$ зададен в подходяща околност U на $\mathbb{T}^n \times \bar{D}$ в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ и удовлетворяващ условието $\sup_U |R| < \varepsilon\kappa^2$ притежава за $0 < \kappa < \kappa_0 \ll 1$ фамилия от аналитични торове на Кронекер $\Lambda(\omega)$, $\omega \in \Omega_\kappa$.

Тези торове са ε близки до съответните инвариантни торове на K.

Първоначално този резултат е анонсиран от Колмогоров и доказан от Арнолд за аналитични хамилтониани, а по-късно и за гладки хамилтониани от Мозер. Съответните теореми носят имената на Колмогоров, Арнолд и Мозер (накратко KAM).

Лазуткин и Пьошел (Pöschel) доказаха KAM теорема за хамилтониани с крайна гладкост и показаха, че съответната фамилия от торове на Кронекер $\Lambda(\omega)$, $\omega \in \Omega_\kappa$, е гладка в смисъл на Уитни (Whitney),

което означава,че изображението $\mathbb{T}^n \times \Omega_\kappa \ni (\theta, \omega) \to f_\omega(\theta)$, където f_ω е съответната фамилия от влагания (0.1), може да се продължи като гладко изображение в $\mathbb{T}^n \times \Omega$.

В случая когато $n = 2$, многообразието на ниво $\{H = c\}$ е от размерност 3, а торовете $\Lambda(\omega)$ са от размерност 2, следователно те го разделят на ивици,

които са инвариантни по отношение на потока.

От друга страна, поведението на потока в ивиците и по-общо извън множеството на инвариантните торове е твърде комплексно.

Наблюдава се феномен на неустойчивост известен като дифузия на Арнолд. Арнолд построи пример на хамилтониани близки до напълно интегруем

хамилтониан, такива че за всяко $C > 0$ съществува $T \gg 1$ и интегрални криви на съответните хамилтонови векторни полета за които вариациата на действието в интервала $[0, T]$ е $\sup_{0 \le t \le T} |I(t) - I(0)| > C$.

Джон Мадър (J. Mather) дава примери на хетероклинни траектории на инватиантни торове, т.е. траектории които на $-\infty$ се клонят към един тор, а на $+\infty$ към друг, в частност съответната състема не е устойчива по Ляпунов.

Нехорошев доказва впечатляващ резултат за ефективна устойчивост за реалноаналитични хамилтониани H които са ε близки до неизроден реалноаналитичен хамилтониан K, удовлетворяващ подходящо условие в общо положение наречено „steepness condition"(например всяка строго изпъкнала функция K удовлетворява това условие).

За малки смущениа на такива хамилтониани K теоремата на Нехорошев гласи:

Теорема 0.4 *(Нехорошев)*

Съществуват положителни константи $a, b, c > 0$ такива че ако реалноаналитичният хамилтониан H е достатъчно ε близък до K, то вариацията на действието удовлетворява оценката $|I(t) - I(0)| < \varepsilon^b$ в интервала $0 \le t \le \exp(c/\varepsilon^a)$.

В случая когато K е строго изпъкнала функция Лошак, Пьошел и др. доказват ефективна устойчивост с $a = b = 1/2n$.

Жиоржили (Giorgilli) и Морбидели (Morbidelli) изучават в [24], [25] и [9] ефективна устойчивост на действието за реалноаналитични хамилтониани в околност на аналитичен тор в $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ с диофантов вектор на въртене.

Те доказват, че за всеки аналитичен тор на Кронекер $\Lambda(\omega) = \mathbb{T}^n \times \{I_0\}$, $I_0 \in \mathbb{R}^n$, с (κ, τ)-диофантов вектор на въртене ω, където $\tau > n - 1$,

съществува $c > 0$ такова, че за всяко $\varepsilon > 0$ следната импликация е в сила

$$|I(0) - I_0| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |I(t) - I(0)| < 2\varepsilon \text{ за } 0 \le t \le \exp(c/\varepsilon^{\tau+1}).$$

Подобен резултат за ефективна устойчивост на действието в околност на елиптична точка на равновесие е получен в [8].

Един от основните методи за получаване на ефективна устойчивост на хамилтонови системи е този на нормалните форми на Биркоф (Birkhoff).

Известно е ([20], Твърдение 9.13), че за всеки гладък инвариантен тор на Кронекер $\Lambda(\omega)$ на хамилтониан H с диофантов вектор на въртене $\omega \in D(\kappa, \tau)$, $\tau > n - 1$, съществуват симплектични координати $(\varphi, I) : U \to \mathbb{T}^n \times D$ в околност U на $\Lambda(\omega)$, такива че в тези координати $\Lambda(\omega) = \mathbb{T}^n \times \{I_0\}$, $I_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$, и хамилтонианът H има вида

$$\begin{cases} H(\varphi, I) = K(I) + R(\varphi, I), \quad K \in C^\infty(D),\ R \in C^\infty(\mathbb{T}^n \times D), \\ \text{за} \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n,\ \partial_I^\alpha R(\cdot, I_0) = 0. \end{cases} \tag{0.3}$$

Тази нормална форма води до полиномиална ефективна устойчивост на хамилтоновия поток $\Phi^t = (\varphi(t), I(t))$ на H близо до $\Lambda(\omega)$.

Лесно се вижда,че за всяко $N \in \mathbb{N}$ съществува $C_N > 0$ такова,

че ако $|I(0) - I_0| < \varepsilon$ то

$$|\varphi(t) - t\omega - \varphi(0)| + |I(t) - I_0| < 2\varepsilon$$

за $|t| < C_N \epsilon^{-N}$, понеже R е плоска функция по I в I_0.

Въпросът който ни интересува е дали е в сила експоненциална ефективна устойчивост, т.е. дали можем да заменим по-горе $C_N \epsilon^{-N}$ с $\exp(c/\epsilon^{1/a})$, където a и c са положителни константи.

Това е така, ако функцията R е от класа на Жевре (Gevrey) с индекс $a + 1$ по отношение на действието I.

През 2000 г. Г. Попов [29] доказва КАМ теорема за аналитични неизродени по Колмогоров хамилтониани, в която фамилията от инвариантни торове на Кронекер $\Lambda(\omega)$ с (κ, τ) диофантови вектори на въртене $\omega \in \Omega_\kappa$, е от класа на Жевре (Gevrey) с индекс τ' за всяко $\tau' > \tau + 1 > n$.

Нещо повече, в [29] е построена нормална форма на Биркоф в класа на Жевре $\mathcal{G}^{1,\tau'+1}(\mathbb{T}^n \times D)$ (аналитична по отношение на ъгловата променлива φ и от класа на Жевре с индекс $\tau' > \tau + 1$ по отношение на действието I) за фамилията от инвариантни торове $\Lambda(\omega)$ с вектори на въртене принадлежащи на подмножество $\Omega_\kappa^0 \subset \Omega_\kappa$ с пълна лебегова мярка в Ω_κ.

Оказва се, че класовете на Жевре са естествените класове в които е в сила теорията на Колмогоров, Арнолд, Мозер и Нехорошев.

В [29] Г. Попов доказва КАМ теорема за неизродени хамолтониани от класовете на Жевре $\mathcal{G}^\rho$, $\rho > 1$.

Съответните торове са от същия клас на Жевре, а по отношение на честотата ω зависимостта е от клас $\mathcal{G}^{\rho(\tau+1)+1}$.

Съответната нормална форма на Биркоф е от класа на Жевре $\mathcal{G}^{\rho,\rho(\tau+1)+1}(\mathbb{T}^n \times D$ ($\mathcal{G}^\rho$) по отношение на ъгловата променлива φ и от класа на Жевре $\mathcal{G}^{\rho(\tau+1)+1}$ по отношение на действието I), което води до ефективна устойчивост с експонента $a = \frac{1}{\rho(\tau+1)}$.

Теорията на Нехорошев за гладки по Жевре хамилтониани е развита от Марко (J.-P. Marco) и D. Sauzin [23].

Нормални форми за обратими аналитични векторни полета с експоненциално малка грешка са получени от Iooss и Lombardi [17, 18].

Остава открит проблемът за построяване на нормална форма на Биркоф (НФБ) за всеки индивидуален тор (не само за торовете с вектори на въртене в Ω_κ^0) и без да се налага условие за неизроденост на хамилтониана.

Това е направено в Гл.1 на дисертацията.

Нека M е гладко многообразие.

Да разгледаме формално самоспрегнат диференциален оператор

$$\mathcal{P}_h \ := \ \sum_{j=0}^{J} P_j(x, hD)h^j\,,\ 0 < h \le h_0\,, \tag{0.4}$$

зависещ от малък параметър $h > 0$ и действащ върху полуплътностите в $C^\infty(M, \Omega^{\frac{1}{2}})$, където $P_j(x,\xi)$ са полиноми по ξ с $\mathcal{G}^\rho$, $\rho \ge 1$ гладки коефициенти и $D = (D_1, \ldots, D_n)$, $D_j = -i\partial/\partial x_j$.

Главният символ на $\mathcal{P}_h$ се задава от полинома $P_0(x,\xi)$, $(x,\xi) \in T^*M$.

Предполагаме, че $\deg P_0 > 0$ и че субглавният символ е тъждествено равен на нула.

Да напомним, че субглавният символ е инвариантно дефиниран в T^*M, понеже $\mathcal{P}_h$ действа върху полуплътности.

Типичен пример е операторът на Шрьодингер $P_h(x, hD) := -h^2\Delta + V(x)$ върху гладко риманово многообразие M, където Δ е операторът на Лаплас-Белтрами и V е реалнозначен електричен потенциал.

Главният символ на този оператор е $P_0(x,\xi) = |\xi|_x^2 + V(x)$, където хамилтонианът $(x,\xi) \to |\xi|_x^2$ е зададен чрез преобразованието на Льожандър на римановата метрика, а субглавният символ е 0.

Семейство от гладки квазимоди $\mathcal{Q}$ на $\mathcal{P}_h$ е множество от вида

$$\mathcal{Q} = \{(u_m(\cdot;h), \lambda_m(h)) : m \in \mathcal{M}_h\}, \quad h \in (0, h_0],$$

където $u_m(\cdot;h) \in C_0^\infty(M)$ имат носители във фиксирана ограничена област независеща от h и m, $\lambda_m(h)$ са реалнозначни функции на $h \in (0, h_0]$, $\mathcal{M}_h$ е крайно множество от индекси за всяко h, и за всяко $N \in \mathbb{N}$ съществува $C_N > 0$ такова че

$$(a) \quad \|\mathcal{P}_h u_m \ - \ \lambda_m(h) u_m\|_{L^2} \ \leq \ C_N\, h^N \ , \ m \in \mathcal{M}_h \, ,$$

$$(b) \quad |\langle u_m, u_l\rangle_{L^2} \ - \ \delta_{m,l}| \ \leq \ C_N\, h^N \ , \ m, l \in \mathcal{M}_h \, ,$$

за $0 < h \leq h_0$, където $\delta_{m,l}$ е индексът на Кронекер.

Квазимодите удовлетворяващи горните оценки локализират част от спектъра на оператора $\mathcal{P}_h$ около квазисобствените значения $\lambda_m(h)$.

В случая когато M е гладко компактно риманово многообразие и $P_h(x, hD) := -h^2\Delta + V(x)$, където V е реалнозначен електричен потенциал, спектърът на самоспрегнатия оператор $\mathcal{P}_h$ е дискретен и се състои от реални собствени значения с крайна кратност.

Тогава спектралната теорема за самоспрегнати оператори показва, че за всяко $0 < h < h_0 \ll 1$ операторът P_h има поне две собствени значения в интервала $[\lambda_m(h) - C_N h^N, \lambda_m(h) + C_N h^N]$ (Лазуткин [20]).

Приложения за разпределението на резонансите в случая на оператора на Шрьодингер в $M = \mathbb{R}^n$ са получени в [35].

Съществува обширна литература върху конструкцията на квазимоди за диференциални оператори.

Построяването на квазимоди с носител връу дадено лагранжево подмногообразие на $\mathbb{T}^*M$ е известно сред физиците като асимптотично квантуване.

Основен е приносът на Маслов, който въведе индекса на Маслов като поправка в асимптотичното квантуване в случая на произволни лагранжеви подмногообразия и построи квазимоди посредством каноничния оператор на Маслов.

Съвременно изложение на конструкцията на квазимоди посредством теорията на Маслов е дадено в книгата на Лазуткин [20].

Конструкция на квазимоди посредством теорията на интегралните оператори на Фурие е описана в [4], [6] и др.

Естествен е въпросът дали съществува асимптотично квантуване на лагранжеви многообразия с експоненциално малка грешка.

Г. Попов построява в [30] и [31] квазимоди в класовете на Жевре.

