МЕТОД ЗА ОЦЕНЯВАНЕ НА АМЕРИКАНСКИ ВИД ДЕРИВАТИВИ

АВТОРЕФЕРАТ НА ДИСЕРТАЦИЯ

за присъждане на научна степен

ДОКТОР НА НАУКИТЕ

Цветелин Заевски
ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА
БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

Съдържание

1 Въведение

Дериватите са един от най-важните инструменти срещу финансовите рискове. Те се базират на някакъв основен обект, който може да бъде единичен актив, портфейл от активи, финансов индекс, стокови активи, облигации, дълг, други деривативи, волатилност (Cboe Volatility Index) и т.н. Всички те са конструирани за да хеджират основният актив при различни пазарни сценарии давайки различни права и задължения както за издателя, така и за притежателя им. Освен това, по-сложните инструменти могат да се разглеждат като трансмисия между различни финансови фактори – активи, възвръщаемост, риск, пазарна несигурност и т.н. – както и като регулатор между тях. Оценката на тези конструкции е една от основните задачи във финансовата математика. Важно е да се отбележи, че цената на деривативa е тясно свързана със стойността на основния обект поради силната зависимост между тях. Големият клас на деривативите включва много различни видове – фючърси, форуърди, опции, суапове, някои дългови инструменти и т.н.

Опциите са едни от най-търгуемите деривативи на съвременните финансови пазари. По същество те са договори между двама участници – издател и притежател – които дават някои права и задължения и на двамата. По-конкретно, опциите зависят от базовия актив и дават на собственика си правото без задължение да го продаде или купи на предварително договорена цена, наречена страйк цена (цена на изпълнение), до или на определена дата на падеж. Сумата, която притежателят трябва да плати