Казваме, че $\mathcal{Q} = \{(u_m(\cdot;h), \lambda_m(h)) : m \in \mathcal{M}_h\}$, $h \in (0, h_0]$ е фамилия от квазимоди от класа на Жевре $\mathcal{G}^\nu$ (накратко $\mathcal{G}^\nu$ квазимоди), ако

$$(i) \quad \|\mathcal{P}_h u_m \ - \ \lambda_m(h) u_m\|_{L^2} \ \leq \ C\, e^{-c/h^{1/\nu}} \ , \ m \in \mathcal{M}_h \, ,$$

$$(ii) \quad |\langle u_m, u_l\rangle_{L^2} \ - \ \delta_{m,l}| \ \leq \ C\, e^{-c/h^{1/\nu}} \ , \ m, l \in \mathcal{M}_h \, ,$$

за $0 < h \leq h_0$, където C и c са положителни константи.

Спектралната теорема ни позволява да локализираме част от спектъра на оператора $\mathcal{P}_h$ в експоненциално малки околности на квазисобствените значения $\lambda_m(h)$.

Да предположим, че M е компактно многообразие и че $\mathcal{P}_h$ е самоспрегнат оператор в $L^2(M)$.

Лесно се вижда, че за всяко $m \in \mathcal{M}_h$ разстоянието от $\lambda_m(h)$ до спектъра на $\mathcal{P}_h$ се оценява отдолу чрез

$$d_m(h) := |\,\mathrm{Spec}\,(\mathcal{P}_h) \ - \ \lambda_m(h)| \ \leq \ C\, e^{-c/h^{1/\nu}} .$$

Наистина, ако $d_m(h) \neq 0$ тогава (i), (ii) и спектралната теорема дават

$$\frac{1}{d_m(h)} \geq \|(\mathcal{P}_h - \lambda_m(h))^{-1}\| \geq \|(\mathcal{P}_h - \lambda_m(h)) u_m(h)\|^{-1} \geq \left(C\, e^{-c/h^{1/\nu}}\right)^{-1} .$$

Основна характеристика на фамилия от $\mathcal{G}^\nu$ квазимоди $\mathcal{Q}$ е
съответния $\mathcal{G}^\nu$ микро носител (h вълнов фронт) $\mathrm{WF}_h^\nu(\mathcal{Q}) \subset \mathbb{T}^*(M)$.

Казваме, че $(x_0, \xi_0) \notin \mathrm{WF}_h^\nu(\mathcal{Q})$ ако съществуват компактни околности U на x_0 и V на ξ_0 в зададена локална карта, такива че за всяка $\mathcal{G}^\nu$-гладка функция v с носител в U

$$\int e^{-i\langle x, \xi\rangle/h}\, v(x) u_m(x,h) dx \ = \ O\left(e^{-c/h^{1/\nu}}\right), \ h \in (0, h_0],$$

равномерно по отношение на $m \in \mathcal{M}_h$ и $\xi \in V$.

Г. Попов построява в [30] и [31] квазимоди в класовете на Жевре, чиито микроносител е обединението на фамилията от инвариантни торове $\Lambda(\omega)$, $\omega \in \Omega^0_\kappa$, в случая когато хамилтониана $H = P_0$ е Жевре гладък и неизроден по Колмогоров.

Интересен е въпросът дали може да се построят квазимоди в класовете на Жевре, чиито микроносител е произволен Жевре-гладък тор на

Кронекер $\Lambda(\omega)$ с диофантов вектор на въртене без да се налага условие за неизроденост на главния символ и при това тези квазимоди да са с експоненциално малка грешка.

Използвайки НФБ получена в Гл.1, в Гл.2 получаваме квантова нормална форма на Биркоф (КНФБ) и след това построяваме като следствие и квазимодите с горепосочените свойства.

0.2 Основни резултати

Нека $\rho \geq 1$ и нека X е $\mathcal{G}^\rho$-гладко симплектично многообразие с размерност $2n$.

Нека H е $\mathcal{G}^\rho$-гладък хамилтониан в X.

Казваме, че Λ е $\mathcal{G}^\rho$-гладък тор на Кронекер на H с честота $\omega \in \mathbb{R}^n$, ако Λ е лагранжево подмногообразие (с вектор на въртене $\omega/2\pi$) на X което е инвариантно относно потока Φ^t на H и ако съществува $\mathcal{G}^\rho$-гладко влагане $f : \mathbb{T}^n \to X$, такова че $\Lambda = f(\mathbb{T}^n)$ и $\Phi^t \circ f = f \circ g^t_\omega$ за всяко $t \in \mathbb{R}$,

т.е. диаграмата (0.1) е комутативна за всяко $t \in \mathbb{R}$.

Да припомним, че $g^t_\omega(\varphi) = \varphi + t\omega \pmod{2\pi}$.

От тук нататък предполагаме, че ω е (κ, τ)-диофантово за някое $\kappa > 0$ и $\tau > n - 1$, т.е. че ω удовлетворява (0.2).

Да отбележим, че ако X е точно симплектично (симплектичната 2-форма е точна) и ако ω е дифантово, тогава Λ е лагранжево ([19] Параграф. I.3.2.).

Съществуването на $\mathcal{G}^\rho$-гладки торове на Кронекер в $\mathbb{A} := \mathbb{T}^n \times D$ с честоти ω удовлетаоряващи (0.2) се получава от съответната КАМ теорема.

Резултатите в [31, Теореми 1.1 и 3.12] и [29] ни дават, че ако $H \in \mathcal{G}^\rho(\mathbb{A})$ е "малко" (по отношение на κ^2) реалноаналитично смущение на напълно интегруем хамилтониан удовлетворяващ условието за неизроденост на Колмогоров, тогава съществува канторово множество с положителна лебегова мярка $\Omega_\kappa \in \mathbb{R}^n$ състоящо се от честоти удовлетворяващи (0.2) такова, че за всяко $\omega \in \Omega_\kappa$ съществува $\mathcal{G}^\rho$-гладък тор на Кронекер Λ_ω с честота ω.

В аналитичния случай ($\rho = 1$) това следва от класическата КАМ теорема.

Освен това фамилията Λ_ω, $\omega \in \Omega_\kappa$, е $\mathcal{G}^\mu$-гладка по Уитни (Whitney), където $\mu = \rho(\tau + 1) + 1$ за $\rho > 1$ и

μ е кое да е число по-голямо от $\tau + 2$ за $\rho = 1$ ([29, 31, 36]).

Основният резултат в първата глава на дисертацията е свързан с построяването на нормална форма на Биркоф на хамилтониана H в околност на произволен тор на Кронекер с диофантов вектор на въртене.

Теорема 0.5 *Нека $\omega \in \mathbb{R}^n$ удовлетворява (κ, τ)-диофантовото условие (0.2), където $\kappa > 0$ и $\tau > n - 1$.*

Нека да фиксираме $\rho \geq 1$ и да положим $\mu = \rho(\tau+1)+1$.

Нека $H \in \mathcal{G}^{\rho}(X,\mathbb{R})$ и нека Λ е $\mathcal{G}^{\rho}$-гладък тор на Кронекер на H с честота ω.

Тогава съществува околност D в $\mathbb{R}^n$ и симплектично изображение $\chi \in \mathcal{G}^{\rho,\mu}(\mathbb{A},X)$, където $\mathbb{A} = \mathbb{T}^n \times D$ такива, че $\chi(\mathbb{T}^n_0) = \Lambda$ и

$$\begin{cases} H(\chi(\varphi,I)) = H^0(I) + R^0(\varphi,I), \ \textit{където}\ H^0 \in \mathcal{G}^{\mu}(D),\ R^0 \in \mathcal{G}^{\rho,\mu}(\mathbb{A}), \\ \textit{и}\ \partial_I^{\alpha} R^0(\varphi,0) = 0\ \textit{за всяко}\ \varphi \in \mathbb{T}^n\ \textit{и}\ \alpha \in \mathbb{N}^n\,. \end{cases}$$

Тази теорема ни дава $\mathcal{G}^{\rho,\mu}$ нормална форма на Биркхоф за всеки $\mathcal{G}^{\rho}$-гладък тор на Кронекер Λ.

Тази нормална форма води до ефективна устойчивост не само на действието, но и на квази-периодичните траектории в околност на Λ както в [31, Следствие 1.3]).

Освен това, методът който използваме ни позволява да следим съответните константи в оценките от типа на Жевре.

Интересен е въпросът дали експонентата $\mu = \rho(\tau+1)+1$ е оптимална.

Тук ще отбележим, че същата експонента се появява в КАМ теоремата за $\mathcal{G}^{\rho}$ хамилтониани [31, Следствие 1.2].

В случая на аналитични хамилтониани ($\rho = 1$)

Morbidelli и Giorgilli [25, §3. Discussion] дадоха евристичен аргумент за това че експонентата $\mu = \tau + 2$ е оптимална.

Теорема 0.6 ни позволява да построим асимптотично квантуване с експоненциално малка грешка за h-диференциални оператори P_h от вида (0.4) с $\mathcal{G}^{\rho}$ коефициенти в $\mathcal{G}^{\rho}$ многообразие M, $\dim M = n$, където $\rho > 1$.

Да предположим, че $\Lambda \subset T^*M$ е тор на Кронекер на главния символ H на P_h.

Рестрикциата $\xi dx|_{\Lambda}$ на каноничната едно-форма ξdx на T^*M върху Λ е затворена едно-форма, понеже Λ е лагранжево подмногообразие на T^*M.

Съответния клас на кохомологии $[\xi dx|_{\Lambda}] \in H^1(\Lambda,\mathbb{R})$ се нарича клас на Лиувил.

Посредством влагането $f : \mathbb{T}^n \to T^*M$, $f(\mathbb{T}^n) = \Lambda$, удовлетворяващо (0.1), отъждествяваме класа на Лиувил с елемент $I_0 \in H^1(\mathbb{T}^n)$.

Задавайки базис от цикли γ_j, $j = 1,\dots,n$, на $H_1(\mathbb{T}^n)$, получаваме отъждествяването $H^1(\mathbb{T}^n) = \mathbb{R}^n$ и в частност

$$I_0 = \left(\int_{\gamma_1} \xi dx, \cdots, \int_{\gamma_n} \xi dx\right). \tag{0.5}$$

По същия начин отъждествяваме класа на Маслов на Λ в $H^1(\Lambda,\mathbb{R})$ с елемент $\vartheta \in H^1(\mathbb{T}^n,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$.

Множество от индекси на квазимодата определяме за всяко $0 < h \leq h_0$ посредством условието за квантуване

$$\mathcal{M}_h \ = \ \{m \in \mathbb{Z}^n :\ |\, h(m+\vartheta/4) \ - \ I_0| \ \leq \ Lh\}\ ,$$

където $L > 0$.

Следната теорема ни дава асимптотично квантуване върху Λ с експоненциално малка грешка.

Теорема 0.6 *Да предположим, че $\Lambda \subset T^*M$ е $\mathcal{G}^\rho$ гладък тор на Кронекер на главния символ H на P_h с диофантов вектор на въртене.*

Тогава съществува $\mathcal{G}^\nu$ квазимода

$$\mathcal{Q} \;=\; \{(u_m(x,h), \lambda_m(h)) :\; m \in \mathcal{M}_h\}$$

на $\mathcal{P}_h$ такава, че $MS^\nu(\mathcal{Q}) \;=\; \Lambda$.

По-прецизна формулировка на тази теорема е дадена в Следствие 3.1, където квазисобствените значения $\lambda_m(h)$ са получени посредством подходяща квантова нормална форма на Биркоф.

0.3 Основни понятия - хамилтонова динамика и класове на Жевре

Нека X е ограничена област в $\mathbb{R}^n$, $\rho \geq 1$ и $L > 0$.

Означаваме с $\mathcal{G}^\rho_L(X)$ множеството от всички C^∞-гладки реалнозначни функции H в X такива че

$$\|H\|_L := \sup_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \sup_{x\in X} \left(\left|\partial_x^\alpha H(x)\right| L^{-|\alpha|}\alpha!^{-\rho}\right) < \infty \,, \tag{0.6}$$

където $\mathbb{N}$ е множеството на неотрицателните цели числа, $\alpha! = \alpha_1!\cdots\alpha_n!$ и $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ за $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

Казваме, че функцията H е $\mathcal{G}^\rho$-гладка в X ако тя удовлетворява (0.6) за някое $L > 0$.

По същия начин, използвайки локални координати, дефинираме $\mathcal{G}^\rho$-гладки многообразия X с размерност n и $\mathcal{G}^\rho$-гладки функции върху тях.

Да отбележим, че $\mathcal{G}^1$-гладкост съвпада с аналитичност.

От друга страна, класът на $\mathcal{G}^\rho$-гладките функции не е квазианалитичен за $\rho > 1$ (в тези класове съществуват функции с компактни носители).

Теоремата за обратната функция и теоремата ва неявната функция в класовете на Жевре са доказани в [15],[21] и [31].

В КАМ теоремата в класовете на Жевре се наблюдава загуба на гладкост по отношение на променливата действие, която се описва в подходящи нехомогенни пространства на Жевре.

Тези пространства се дефинират както следва:

Нека $\rho, \mu \geq 1$ и L_1, L_2 са положителни константи.

Разглеждаме $\mathbb{A} := \mathbb{T}^n \times D$ снабдено с каноничната симплектична форма, където $D \subset \mathbb{R}^n$ е област, и означаваме с $\mathcal{G}^{\rho,\mu}_{L_1,L_2}(\mathbb{A})$ множеството C^∞-гладките реалнозначни хамилтониани H в $\mathbb{A}$ такива, че

$$\|H\|_{L_1,L_2} := \sup_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n} \sup_{(\theta,I)\in\mathbb{A}} \left(|\partial_\theta^\alpha \partial_I^\beta H(\theta,I)| \, L_1^{-|\alpha|} L_2^{-|\beta|} \alpha!^{-\rho} \beta!^{-\mu} \right) < \infty. \qquad (0.7)$$

Казваме, че хамилтониана H е $\mathcal{G}^{\rho,\mu}$-гладък в $\mathbb{A}$, ако той принадлежи на $\mathcal{G}^{\rho,\mu}_{L_1,L_2}(\mathbb{A})$ за подходящи L_1, L_2.

Числата $\rho \geq 1$ и $\mu \geq 1$ в (0.7) се наричат експоненти на Жевре, а положителните константи L_1 и L_2 се наричат константи на Жевре.

Казваме, че две двойки от константи на Жевре L_1, L_2 и $\tilde{L}_1$, $\tilde{L}_2$ са *еквивалентни*, ако съществуват $c_1(n,\rho,\mu) > 0$ и $c_2(n,\rho,\mu) > 0$ такива, че $\tilde{L}_1 = c_1(n,\rho,\mu)L_1$ и $\tilde{L}_2 = c_2(n,\rho,\mu)L_2$.

Дисертацията се състои от увод, три глави (съдържащи общо 13 параграфа и 3 подпараграфа) и цитирана литература.

Кратко описание на Гл.1, Гл.2 и на Гл.3.

Глава 1

Нормални форми на Биркоф

Тази глава съдържа резултатите от [39].

1.1 Нормални форми на Биркоф в класовете на Жевре и ефективна устойчивост

Ще редуцираме проблема към случая на Жевре- гладък (реалноаналитичен) хамилтониан в $\mathbb{A} = \mathbb{T}^n \times D$ притежаващ тор на Кронекер $\mathbb{T}^n_0 = \mathbb{T}^n \times \{0\}$, където D е свързана околност на 0 в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{A}$ е снабдено с каноничната симплектична 2-форма.

Съгласно една теорема на Weinstein съществува симплектична трансформация $\chi_0 : \mathbb{A} \to X$ такава, че $\chi_0(\mathbb{T}^n_0) = \Lambda$ и $\chi_0 \circ \imath = f$, където $\imath(\theta) = (\theta, 0) \in \mathbb{T}^n_0$ за всяко $\theta \in \mathbb{T}^n$.

За да конструираме χ_0 ние първо намираме тръбна околност U на Λ в $T^*\Lambda$ и $\mathcal{G}^\rho$-гладка симплектична трансформация $F : U \to X$ която изобразява нулевото сечение на Λ в $T^*\Lambda$ в Λ.

Ако $\rho > 1$ всичко следва от доказателството на Weinstein.

В реалноаналитичния случай ($\rho = 1$),

първо вземаме C^∞-гладко симплектично изображение F_0 с това свойство,

което съществува съгласно теоремата на Weinstein , след това го апроксимираме с реалноаналитично изображение, след това използваме един резултат на Moser за да намерим F.

Нека $\tilde{f} = F^{-1} \circ f$.

Аргументирайки се както в доказателството на Твърдение 9.13 [20], намираме $\mathcal{G}^\rho$-гладко симплектично изображение χ_1 от ограничена околност $\mathbb{A} = \mathbb{T}^n \times D$ на тора $\mathbb{T}^n_0$ в $T^*\mathbb{T}^n$ върху тръбна околност на нулевото сечение на Λ в $T^*\Lambda$ такова, че $\chi_1 \circ \imath = \tilde{f}$, и означаваме $\chi_0 = F \circ \chi_1$.

В частност, $\chi_0(\mathbb{T}^n_0) = \Lambda$.

Освен това „ pull-back"на хамилтоновото векторно поле към $\mathbb{A}$ е глобално хамилтоново и означаваме с $H \in \mathcal{G}^\rho(\mathbb{A}, \mathbb{R})$ неговия хамилтониан в $\mathbb{A}$.

От (0.1) следва, че рестрикцията на потока на хамилтоновото векторно поле на H в $\mathbb{T}_0^n$ е просто g_ω^t.

Освен това, $H(\theta, 0)$ е константа тъй като потокът е транзитивен в $\mathbb{T}_0^n$, и затова можем да считаме че е равно на нула.

Следователно,

$$H(\theta, r) = \langle \omega, r\rangle + \widetilde{H}(\theta, r),\ \widetilde{H} \in \mathcal{G}^{\rho,\rho}(\mathbb{A}),\ \widetilde{H}(\theta, r) = O(|r|^2). \tag{1.1}$$

Означаваме с $\Gamma(t)$, $t > 0$, Гама функцията на Ойлер (3.1).

Използвайки Заб.3.1 получаваме съответната Жевреевска оценка както следва

$$|\partial_\theta^\beta \partial_r^\alpha \widetilde{H}(\theta, r)| \le L_0 L_1^{|\beta|} L_2^{|\alpha|-1}\, \alpha!\, \Gamma(\rho|\beta| + 1)\Gamma((\rho - 1)|\alpha| + 1) \tag{1.2}$$

за всяко $(\theta, r) \in \mathbb{A}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, където L_0, L_1 и L_2 са положителни константи като $L_0 \ge 1$, $L_1 \ge 1$ и $L_2 \ge 1$.

Гладката функция $g(\theta, I)$ в $\mathbb{A}' = \mathbb{T}^n \times D'$ се нарича пораждаща за каноничната трансформация $\chi : \mathbb{A}' \to \mathbb{A}$, ако

$$\begin{aligned} &\operatorname{graph}\chi := \{(\chi(\varphi, I); (\varphi, I)) :\ (\varphi, I) \in \mathbb{A}'\} \\ &= \left\{ \left(\theta, I + \frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta, I); \theta + \frac{\partial g}{\partial I}(\theta, I), I \right) \right\}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Без да ограничаваме общноста можем да предполагаме, че $\kappa \le 1$ в (0.2).

Теорема 0.6 следва от следната

Теорема 1.1 *Нека $\rho \ge 1$ и $H \in \mathcal{G}^{\rho,\rho}(\mathbb{A}, \mathbb{R})$. Предполагаме, че H удовлетворява (1.1) и (1.2), където $\omega \in \mathbb{R}^n$ е (κ, τ)-диофантово и $0 < \kappa \le 1$ и $\tau > n - 1$. Означаваме $\mu = \rho(\tau + 1) + 1$.*

Тогава същесвува околност D' на 0 в $\mathbb{R}^n$ и функция $g \in \mathcal{G}^{\rho,\mu}_{C_1,C_2}(\mathbb{A}', \mathbb{R})$, $g(\theta, I) = O(|I|^2)$ в $\mathbb{A}' = \mathbb{T}^n \times D'$, пораждаща канонична трансформация $\chi \in \mathcal{G}^{\rho,\mu}(\mathbb{A}', \mathbb{A})$ такава, че

$$\begin{cases} H(\chi(\varphi, I)) = H^0(I) + R^0(\varphi, I), \\ \text{където } H^0 \in \mathcal{G}^\mu_{C_2}(D', \mathbb{R}),\ R^0 \in \mathcal{G}^{\rho,\mu}(\mathbb{A}', \mathbb{R}), \\ \text{и } \partial_I^\alpha R^0(\theta, 0) = 0 \text{ за всяко } \alpha \in \mathbb{N}^n. \end{cases} \tag{1.4}$$

Освен това , константите C_1 и C_2 са еквивалентни на L_1 и $\frac{1}{\kappa} L_0 L_1^{\tau+n+4} L_2$ съответно, , т.е.

$$C_1 = c_1(\rho, \tau, n) L_1 \quad \text{и} \quad C_2 = c_2(\rho, \tau, n) \frac{1}{\kappa} L_0 L_1^{\tau+n+4} L_2\,, \tag{1.5}$$

където c_1 и c_2 са положителни константи, зависещи само от ρ, τ и n, докато κ е константата от (0.2).

Забележка 1.1 *Да отбележим, че* $\chi \in \mathcal{G}^{\rho,\mu}_{C_1,C_2}(\mathbb{A}', \mathbb{A})$ *и* $R^0 \in \mathcal{G}^{\rho,\mu}_{C_1,C_2}(\mathbb{A}', \mathbb{R})$, *където Жевреевските константи* C_1 *и* C_2 *са еквивалентни на* L_1^2 *и* $\frac{1}{\kappa}L_0 L_1^{\tau+n+6}L_2$ *съответно, т.е.*

$$C_1 = c_1(\rho,\tau,n)L_1^2 \quad и \quad C_2 = c_2(\rho,\tau,n)\frac{1}{\kappa}L_0 L_1^{\tau+n+6}L_2\,, \tag{1.6}$$

(Теорема 1.1 и Заб.1 1.1 са доказани в 1.4.)

От формулата на Тейлор от ред m приложена за $R^0(\varphi, I)$ при $I = 0$ получаваме за всички $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, $m \in \mathbb{N}$, и $(\varphi, I) \in \mathbb{T}^n \times D'$ следната оценка

$$|\partial_\varphi^\alpha \partial_I^\beta R^0(\varphi, I)| \ \leq \ A\, C_1^{|\alpha|} C_2^{|\beta|+m}\, \alpha!^{\,\rho} \beta!^{\,\mu}\, m!^{\,\mu-1} |I|^m\,,$$

където $A > 0$ и положителните константи C_1 и C_2 са от (1.6).

Използвайки формулата на Стирлинг можем да оптимизираме дясната страна относно $m \in \mathbb{N}$.

Оптимален избор за m е

$$m \sim (C_2|I|)^{-\frac{1}{\rho(\tau+1)}}\,,$$

откъдето следва

$$\begin{aligned} |\partial_\varphi^\alpha \partial_I^\beta R^0(\varphi, I)| \ &\leq \ A\, C_1^{|\alpha|} C_2^{|\beta|}\, \alpha!^{\,\rho} \beta!^{\,\mu} \\ &\times \ \exp\Big(- (C_2|I|)^{-\frac{1}{\rho(\tau+1)}} \Big) \end{aligned} \tag{1.7}$$

за всички $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ равномерно относно $(\varphi, I) \in \mathbb{T}^n \times D'$, където C_1 и C_2 са както в (1.6).

Както в [31, Следствие 1.3] от тази оценка получаваме ефективна устойчивост на квази-периодичното движение в близост на инвариантните торове.

1.2 Норми на Винер

За да получим по-точни оценки в класовете на Жевре ще използваме един тип норми въведени от Винер (weighted Wiener norms).

Тези норми добре се адаптират при решаването на тъй нареченото хомологично уравнение и ни дават точни оценки за нормата на произведението на две функции.

Разглеждаме функция $u \in C(\mathbb{T}^n)$.

Означаваме с u_k, $k \in \mathbb{Z}^n$, съответните коефициенти на Фурие, и с

$$\langle u \rangle := u_0 = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} u(\varphi) d\varphi$$

средната стойност на u върху $\mathbb{T}^n$.

За всяко $s \in \mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ определяме съответната норма на Винер на u както следва

$$S_s(u) \,:=\, \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1+|k|)^s |u_k| \,,$$

където $|k| = |k_1| + \cdots + |k_n|$, $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Съответното пространство на Винер (weighted Wiener space) $\mathcal{A}^s(\mathbb{T}^n)$, $s \geq 0$, е банахово за всички $u \in C(\mathbb{T}^n)$ такива, че $S_s(u) < \infty$ относно нормата S_s.

Пространството $\mathcal{A}^s(\mathbb{T}^n)$ е банахова алгебра , при това ако $u, v \in \mathcal{A}^s(\mathbb{T}^n)$ то $S_s(uv) \leq S_s(u) S_s(v)$.

Освен това, в сила са следните релации между пространствата на Винер и пространствата на Хьолдер:

$$C^q(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow \mathcal{A}^s(\mathbb{T}^n) \hookrightarrow C^s(\mathbb{T}^n)\,,$$

за всяко $s \geq 0$ и $q > s + n/2$, и съответните влагания са непрекъснати.

Първата релация е частен случай на теорема на Бернщайн (Bernstein) (при $n = 1$) и на нейни обобщения за $n \geq 2$ (вж. [1, Chap. 3, § 3.2]).

Повече информация за тези пространства може да се намери например в [33].

Разглежданите пространства на Винер много добре се адаптират при решаването на хомологичното уравнение

$$\mathcal{L}_\omega u(\varphi) = f(\varphi) \tag{1.8}$$

където $\mathcal{L}_\omega := \langle \omega, \frac{\partial}{\partial \theta} \rangle$.

В сила е следната:

Лема 1.1 *Нека ω удовлетворява (κ, τ)-диофантовото условие (0.2) и нека $s \geq 0$.*

Тогава за всяка $f \in \mathcal{A}^{s+\tau}(\mathbb{T}^n)$, такава че $\langle f \rangle = 0$ хомологичното уравнение

$$\mathcal{L}_\omega u = f\,, \quad \langle u \rangle = 0,$$

има единствено решение $u \in \mathcal{A}^s(\mathbb{T}^n)$, и е в сила оценката

$$S_s(u) \,\leq\, \frac{1}{\kappa}\, S_{s+\tau}(f)\,.$$

Така, че ние се нуждаем от точни оценки за нормите на Винер на произведение от две функции uv ($u, v \in \mathcal{A}^s(\mathbb{T}^n)$).

Нека $[s] \in \mathbb{Z}$ е цялата част на $s \in \mathbb{R}$ и $\{s\} = s - [s] \in [0, 1)$ е дробната му част.

Лема 1.2 *За всички $s \in \mathbb{R}_+$ и $u, v \in \mathcal{A}^s(\mathbb{T}^n)$ е в сила*

$$S_s(uv) \leq 2 \sum_{m=0}^{[s]} \binom{[s]}{m} \left[S_{s-m}(u) S_m(v) + S_{s-m}(v) S_m(u) \right].$$

Подобно неравенство може да получим и за соболевата s-норма на uv, но там се получава допълнителен множител $2^{s/2}$, идващ от неравенството $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, което не позволява да получим необходимите ни оценки в параграф 1.4 (това е защото ще се променя константата на Жевре при всяка стъпка от конструкцията).

За да оценим сумата в дясната страна на Лема 1.2, ще разгледаме следните модифицирани норми на Винер

$$P_s(u) \,=\, (s+1)^2 S_s(u)\,,\ s\geq 0\,,\ u\in \mathcal{A}^s(\mathbb{T}^n)\,.$$

Ако $f \in \mathcal{A}^{s+\tau}(\mathbb{T}^n)$ и $\langle f\rangle = 0$, и ако $u \in \mathcal{A}^s(\mathbb{T}^n)$ е решение на хомологичното уравнение (1.8) такова, че $\langle u\rangle = 0$, то от (1.1) получаваме

$$P_s(u) \,= (s+1)^2 S_s(u) \,\leq\, \frac{(s+\tau+1)^2}{\kappa}\, S_{s+\tau}(f) = \frac{1}{\kappa}\, P_{s+\tau}(f)\,. \tag{1.9}$$

Освен това , за всички $u, v \in \mathcal{A}^s(\mathbb{T}^n)$ от (1.2) следва следната оценка

$$\begin{aligned} P_s(uv) \,&\leq\, 2\sum_{m=0}^{[s]} \frac{(s+1)^2}{(m+1)^2(s-m+1)^2} \\ &\times \binom{[s]}{m}\left[P_{s-m}(u)P_m(v) + P_{s-m}(v)P_m(u)\right] \\ &\leq\, \widetilde{C} \sup_{0\leq m\leq [s]} \left\{\binom{[s]}{m}\left[P_{s-m}(u)P_m(v) + P_{s-m}(v)P_m(u)\right]\right\}\,, \end{aligned} \tag{1.10}$$

където $\widetilde{C} = 16\sum_{q=1}^{\infty} q^{-2} = 8\pi^2/3$.

Друго полезно свойство на нормата $P_s(\cdot)$, $s\geq 0$, е следното

$$P_s(\partial^\alpha u) \leq P_{s+|\alpha|}(u)$$

за всички $\alpha \in \mathbb{N}^n$ и $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

1.3 Решаване на хомологичното уравнение

Конструкция на функцията g.

Идеята е да напишем явно съответния ред на Тейлор и да направим някои Жевреевски оценки за него и след това да използваме теоремата на Борел за продължение в класове на Жевре.

1.4 Жевреевски оценки

Глава 2

Асимптотично квантуване с експоненциално малка грешка

Тази глава съдържа част от резултатите получени в [40, 41, 42].

2.1 Въведение

Методът на асимптотичното квантуване е въведен от Маслов и ни дава асимптотични решения на стационарното уравнвние на Шрьодингер $(\hat{H}-E)\phi = 0$, където $\hat{H}$ е квантовият хамилтониан и константата на Планк h е малък параметър, $h \searrow 0$.

Нека Λ е лагранжево многообразие във фазовото пространство , съдържащо се в неизродено ниво на енергия $H^{-1}(E)$ на класически хамилтониан H и σ е полуплътност върху Λ , която е инвариантна относно класическия хамилтонов поток.

Методът на Маслов съпоставя на (Λ, σ) асимптотично решение φ_h на уравнението $(\hat{H}-E)\phi_h = O(h^2)$, $\|\phi_h\|_{L^2} = 1$, при $h \searrow 0$, където E удовлетворявя квантовото условие на Бор-Зомерфелд (Bohr-Sommerfeld) .

По-общо този метод ни дава двойки $(E(h), \phi_h)$ за които $(\hat{H}-E(h))\phi_h = O_N(h^N)$, $\|\phi_h\|_{L^2} = 1$, при $h \searrow 0$ за всяко $N \geq 2$.

Такива двойки се наричат квазимоди с полиномиално малко отклонение $O_N(h^N)$ по отношение на h.

Тази глава е посветена на асимптотично квантуване с експоненциално малко отклонение по отношение на малкия параметър h.

Ще конструираме квазимоди на формално самоспрегнати h-(псевдо) диференциални оператори от шрьодингеров тип с експоненциално малко отклонение $O(\exp(-c/h^a))$ когато $h \searrow 0$, където a и c са положителни константи.

Като следствие ще получим локализация (по модул експоненциално малка грешка) на голяма част от спектъра (резонансите) на определени класове от самоспрегнати h-псевдодиференциални оператори.

2.2 Символи и h-псевдодиференциални оператори (h-ПДО) в класове на Жевре

2.2.1 Символи в класове на Жевре

Дефинираме символи на Жевре в анизотропни пространства на Жевре както следва по-долу.

Фиксираме $1 \le \rho \le \mu$ и множество $\ell := (\rho, \mu)$.

Нека X е област в $\mathbb{R}^n$ или $X = \mathbb{T}^n$, D е област в $\mathbb{R}^n$ и $h_0 > 0$.

Функцията $p : X \times D \times (0, h_0] \to \mathbb{C}$, се нарича символ на Жевре от ред ℓ (или по-кратко $\mathcal{G}^\ell$ - символ), ако

(s$_1$) $p(\cdot, \cdot; h)$ е гладка по отношение на (x, ξ) за всяко $0 < h \le h_0$,

(s$_2$) носителят на $p(\cdot, \cdot; h)$ се съдържа във фиксирано компактно подмножество на $X \times D$ независимо от $h \in (0, h_0]$,

(s$_3$) съществуват положителни константи A_0 и C за които

$$\sup_{X\times D\times(0,h_0]} \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi;h)\right| \le A_0 C^{|\alpha|+|\beta|}\, \alpha!^{\,\rho}\, \beta!^{\,\mu}$$

за всички мулти-индекси α, β.

Класът от $\mathcal{G}^\ell$-символи ще означаваме с $\mathcal{G}S_\ell^0(X \times D \times (0, h_0])$.

По-общо ще означаваме $\mathcal{G}S_\ell^m := h^{-m}\mathcal{G}S_\ell^0$ за всяко $m \in \mathbb{R}$.

Дефинираме резидуалният клас от символи както следва:

$$\mathcal{G}S_\ell^{-\infty}(X \times D \times (0, h_0])$$

е множеството от всички символи g, за които

$$\sup_{X\times D\times(0,h_0]} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta\, q(x,\xi;h)| \ \le\ h^N\, A_1 A^{N+1}\, C^{|\alpha+\beta|}\, \alpha!^{\,\rho}\, \beta!^{\,\mu}\, N!^{\,\nu} \tag{2.1}$$

за някои положителни константи A_1, A и C , за всяко $N \in \mathbb{N}$, и за произволни мулти-индекси $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

Дефинираме клас от формални символи на Жевре
$\mathcal{F}\mathcal{G}S_\ell^0(X \times D \times (0, h_0])$ както следва:

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j(x,\xi;h)\, h^j \tag{2.2}$$

е формален символ на Жевре,

ако p_j, $j \in \mathbb{N}$, е редица от $\mathcal{G}^\ell$-функции в $X \times D$ такива, че $\operatorname{supp} p_j$ се съдържа във фиксирано компактно подмножество на $X \times D$, независещо от $j \in \mathbb{N}$ и от $h \in (0, h_0]$, и освен това съществуват положителни константи A, B и C, за които

$$\sup_{X\times D\times(0,h_0]} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p_j(x,\xi;h)| \ \le \ AB^j\, C^{|\alpha|+|\beta|}\, \alpha!^{\,\rho}\, \beta!^{\,\mu}\, j!^{\,\nu} \tag{2.3}$$

за произволни мулти-индекси α, β и $N \in \mathbb{N}$, където $\nu := \rho + \mu - 1$.

$\mathcal{G}^\ell$-символът $p \in \mathcal{G}S^0_\ell(X \times D \times (0, h_0])$, се нарича $\mathcal{G}^\ell$-реализация на формалния символ даден по-горе , ако удовлетворява следното условие:

(s_4) съществуват положителни константи A_1, B_1 и C_1 зависещи само от A, B и C такива, че

$$\sup_{X\times D\times(0,h_0]} \big|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (p(x,\xi;h) - \sum_{j=0}^{N} p_j(x,\xi;h)h^j)\big|$$
$$\le \ h^{N+1}\, A_1 B_1^{N+1}\, C_1^{|\alpha|+|\beta|}\, \alpha!^{\,\rho}\, \beta!^{\,\mu}\, (N+1)!^{\,\nu}$$

за произволни мулти-индекси α, β и $N \in \mathbb{N}$.

Очевидно, два символа p и p' са реализация на формалния символ (2.2) тогава и само тогава, когато $p - p'$ принадлежи на резидуалния клас $\mathcal{G}S^{-\infty}_\ell$.

Лема 2.1 *За всяко $\eta > 0$, функцията*

$$p(x,\xi;h) \ = \sum_{j\le \eta(Bh)^{-1/\nu}} p_j(x,\xi;h)\, h^j\,,$$

е реализация на формалния символ (2.2) *когато* $0 < h \le h_0 \le \eta^\nu B^{-1}$.

]

Както по-горе означаваме $\mathcal{FG}S^m_\ell := h^{-m}\mathcal{FG}S^0_\ell$ за произволно $m \in \mathbb{R}$.

Ще казваме, че

$$p \in \mathcal{G}S^m_\ell(X \times D \times (0, h_0])$$

е класически символ (или класическа амплитуда), ако е реализация на формалния символ

$$\sum p_j h^{j-m} \in \mathcal{FG}S^m_\ell(X \times D \times (0, h_0]),$$

където p_j не зависят от h и ще пишем $p \sim \sum p_j h^{j-m}$.

Същественият носител на p се дефинира като затворената обвивка на множеството $\cap_{k\ge 0}(\cup_{j\ge k} \mathrm{supp}\, p_j)$.

Използвайки Заб. 2.1 оптимизираме лявата страна на (2.1) и получаваме, че е вярна следната:

Лема 2.2 *Символът q принадлежи на резидуалния клас $\mathcal{G}S_\ell^{-\infty}(X \times D \times (0,h_0])$ тогава и само тогава, когато*

$$\sup_{X\times D\times(0,h_0]} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \, q(x,\xi;h)| \ \leq \ A\, C^{|\alpha+\beta|}\, \alpha!^{\,\rho}\, \beta!^{\,\mu}\, \exp(-ch^{-1/\nu})$$

за някои $A,\ C,\ c>0$, и произволни $\alpha,\ \beta\ \in \mathbb{N}^n$.

В случая когато $\rho = \mu$ полагаме $\mathcal{G}S^{\rho,m} := \mathcal{G}S^m_{(\rho,\rho)}$ и $\mathcal{F}\mathcal{G}S^{\rho,m} := \mathcal{F}\mathcal{G}S^m_{(\rho,\rho)}$.

2.2.2 h-псевдодиференциални оператори в класове на Жевре

Към всеки символ

$$p \in \mathcal{G}S_\ell^m(X \times \mathbb{R}^n \times (0,h_0])$$

асоциираме h-псевдодиференциален оператор (h-ПДО)

$$\mathrm{OP}_h(p) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to C_0^\infty(X)$$

чрез стандартното квантуване

$$\mathrm{OP}_h(p)u(x) := (2\pi h)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i\langle x-y,\xi\rangle/h}\, p(x,\xi;h)\, u(y) d\xi dy,$$

където u принадлежи на класа на Шварц $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Операторът $\mathrm{OP}_h(p)$ може да се продължи върху пространството от разпределения $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ чрез интегриране по части по отношение на ξ .

Освен това този оператор е добре дефиниран по mod $\exp(-ch^{-1/\nu})$.

Това е така, защото съгласно Лема 2.2 за всяко $p \in S_\ell^{-\infty}$ е изпълнено

$$\|\mathrm{OP}_h(p)u\|_{L^2} \ \leq \ C \exp(-ch^{-1/\nu})\|u\|_{L^2}\,,\ u \in L^2(X),$$

за някои положителни константи c и C, т.е. изображението $p \mapsto \mathrm{OP}_h(p)$ съпоставя резидуалния клас от символи на резидуалния клас от h-ПДО.

В частност, към всеки формален символ може да се асоциира h-ПДО (за произволна негова реализация).

Пространството от h-псевдодиференциални оператори
със символи от $\mathcal{G}S^0_\ell(X\times\mathbb{R}^n)$ е затворено относно произведение и транспозиция.

***Твърдение* 1** *Нека $p, q \in \mathcal{F}\mathcal{G}S_\ell^0(X \times \mathbb{R}^n \times (0,h_0])$.*

Тогава

1. *формалният символ $p\#q$ зададен чрез*

$$(p\#q)(x,\xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \quad h^j \sum_{r+s+|\gamma|=j} \frac{1}{\gamma!}\, D_\xi^\gamma p_r(x,\xi;h)\, \partial_x^\gamma\, q_s(x,\xi;h) \tag{2.4}$$

   принадлежи на $F\mathcal{G}S_\ell^0(X\times\mathbb{R}^n\times(0,h_0])$ и

$$\mathrm{OP}_h(p)\circ\mathrm{OP}_h(q) = \mathrm{OP}_h(p\#q)$$

   по mod $S_\ell^{-\infty}$.

2. *Формалният символ*

$$p^*(x,\xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \quad h^j \sum_{r+|\gamma|=j} \frac{1}{\gamma!}\, D_\xi^\gamma \partial_x^\gamma\, \overline{p_r(x,\xi)}$$

   принадлежи на $FS_\ell^0(X\times\mathbb{R}^n\times(0,h_0])$ и формално спрегнатия на $\mathrm{OP}_h(p)$ се определя чрез

$$\mathrm{OP}_h(p)^* = \mathrm{OP}_h(p^*)$$

   по mod $\mathcal{G}S_\ell^{-\infty}$.

3. *Ако $p_0 \neq 0$ върху компактно множество $\Gamma \subset X\times\mathbb{R}^n$, тогава съществува $r \in \mathcal{F}\mathcal{G}S_\ell^0(X\times\mathbb{R}^n\times(0,h_0])$ и околност U на Γ такава, че за всяко $\psi \in \mathcal{G}^{\rho,\mu}(X\times\mathbb{R}^n)$с носител в U, е изпълнено следното*

$$\psi(p\#q-1) \in \mathcal{G}S_\ell^{-\infty}(X\times\mathbb{R}^n\times(0,h_0]).$$

Сега ще разгледаме смяната на променливите.

За да имаме инвариантност на главния символ и на субсимвола на h-ПДО $\mathcal{P}_h$ при смяна на променливите, разглеждаме $\mathcal{P}_h$ като h-ПДО, действащ върху полуплътностите $f|dx|^{\frac{1}{2}} \in C_0^\infty(X,\Omega^{\frac{1}{2}}(X)$ (гладки сечения на разслоението от полуплътностите $\Omega^{\frac{1}{2}}(X)$ с компактен носител).

Предлагаме [38] за подробно определение на s-плътностите и за мотивацията за тяхното въвеждане .

Означаваме чрез

$$\mathcal{G}S_\ell^m(X\times\mathbb{R}^n\times(0,h_0],\Omega^{\frac{1}{2}}(X\times\mathbb{R}^n))$$

съответното пространство от символи $p|dx|^{\frac{1}{2}}|dy|^{\frac{1}{2}}$, където $p\in\mathcal{G}S_\ell^m(X\times\mathbb{R}^n\times(0,h_0])$.

По същия начин определяме пространството от формални символи

$$\mathcal{F}\mathcal{G}S_\ell^m(X\times\mathbb{R}^n\times(0,h_0],\Omega^{\frac{1}{2}}(X\times\mathbb{R}^n)).$$

Съгласно дефиницията

$$\begin{aligned} &\mathrm{OP}_h(p|dx|^{\frac{1}{2}}|dy|^{\frac{1}{2}})(u|dy|^{\frac{1}{2}}) \\ &= (2\pi h)^{-n}\left(\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i\langle x-y,\xi\rangle/h}\, p(x,\xi;h)\, u(y)d\xi dy\right)|dx|^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

тъй като $|dy|^{\frac{1}{2}}|dy|^{\frac{1}{2}} = dy$.

Да припомним, че ([13] и [6]) главният символ на оператора

$$\mathcal{P}_h := \mathrm{OP}_h(p|dx|^{\frac{1}{2}}|dy|^{\frac{1}{2}})$$

е

$$h^{-m}\sigma_m(\mathcal{P}_h) = h^{-m}p_0|dx|^{\frac{1}{2}}|dy|^{\frac{1}{2}}$$

и субглавният символ е

$$h^{1-m}\sigma'_{m-1}(\mathcal{P}_h) := h^{1-m}p'_1|dx|^{\frac{1}{2}}|dy|^{\frac{1}{2}},$$

където

$$p'_1(x,\xi) := p_1(x,\xi) + \frac{1}{2i}\sum_{j=1}^{1}\frac{\partial^2 p_0}{\partial x_j \partial \xi_j}(x,\xi).$$

Нека са дадени две отворени множества X и Y в $\mathbb{R}^n$ и дифеоморфизъм $\gamma : Y \to X$.

Означаваме с

$$\gamma^* : C_0^\infty(X,\Omega^{\frac{1}{2}}(X)) \to C_0^\infty(X,\Omega^{\frac{1}{2}}(Y))$$

съответното „pull-back"изображение.

Твърдение 2 *Нека $\gamma : X \to Y$ е $\mathcal{G}^\rho$-дифеоморфизъм и*

$$p \in \mathcal{FG}S^0_\ell(X \times \mathbb{R}^n \times (0,h_0])$$

където $\mathrm{supp}_x\, p \subset X$. Тогава операторът

$$\widetilde{\mathcal{P}_h} := (\gamma^{-1})^* \circ \mathrm{OP}_h(p|dx|^{\frac{1}{2}}|dy|^{\frac{1}{2}}) \circ \gamma^* : C_0^\infty(X,\Omega^{\frac{1}{2}}(X)) \to C_0^\infty(X,\Omega^{\frac{1}{2}}(X))$$

е h-ПДО със символ

$$\widetilde{p}\,|dx|^{\frac{1}{2}}|dy|^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{FG}S^0_\ell(X \times \mathbb{R}^n \times (0,h_0], \Omega^{\frac{1}{2}}(X\times\mathbb{R}^n)).$$

Освен това,

$$\widetilde{p_0}(x,\xi) = p_0(\gamma^{-1}(x), \partial\gamma(x)^T\xi) \quad \textit{и} \quad \widetilde{p_0}'(x,\xi) = {p_0}'(\gamma^{-1}(x), \partial\gamma(x)^T\xi)$$

където $\partial\gamma(x)^T$ е транспонираната на якобиана $\gamma(x)$.

Това твърдение ни позволява да дефинираме h-псевдодиференциални оператори с $\mathcal{G}^\rho$-символи върху $\mathcal{G}^\rho$-гладки многообразия.

Освен това, главният и субглавният символи са инвариантно дефинирани.

2.3 Интегрални оператори на Фурие в класовете на Жевре и квазимоди

Този параграф е посветен на квантуването на Жевреевски символи от класа $\mathcal{G}^\rho$ върху $\mathcal{G}^\rho$-гладко точно лагранжево многообразие както и на построяването на квазикласическите интегрални оператори на Фурие h-ИОФ в класа на Жевре $\mathcal{G}^\rho$, $\rho > 1$.

От тук нататък $M := M^d$ ще означава паракомпактно многообразие с размерност $d \geq 2$ от класа на Жевре $\mathcal{G}^\rho$ (локалните карти са $\mathcal{G}^\rho$-гладки).

Първо да припомним дефиницията на квазикласическия вълнови фронт (микроносител) в класовете на Жевре.

Нека $\nu > 1$ и $u(\cdot; h)$ е семейство от гладки функции дефинирани върху M за $0 < h \leq h_0$.

Квазикласическият вълнови фронт (микро носител) $\mathrm{WF}_h^\nu(u) \subset T^*(M)$ на u се определя както следва:

Казваме, че $(x_0, \xi_0) \notin \mathrm{WF}_h^\nu(u)$, ако съществуват $c > 0$ и компактни околности U на x_0 и V на ξ_0 в зададена локална карта такива, че за всяка $\mathcal{G}^\nu$-гладка функция v с компактен носител в U

$$\int e^{-i\langle x,\xi\rangle/h}\, v(x)u(x,h)dx \;=\; O\left(e^{-ch^{-1/\nu}}\right), \quad h \searrow 0\,,$$

равномерно по отношение на $\xi \in V$.

Нека Λ е $\mathcal{G}^\rho$-гладко точно лагранжево подмногообразие на T^*M зададено посредством имерсия $i : \Lambda \to T^*M$ $(di(m) : T_m\Lambda \to T_{i(m)}T^*M$ са от ранг $n)$.

Тогава прообразът $\imath^*(\alpha)$ на формата на Лиувил $\alpha := \xi dx$ върху Λ е точна 1-форма, което означава че съществува гладка функция $f \in C^\infty(\Lambda, \mathbb{R})$ такава, че $\xi dx|_\Lambda := \imath^*(\alpha) = df$.

Нашата цел е да асоциираме клас от осцилиращи интеграли с Λ.

Нека първо да припомним ([6] и [13]) определението на неизродените фазови функции Φ, пораждащи локално Λ.

Казваме, че реалнозначната функция $\Phi(x, \theta)$ дефинирана в отворено подмножество V на $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^N$ е неизродена върху V, ако $d\Phi \neq 0$ в V и следната релация е в сила:

$$d_\theta\Phi(x,\theta) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{rank} d_{(x,\theta)}d_\theta\Phi(x,\theta) = N.$$

Тогава

$$C_\Phi := \{(x,\theta) \in V :\, d_\theta\Phi = 0\}$$

е гладко многообразие с размерност d.

Казваме, че неизродената фазова функция Φ поражда локално лагранжевото многообразие Λ в околност U на $\varrho_0 = (x^0, \xi^0) \in \Lambda$, ако изображението

$$\imath_\Phi : C_\Phi \ni (x,\theta) \longrightarrow (x, d_x\Phi(x,\theta)) \in \Lambda_\Phi := \imath_\Phi(C_\Phi) = U \subset \Lambda \tag{2.5}$$

е дифеоморфизъм.

В случая когато $N = 0$, който възниква когато рангът на $d\pi_M(\varrho_0)$ е максимален (равен на d), съществува $\mathcal{G}^\rho$-гладка фазова функция Φ в околност на $x^0 \in M$ такава, че $\imath_\Phi(x) = (x, d_x\Phi(x))$.

Следвайки доказателството на теоремите 21.2.16-18 в [13] и използвайки теоремата за неявните функции в класовете на Жевре (вж. [15] и [31], Appendix) получаваме, че фазовите функции Φ са $\mathcal{G}^\rho$-гладки.

Тогава множеството от влагания $(\Lambda_\Phi, \imath_\Phi^{-1})$

задават атлас от локални карти на Λ, които са $\mathcal{G}^\rho$-гладки.

Класът от осцилиращи интеграли от ред m, асоцииран с точното лагранжево многообразие Λ се определя както следва.

Нека $\varrho_0 = (x^0, \xi^0) \in \Lambda$ и нека x са локални координати в околност на x^0.

За всяка $\mathcal{G}^\rho$-гладка фазова функция $\Phi(x, \theta)$ пораждаща Λ локално в околност на ϱ_0, и за всяка класическа амплитуда

$$b \sim h^{-m} \sum_{j=0}^{\infty} b_j h^j \in \mathcal{G}S^{\rho,m}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^N \times (0, h_0])$$

от ред m дефинираме осцилиращия интеграл

$$I_{\Phi,b}(x; h) := \left(\frac{1}{2\pi h}\right)^{\frac{d+2N}{4}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\frac{i}{h}\Phi(x,\theta)}\, b(x, \theta; h)\, d\theta. \tag{2.6}$$

По подразбиране, $\Phi(x, \theta) = \Phi(x)$ и $b(x, \theta; h) = b(x; h)$ когато $N = 0$, следователно

$$I_{\Phi,b}(x; h) := \left(\frac{1}{2\pi h}\right)^{\frac{d}{4}} e^{\frac{i}{h}\Phi(x)} b(x; h)$$

в този случай.

Полагаме

$$f_\Phi(\varrho) := \Phi(\imath_\Phi^{-1}(\varrho)),\ \ \varrho \in \Lambda_\phi.$$

Следната теорема играе решаваща роля при построяването на осцилиращите интеграли асоциирани с Λ.

Теорема 2.1 *Нека $\tilde{\Phi}(x, \tilde{\theta})$, $\theta \in \mathbb{R}^{\tilde{N}}$, $\tilde{N} \in \mathbb{N}$, е неизродена $\mathcal{G}^\rho$-гладка фазова функция пораждаща Λ локално в околност на ϱ_0.*

Тогава съществува класическа амплитуда $\tilde{b} \in \mathcal{G}S^{\rho,m}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{\tilde{N}} \times (0, h_0])$ и околност V на ϱ_0 в T^*M такива, че

$$\mathrm{WF}_h^\nu \left(I_{\Phi,b} - e^{ic/h} I_{\tilde{\Phi},\tilde{b}}\right) \cap V = \emptyset.$$

където $\nu = 2\rho - 1$ и $c := f_\Phi - f_{\tilde{\Phi}}$ е локално константна върху $\Lambda_\Phi \cap \Lambda_{\tilde{\Phi}}$.

Идея на доказателството. Доказателството следва това на Твърдрние 1.3.1 [6] като се използва теоремата за неявните функции в класовете на Жевре както и подходящи леми за стационарната и нестационарната фаза.

Тези леми са доказани в по-общия контест на неизотропни пространства на Жевре.

Да разгледаме сега действието на h-ПDO върху осцилиращи интеграли.

Нека $\mathcal{P}_h$ е h-ПDO от ред m действащ върху полуплътности на M^d и имащ класически $\mathcal{G}^\rho$ символ.

Да означим с $h^{-m}\sigma_m(\mathcal{P}_h) = h^{-m}p_0|dx|^{\frac{1}{2}}|dy|^{\frac{1}{2}}$ главния му символ и с $h^{1-m}\sigma'_{m-1}(\mathcal{P}_h) = h^{1-m}p'_1|dx|^{\frac{1}{2}}|dy|^{\frac{1}{2}}$ неговия субглавен символ и да положим $H := p_m$.

Да означим с X_H Хамилтоновото векторно поле на $H = p_0 = 0$.

Следвайки ([6], (I.3.13)), получаваме

Теорема 2.2 *Нека u е осцилиращ интеграл от класа $\mathcal{G}I^{\rho,m}(M,\Lambda;\Omega_M^{\frac{1}{2}})$ и нека $\mathcal{P}_h$ е h-ПDO от ред m действащ върху полуплътности на M^d с класически $\mathcal{G}^\rho$ символ. Да предположим, че $H = p_0 = 0$ върху Λ.*

Тогава

$$\mathcal{P}_h u \in \mathcal{G}I^{\rho,m-1}(M,\Lambda;\Omega^{\frac{1}{2}}(M))$$

и неговия главен символ е

$$h^{m-1}\sigma(\mathcal{P}_h u) = h^{m-1}e^{\frac{i}{h}f}\,\left(i^{-1}\mathcal{L}_{X_H} + p'_1\right)(e^{-\frac{i}{h}f}\,\sigma(u)),$$

където $\mathcal{L}_{X_H}$ е производната на Ли по отношение на векторното поле X_H.

Доказателство. Релацията $\mathcal{P}_h u \in \mathcal{G}I^{\rho,m}(M,\Lambda;\Omega^{\frac{1}{2}}(M))$ следва от аргумента използван в доказателството на Теорема **??**.

От друга страна, следвайки ([6], Sect. 1.4) получаваме, че символът на $\mathcal{P}_h u$ от ред m е нула, което означава че $\mathcal{P}_h u$ принадлежи на класа $\mathcal{G}I^{\rho,m-1}$.

Освен това, следвайки доказателството на [6], (1.4.1) доказваме, че главният символ на $\mathcal{P}_h u$ се задава с горната формула. $\square$

2.4 Нормални форми на Биркоф (НФБ)

Тук припомняме основните резултати от Гл.1 засягащи (НФБ) в класове на Жевре, които ще използваме по-долу за да получим квантови нормални форми на Биркоф (КНФБ).

2.5 Квантови нормални форми на Биркоф (КНФБ) и квазимоди

Припомняме,че $\rho > 1$, $\mu = \rho(\tau+1)+1$ и $\nu = \rho+\mu-1 = \rho(\tau+2)$.

Ще получим КНФБ на $\mathcal{P}_h$, асоциирана с инвариантен тор на Кронекер Λ на главния му символ P_0.

Припомняме, че $\chi := \chi_0 \circ \chi_1$ е точно симплектично изображение,трансформиращо $H = P_0$ към неговата НФБ (1.4) в околност на Λ.

Теорема 2.3 *Съществува фамилия от равномерно ограничени h-ИОФ*

$$U_h : L^2(\mathbb{T}^n; \mathbb{L}) \to L^2(M)\,,\ 0 < h \le h_0,$$

асоциирана с каноничната релация $\mathrm{graph}\,(\chi)$, *за която*

(i) $U_h^* U_h - \mathrm{Id}$ *е псевдодиференциален оператор с класически символ от класа на Жевре* $\mathcal{G}S^0_\ell(\mathbb{T}^n \times D)$, *който принадлежи на* $\mathcal{G}S^{-\infty}_\ell$ *в* $\mathbb{T}^n \times Y$, *където* Y *е околност на* I^0 *в* D,

(ii) $\mathcal{P}_h \circ U_h \ = \ U_h \circ \mathcal{P}^0_h + \mathcal{R}_h$, *символът на* $\mathcal{R}_h$ *принадлежи на* $\mathcal{G}S^{-\infty}_\ell$, *и пълният символ* $p^0(\varphi, I, h)$ *на* $\mathcal{P}^0_h$ *се представя както следва*

$$p^0(\varphi, I; h) \ = \ K^0(I; h) \ + \ R^0(\varphi, I; h),$$

където класическите символи

$$K^0(I; h) \ = \sum_{j \le \eta h^{-1/\rho}} K_j(I) h^j \qquad R^0(\varphi, I; h) \ \sim \sum_{j \le \eta h^{-1/\rho}} R_j(\varphi, I) h^j$$

принадлежат на класа на Жевре $\mathcal{G}S^0_\ell(\mathbb{A}^n)$, *където* $\eta > 0$ *е константа,* K^0 *е реалнозначна, и*

$$\partial_I^\alpha R_j(\varphi, I^0) = 0\ ,\ \varphi \in \mathbb{T}^n\,,$$

за всички $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *и* $j \in \mathbb{N}$.

Като следствие от горната теорема получаваме фамилия от $\mathcal{G}^\nu$-квазимоди $\mathcal{Q}$ на $\mathcal{P}_h$.

Множеството от индексите се определя от следното квантово условие:

$$\mathcal{M}_h \ = \ \left\{ m \in \mathbb{Z}^n :\ \left| I^0 \ - \ h(m + \vartheta/4) \right| \ \le \ Ch \right\}\,,$$

където $C \gg 1$ е фиксирано.

Следствие 2.1 *Нека* $u_m(x, h) = U_h(e_m)(x)$, *и*

$$\lambda_m(h) = K^0(h(m + \frac{1}{4}\vartheta), h)$$

за $m \in \mathcal{M}_h$.

Тогава

$$\mathcal{Q} \ = \ \{(u_m(x, h), \lambda_m(h)) :\ m \in \mathcal{M}_h\}$$

е G^ν*-квазимода на* $\mathcal{P}_h$, *при това* $MS^\nu(\mathcal{Q}) \ = \ \Lambda$.

Наистина,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}_h u_m(x,h) &= U_h \circ \mathcal{P}_h^0 e_m(x) + \mathcal{R}_h e_m(x) \\
&= K^0(h(m+\tfrac{1}{4}\vartheta),h)e_m(x) + R^0(x,h(m+\tfrac{1}{4}\vartheta),h)e_m(x) + O\left(e^{-c/h^{1/\nu}}\right) \\
&= \lambda_m(h)e_m(x) + O\left(e^{-c/h^{1/\nu}}\right).
\end{aligned}
$$

Като приложение, използвайки резултат на П.Стефанов [35] получаваме точна долна граница на броя на резонансите в близост на реалната ос за
h-диференциални оператори с коефициенти от класове на Жевре.

2.6 Доказателство на Теорема2.3

Идеята за доказателството на Теорема 2.3 е следната:

Спрягаме $\mathcal{P}_h$ с подходящ елиптичен жевреевски h-ИОФ асоцииран с графиката на χ и получаваме h-ПДО $\mathcal{P}_h^1$ с главен символ $K_0 + R_0$, субсимвол равен на 0, и пълен символ $p(\varphi, I; h) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j(\varphi, I)h^j$ в $\mathcal{G}S_\ell^0(\mathbb{T}^n \times D)$, където R_0 е плоска върху $\mathbb{T}^n \times \{I^0\}$.

Тогава привеждаме $\mathcal{P}_h^1$ към нормална форма $\mathcal{P}_h^0$ спрягайки го с елиптичен псевдодиференциален оператор A_h със символ $a(\varphi, I; h)$ от $\mathcal{G}S_\ell^0(\mathbb{A}^n \times (0, h_0])$.

2.6.1 Квантуване на χ

Първо ще квантуваме $\mathcal{G}^\rho$-гладката точна симплектична трансформация $\chi_0 : \mathbb{A}' = \mathbb{T}^n \times D' \to T^*M$ както в ([4], Sect. 5) (вж. също [31]).

Да означим с $\mathcal{C}_0 := \{(\chi_0(\theta, r), \theta, r) : (\theta, r) \in \mathbb{A}'\}$ графика на χ_0 в $T^*M \times T^*\mathbb{T}^n$ и с $\mathcal{C}_0'$ съответното Лагранжево подмногообразие на $T^*(M \times \mathbb{T}^n)$.

Разглеждаме класа от h-ИОФ $T_h : C^\infty(\mathbb{T}^n, \mathbb{L}) \to C^\infty(M, \mathbb{C})$ от ред 0 асоцииран с каноничната релация $\mathcal{C}_0$.

Ядрото на Шварц K_T of T_h принадлежи на класа $\mathcal{G}I^{\rho,0}(M \times \mathbb{T}^n, \mathcal{C}_0'; p_2^*(\mathbb{L}))$, където $p_2 : M \times \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$ е проекцията върху втория множител.

Оттук нататък тривилиазирайки подходящо разслоението от полуплътности, игнорираме факторите от полуплътности.

Съответният клас от символи е $\mathcal{G}S^{\rho,0}(\mathcal{C}_0', M(\mathcal{C}_0') \otimes \pi_0^*(\mathbb{L}'))$, където $\pi_0 : \mathcal{C}_0' \to \mathbb{T}^n \times D$ е естествената проекция и $\mathbb{L}'$ е дуалното разслоение към $\mathbb{L}$ (базисното многообразие на $\mathbb{L}$ и $\mathbb{L}'$ е $\mathbb{T}^n \times D$).

От друга страна $M(\mathcal{C}_0') = \pi_0^*(\mathbb{L})$ и използвайки параметризирането на $\mathcal{C}_0'$ зададено чрез π_0 идентифицираме горния клас от символи с $\mathcal{G}S^{\rho,0}(\mathbb{T}^n \times D', \mathbb{L} \otimes \mathbb{L}')$, който може канонично да се отъждестви $\mathcal{G}S^{\rho,0}(\mathbb{A}' \times (0, h_0]))$ тъй като $\mathbb{L} \otimes \mathbb{L}'$ е тривиално.

Това ни позволява да конструираме h-ИОФ T_h от ред 0 асоцииран към каноничната релация $\mathcal{C}_0$, който е микролокално унитарен върху $\mathbb{A}^0 := \mathbb{T}^{n-1} \times D^0$ по модул $O(h^2)$, където D^0 е малко кълбо с център в I^0, съдържащо се в D'.

Това означава, че главният символ и субсимволът на h-ПДО $T_h^* T_h$ удовлетворяват върху тора следните равенства

$$\sigma_0(T_h^* T_h) = 1 \quad \text{и} \quad \sigma'_{-1}(T_h^* T_h) = 0 \quad \text{върху} \quad \mathbb{A}^0. \tag{2.7}$$

Считаме, че главния символ на T_h е равен на едно в в $\mathbb{T}^n \times D^0$ по модул множител на Лиувил.

Освен това, използвайки Теорема 2.2 получаваме както в ([4], Sect. 5), че

$$\sigma_0(\mathcal{P}'_h) = H_1 = H \circ \chi_0 \quad \text{и} \quad \sigma'_{-1}(\mathcal{P}'_h) = 0 \quad \text{върху} \quad \mathbb{A}^0. \tag{2.8}$$

Забележка. $\sigma_0(\mathcal{P}'_h) = H_1 = H \circ \chi_0$ е известно като Теорема на Егоров.

Основна част от доказателството е следващата теорема, която ни дава КНФБ на $\mathcal{P}_h^0$.

Теорема 2.4 *Съществуват символи*

$$\begin{aligned} a(\varphi, I, h) \ &\sim\ \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} a_j(\varphi, I) h^j\,, \\ K^0(I, h) \ &\sim\ \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} K_j(I) h^j\,, \\ r(\varphi, I, h) \ &\sim\ \textstyle\sum_{j=0}^{\infty} r_j(\varphi, I) h^j\,, \end{aligned}$$

в $\mathcal{G}S^0_\ell(\mathbb{T}^n \times D \times (0, h_0])$ *такива, че* $a_0 = 1$, $r_0 = R_0$, *и* $r \in \mathcal{G}S^0_{\ell,\infty}(\mathbb{T}^n \times D \times (0, h_0])$ *и* $K_1 = 0$ *в околност на* $Y \subset D$ *на* I^0, *и*

$$p\#a - a\#K^0 - r \in \mathcal{G}S^{-\infty}_\ell(\mathbb{T}^n \times D \times (0, h_0]).$$

2.6.2 Пространства от формални степенни редове на Жевре и хомологично уравнение

Припомняме някои определения и факти от Параграф 1.2.

За $u \in C(\mathbb{T}^n)$, означаваме с u_k, $k \in \mathbb{Z}^n$, съответните коефициенти на Фурие, и с

$$\langle u \rangle := u_0 = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{T}^n} u(\varphi) d\varphi$$

средната стойност на u върху $\mathbb{T}^n$.

За всяко $s \in \mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ дефинираме съответната норма на Винер (weighted Winer norm) на u чрез

$$S_s(u) \ :=\ \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (1 + |k|)^s |u_k|\,,$$

където $|k| = |k_1| + \cdots + |k_n|$, $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Пространството на Винер (weighted Wiener space) $\mathcal{A}^s(\mathbb{T}^n)$, $s \geq 0$, е банахово пространство (относно нормата S_s), състоящо се от всички $u \in C(\mathbb{T}^n)$ за които $S_s(u) < \infty$.

Разглеждаме модифицираните норми

$$P_s(u) = \|u\|_s \,:=\, (s+1)^2 S_s(u)\,,\ s \geq 0\,,\ u \in \mathcal{A}^s(\mathbb{T}^n)\,.$$

Пространството $\mathcal{A}^s(\mathbb{T}^n)$ е банахова алгебра, ако $u, v \in \mathcal{A}^s(\mathbb{T}^n)$ то $\|uv\|_s \leq \|u\|_s \|v\|_s$.

Освен това, за всички $u, v \in \mathcal{A}^s(\mathbb{T}^n)$ е изпълнено неравенството

$$\|uv\|_s \,\leq\, \widetilde{C} \sup_{0 \leq t \leq s} \binom{[s]}{[t]} \|u\|_t \|v\|_{s-t}\,, \tag{2.9}$$

където $\widetilde{C} = 16\pi^2/3$ и $[s]$ е цялата част на $s \in \mathbb{R}$.

Горната оценка следва непосредствено от неравенството (1.14) в Лема 1.3.

Друго полезно свойство на тази норма е , че

$$\|\partial^\alpha u\|_s \leq \|u\|_{s+|\alpha|} \tag{2.10}$$

за всички $\alpha \in \mathbb{N}^n$ и $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$.

Разглеждаме анизотропният клас на Жевре $\mathcal{G}^{\rho,\mu}(\overline{\mathbb{A}})$ с $\rho, \mu, L \geq 1$, където $\overline{\mathbb{A}} := \mathbb{T}^n \times \overline{D}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ е ограничена област и $\overline{D}$ е нейната затворена обвивка.

Този клас се състои от всички функции $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n \times \overline{D})$ за които

$$\sup_{(\varphi,I)\in\overline{\mathbb{A}}} \left|\partial_I^\alpha \partial_\varphi^\beta f(\varphi, I)\right| \leq A L^{|\alpha|+|\beta|} (\alpha\,!)^\rho (\beta\,!)^\mu$$

за някои $A > 0$ и $L > 1$, и за всички $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

За дадено $L \geq 1$ дефинираме нормата $|f|_L := \sup A$, където супремума се взема по всички $A > 0$ удовлетворяващи горната оценка.

Т.е.

$$|f|_L = \sup_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n} \sup_{(\varphi,I)\in\mathbb{T}^n\times\bar{D}} \left|\partial_I^\alpha \partial_\varphi^\beta f(\varphi, I)\right| L^{-|\alpha|-|\beta|} (\alpha\,!)^{-\rho} (\beta\,!)^{-\mu}.$$

Пространството от функции на Жевре $\mathcal{G}^{\rho,\mu}(\mathbb{T}^n \times \overline{D})$ се състои от всички гладки върху $\overline{\mathbb{A}}$ функции, за които $|f|_L < \infty$ при някое $L > 0$.

Ще използваме друга еквивалентна характеризация на класа на Жевре $\mathcal{G}^{\rho,\mu}(\overline{\mathbb{A}})$, която е по-удобна (от техническа гледна точка) при оценяването на решенията на хомологичното уравнение.

Ще казваме, че гладката върху $\overline{\mathbb{A}}$ функция f принадлежи на $\mathcal{G}_L^{\rho,\mu}(\overline{\mathbb{A}})$, ако съществува $d_0 > 0$ за което

$$\sup_{I\in\overline{D}} \|\partial_I^\alpha f(\cdot, I)\|_s \,\leq\, d_0\, L^{s+|\alpha|}\, \Gamma(\rho s + \mu|\alpha| + 1) \tag{2.11}$$

за всички $s \geq 0$ и $\alpha \in \mathbb{N}^n$, където $\Gamma(x),\ x > 0$, е Гама функцията на Ойлер.

Пространството $\mathcal{G}_L^{\rho,\mu}(\overline{\mathbb{A}})$ е банахово относно нормата $\|f\|_L := \inf d_0$,

$$\|f\|_L = \sup_{s\geq 0} \sup_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \sup_{I\in D} \|\partial_I^\alpha f(\cdot, I)\|_s \, L^{-s-|\alpha|}\, \Gamma(\rho s + \mu|\alpha| + 1)^{-1}. \tag{2.12}$$

Използвайки Лема 1.3, може да се покаже,
че съществува константа $c = c(n, \rho, \mu) \geq 1$, за която

$$\|f\|_{cL} \leq |f|_L \leq \|f\|_L. \tag{2.13}$$

За дадено $I^0 \in D$ означаваме с $\mathcal{FG}_L^{\rho,\mu}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$ пространството от формални степенни редове

$$f \sim \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} \frac{f^{(\alpha)}(\varphi)}{\alpha!}(I - I^0)^\alpha \tag{2.14}$$

такива, че

$$\left\|f^{(\alpha)}\right\|_s \ \leq\ A_0\, L^{s+|\alpha|}\alpha!\, \Gamma(\rho s + (\mu - 1)|\alpha| + q + 1) \tag{2.15}$$

за някои фиксирани $A_0 > 0$ и $q \geq 0$, и за всички $s \geq 0$ и $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Използвайки теоремата на Борел (Borel), можем да асоциираме с всеки формален степенен ред (2.14) удовлетворяващ (2.15) функция $f \in \mathcal{G}^{\rho,\mu}(\mathbb{T}^n \times D)$ такава, че $\partial_I^\alpha f(\cdot, I^0) = f^{(\alpha)}(\cdot)$ за всяко $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Но оператора на линейно продължение не съществува в класовете на Жевре.

В частност, всеки път когато използваме теоремата на Борел получаваме нови константи d_0 и C.

За да избегнем този проблем, ще решаваме всички хомологични уравнения на формално ниво и след това едновременно ще ги продължим чрез теоремата на Борел.

За да направим последното, ще използваме следния аргумент (например от [2] и [31]).

Разглеждаме анизотропното пространство на Жевре

$$\mathcal{G}^{\rho,\mu}(\mathbb{T}^n \times \overline{D}) := \cup_{L>0}\mathcal{G}_L^{\rho,\mu}(\mathbb{T}^n \times \overline{D})),$$

и пространството

$$\mathcal{FG}^{\rho,\mu}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n) := \cup_{L>0}\mathcal{FG}_L^{\rho,\mu}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$$

от формални степенни редове по отношение на $I - I^0$, $I^0 \in D$.

Въвеждаме в тези две пространства топологията определена чрез индуктивна граница.

Тъй като $\rho > 1$ и $\mu > 1$, тези две пространсрва са пространства на Силва (Silva) , тоест са индуктивни граници на банахови пространства и каноничните изображения са компактни.

Наистина може да се покаже както в ([21], Chapter 7, Proposition 1.1) , че за всяко $L_2 > L_1 > 0$ включванията

$$\mathcal{G}^{\rho,\mu}_{L_2}(\mathbb{T}^n \times \overline{D}) \longrightarrow \mathcal{G}^{\rho,\mu}_{L_1}(\mathbb{T}^n \times \overline{D})$$

$$\mathcal{F}\mathcal{G}^{\rho,\mu}_{L_2}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{F}\mathcal{G}^{\rho,\mu}_{L_1}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$$

са компактни.

Ще използваме следния аргумент на Бруна (Bruna) от [2].

Лема 2.3 *Предполагаме, че E и F са пространства на Силва и $u : E \to F$ е линейно изображение, което е непрекъснато и „върху".*

Тогава за всяко ограничено множество B от F, съществува ограничено множество A от E такова, че $u(A) = B$.

Прилагаме лемата за ограниченото множество

$$\mathcal{B} := \{a_j d^{-j} : \ j \geq 2\}$$

в $\mathcal{F}\mathcal{G}^{\rho,\mu}_{L}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Използвайки аргументите на Бруна от [2], Sect. 2, може да се покаже, че изображението

$$u : \mathcal{G}^{\rho,\mu}(\mathbb{T}^n \times \overline{D}) \to \mathcal{F}\mathcal{G}^{\rho,\mu}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$$

съпоставящо на всяка f нейния ред на Тейлор в $I = I^0$ е „върху".

Следователно има ограничено множество $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}^{\rho,\mu}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$ такова, че $u(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$.

Това означава, че съществуват положителни константи $\tilde{L} > 0$ и $C > 0$ такива, че за всеки степенен ред $a_j d^{-j} \in \mathcal{B}$, $j \geq 2$, има $\tilde{a}_j \in \mathcal{G}^{\rho,\mu}_{\tilde{L}}(\mathbb{T}^n \times \overline{D})$ за който редът на Тейлор на $\tilde{a}_j$ в $I = I^0$ е a_j и $\|\tilde{a}_j\|_{\tilde{L}} \leq C d^j$.

С това завършват доказателствата на Теорема 2.4 и на Теорема 2.3. $\square$

Глава 3

Апендикс

3.1 Някои свойства на Гама функцията

Тук ще разгледаме някои свойства на Гама функцията на Ойлер,

$$\Gamma(x) \ = \ \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt \ , x > 0, \tag{3.1}$$

които използвахме по-горе , както и една лема свързана с намирането на частни производни на сложна функция.

Следните факти (1.-3.) са добре известни.

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ откъдето $\Gamma(m+1) = m!$ за всяко $m \in \mathbb{N}$.

2. $\Gamma(t)$ е изпъкнала в интервала $(0, +\infty)$, има минимум в някоя точка $t_0 \approx 1,46$ и $\Gamma(t_0) \approx 0,89$.

В частност , $\Gamma(t)$ е строго растяща в интервала $(0, t_0]$ и е строго намаляваща в интервала $[t_0, +\infty)$.

3.В сила е следната релация (виж [7], [26])

$$\Gamma(x)\Gamma(y) \ = \ \Gamma(x+y)B(x,y)\,, \ \ x, y > 0\,, \tag{3.2}$$

където $B(x, y)$ е Бета функцията, определена за $x > 0$ и $y > 0$ по следния начин

$$B(x,y) \ = \ \int_0^1 (1-t)^{x-1}\, t^{y-1}\, dt\,. \tag{3.3}$$

Явно $B(x, y)$е симетрична, т.е. $B(x, y) = B(y, x)$, намаляваща е по отношение и на двете си променливи x, y.

От (3.3) и от неравенството на Коши-Буняковски-Шварц следва, че за произволни положителни a, b, c, d е в сила неравенството

$$B(a+b, c+d) \leq B(2a, 2c)^{1/2} B(2b, 2d)^{1/2}. \tag{3.4}$$

Означаваме с $[x]$ цялата част на $x \in \mathbb{R}$.

Тъй като $B(x,y)$ е намаляваща и по двете си променливи $x, y > 0$, то

$$B(x,y) \geq B([x]+1,[y]+1) = \frac{[x]![y]!}{([x]+[y]+1)!} \geq 4^{-x-y}. \tag{3.5}$$

Аналогично за произволни $x, y \geq 0$ е изпълнено

$$B(x+1,y+1) \leq B([x]+1,[y]+1) = \frac{1}{[x]+[y]+1}\binom{[x]+[y]}{[y]}^{-1}$$
$$< \frac{3}{x+y+1}\binom{[x]+[y]}{[y]}^{-1}.$$

По-общо е вярна следната

Лема 3.1 *За всички $\nu \geq 1$ и $\delta > 0$ съществува константа $C'(\nu,\delta) \geq 1$ такава, че за всички $x, y \geq 0$ е изпълнено неравенството*

$$\binom{[x]+[y]}{[x]}^{\nu} B(\nu x+\delta, \nu y+\delta) \ \leq \ \frac{C'(\nu,\delta)}{\big(\min(x+1,y+1)\big)^{(\nu+1)/2}}.$$

Лема 3.2 *За всички $\rho \geq 1$ и $\mu \geq 1$ и за всички s_j, t_j и q_j, $j = 0, 1$, е изпълнено неравенството*

$$\frac{\Gamma(\rho s_1+\mu t_1+q_1+1)\Gamma(\rho s_2+\mu t_2+q_2+1)}{\Gamma(\rho(s_1+s_2)+\mu(t_1+t_2)+q_1+q_2+1)}$$
$$\leq C(\rho,\mu)\binom{[s_1]+[s_1]}{[s_1]}^{-[\rho]}\binom{[t_1]+[t_1]}{[t_1]}^{-[\mu]}\binom{[q_1]+[q_1]}{[q_1]}^{-1},$$

където $C(\rho,\mu) \geq 1$ зависи само от ρ и μ.

Като се използва формулата на Стирлинг може да се покаже, че за всяко $\rho \geq 1$ съществуват $A = A(\rho) \geq 1$ и $C = C(\rho) > 1$ зависещи само от ρ, за които

$$A^{-1}C^{-x}\Gamma(x+1)^{\rho} \ \leq \ \Gamma(\rho x+1) \ \leq \ AC^{x}\Gamma(x+1)^{\rho}, \quad x \geq 0. \tag{3.6}$$

Лема 3.3 *За всички $m \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $2 \leq |\alpha| \leq m$ е в сила тъждеството*

$$\sum_{(\alpha^1,\dots,\alpha^m)\in\mathbb{N}(\alpha,m)} \frac{\alpha!}{\alpha^1!\dots\alpha^m!} = \frac{(m-1)!}{(m-|\alpha|)!(|\alpha|-1)!},$$

където $\mathbb{N}(\alpha,m)$ е определено в Гл.1, параграф 1.3.

3.2 Доказателство на две леми отнасящи се за оценки на произведения от формални редове на Жевре.

3.3 Доказателство на лемата за стационарната фаза

Използваме лемата на Морс (Morse) с параметри за реалнозначни функции $\mathcal{G}^{\rho,\mu}$, където $1 < \rho \leq \mu$.

Лема 3.4 *Нека $\Phi(x,y)$ е реалнозначна функция, принадлежаща на $\mathcal{G}^{\rho,\mu}$ в околност на $(0,0)$ и удовлетворяваща условията: $\partial_{x'}\Phi(0,0) = 0$ и $\partial_{x'}\partial_{x''}\Phi(0,0)$ е неизродена.*

Тогава съществува функция $x' = x'(w,x'',y)$, $w \in \mathbb{R}^{m_1}$, принадлежаща на $\mathcal{G}^{\rho,\mu}$ в околност на $(0,0)$ в $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ такава, че

$$\Phi(x'(w,x'',y),x'',y) = \Phi_0(x'',y) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m_1}\epsilon_j w_j^2 \tag{3.7}$$

където $\epsilon_j = \pm 1$.

За да докажем лемата за стационарната фаза процедираме както в [5](Sect. 5), (вж. също [10]).

Апробация

Основните резултати от дисертацията са докладвани на семинара на секция „Диференциални уравнения и математическа физика".

Изказвам своята благодарност и признателност на научния си ръководител проф. дмн. Георги Попов, който ме насочи към интересната проблематика, оказваше ми непрекъснато теоретична и идейна помощ и проявяваше изключителна загриженост и търпение през годините на съвместна работа.

Библиография

[1] (MR1299535) Sh. Alimov, R. Ashurov and A. Pulatov, Multiple Fourier Series and Fourier Integrals, Commutative Harmonic Analysis IV, Encyclopaedia Math. Sci. **42**, 1–95, Springer, Berlin, 1992.

[2] J. Bruna. An extension theorem of Whitney type for non quasi-analytic classes of functions. *J. London Math. Soc.*, **22**(2) (1980), 495-505.

[3] L. Chierchia and G. Gallavotti. Smooth prime integrals for quasi-integrable Hamiltonian systems. *Nuovo Cimento B(11)* **67**(2) (1982), 277-295.

[4] Y. Colin de Verdière. Quasimodes sur les variétés Riemanniennes, *Inventiones Math.*. **43**(1977, 15-52.

[5] Dimassi, M., Sjцstrand, J. (1999). *Spectral asymptotics in the semi-classical limit.* London Mathematical Society Lecture Note Series. 268. Cambridge: Cambridge University Press.

[6] Duistermaat, J., (1974). Oscillatory integrals, lagrange immersions and unfolding of singularities, *Comm. Pure Appl. Math.* 27:207-281.

[7] (MR0058756) A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. Tricomi, "Higher transcendental functions". Vols. I, II, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1953.

[8] (MR0980547) A. Giorgilli, A. Delshams, E. Fontich, L. Galgani and C. Simó, *Effective stability for a Hamiltonian system near an elliptic equilibrium point, with an application to the restricted three-body problem,* J. Differential Equations **77** (1989), 167–198.

[9] (MR1439738) A. Giorgilli and A. Morbidelli, *Invariant KAM tori and global stability for Hamiltonian systems,* Z. Angew. Math. Phys., **48** (1997), 102–134.

[10] T. Gramchev, The stationary phase method in Gevrey classes and Fourier Integral Operators on ultradistributions, PDE, Banach Center Publications, Warsaw, 1987

[11] (MR1340956) T. Gramchev and G. Popov, *Nekhoroshev type estimates for billiard ball maps*, Annales de l'Institut Fourier, **45** (1995), 859–895.

[12] Hörmander, L. (1971). Fourier integral operators I, *Acta Math.* 127:79-183.

[13] Hörmander, L. (1983). The analysis of linear partial differential operators III-IV, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

[14] Kobayashi, S. (1987). *Differential geometry of complex vector bundles*, Princeton University Press.

[15] H. Komatsu, *The implicit function theorem for ultradifferentiable mappings.* Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **55** (1979), 69–72.

[16] S. Kuksin. *Analysis of Hamiltonian PDE's*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications **19**, Oxford: Oxford University Press. 2000.

[17] (MR2130546) G. Iooss and E. Lombardi, *Polynomial normal forms with exponentially small remainder for analytic vector fields*, J. Differential Equations **212** (2005), 1–61.

[18] (MR2111718) G. Iooss and E. Lombardi, *Normal forms with exponentially small remainder: application to homoclinic connections for the reversible* $0^{2+}i\omega$ *resonance*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 339 (2004), 831–838.

[19] (MR1067380) M. Herman, *Inégalités "a priori" pour des tores lagrangiens invariants par des difféomorphismes symplectiques*, (French) [A priori inequalities for Lagrangian tori invariant under symplectic diffeomorphisms], Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **70** (1989), 47–101.

[20] (MR1239173) V. F. Lazutkin, "KAM Theory and Semiclassical Approximations to Eigenfunctions", Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[21] (MR0291887) J.-L. Lions and E. Magenes, "Problemes aux Limites Non homogènes et Applications", (French), Vol. 3. Travaux et recherches mathématiques **20**, Dunod, Paris, 1970.

[22] P. Lochak, Canonical perturbation theory:an approach based on joint approximations, *Uspekhi Mat. Nauk*, **47**(6) (1992) 59-140 (in Russian); translation in: *Russian Math. Surveys* **47**(6) (1992), 57-133.

[23] (MR1986314) J.-P. Marco and D. Sauzin, *Stability and instability for Gevrey quasi-convex near-integrable Hamiltonian systems*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **96** (2002), 199–275.

[24] (MR1349492) A. Morbidelli, A. Giorgilli, *On a connection between KAM and Nekhoroshev's theorems.* Phys. D **86** (1995), 514–516.

[25] (MR1316113) A. Morbidelli, A. Giorgilli, *Superexponential stability of KAM tori.* J. Statist. Phys. **78** (1995), 1607–1617.

[26] (MR0435697) F. W. J. Olver, "Asymptotics and Special Functions," Academic Press, New York - London, 1974.

[27] J. Pöschel. Integrability of Hamiltonian systems on Cantor tori. *Comm. Pure Appl. Math.*, **35** (1982), 653-695.

[28] J. Pöschel. A Lecture on the Classical KAM Theorem. *Proceedings of Simposia in Pure Mathematics* **69** (2001), 707-732.

[29] (MR1770799) G. Popov, *Invariant tori, effective stability, and quasimodes with exponentially small error terms I - Birkhoff normal forms,* Ann. Henri Poincaré, **1** (2000), 223–248.

[30] (MR1770800) G. Popov, *Invariant tori, effective stability, and quasimodes with exponentially small error terms II - Quantum Birkhoff normal forms,* Ann. Henri Poincaré, **1** (2000), 249–279.

[31] (MR2104602) G. Popov, *KAM theorem for Gevrey hamiltonians*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **24** (2004), 1753–1786.

[32] (MR2111816) G. Popov, *KAM theorem and quasimodes for Gevrey Hamiltonians*, Mat. Contemp. **26** (2004), 87–107.

[33] G. Popov and P. Topalov, *Invariants of isospectral deformations and spectral rigidity*, preprint, arXiv0906.0449v1.

[34] L. Rodino, *Linear partial differential operators in Gevrey spaces*, World Scientific, Singapore, 1993.

[35] Stefanov P.: Quasimodes and resonances: Sharp lower bounds, *Duke Math. J.*, **99**, 1, 1999, pp. 75-92.

[36] (MR1994786) F. Wagener, *A note on Gevrey regular KAM theory and the inverse approximation lemma*, Dyn. Syst., **18** (2003), 159–163.

[37] (MR2317497) J. Xu and J. You, *Gevrey-smoothness of invariant tori for analytic nearly integrable Hamiltonian systems under Rüssmann's non-degeneracy condition*, J. Differential Equations, **235** (2007), 609–622.

[38] Zworski, M. *Semiclassical Analysis Graduete Studies in Mathematics*, Volume **138**, ANS, 2012.

Публикации по дисертацията

[39] T.Mitev and G.Popov, **Gevrey normal form and effective stability of Lagrangian tori,** *Discrete and continuous dynamical systems (series S)*, Volume **3**, Number **4**, December **2010**, pp **643-666**.

[40] T.Mitev, **Gevrey quasimodes associated with Kronecker invariant tori**, *Comptes rendus de I'Académie buldare des Sciences*, Volume **66**, Issue **10**, **2013**, pp. **1373-1379**.

[41] T.Mitev, **Quasimodes with exponentially small error**, $BGSIAM'14$, December **2014**, pp. **62-68**.

[42] T.Mitev and G.Popov, **Asymptotic quantization with exponentially small error** (в подготовка).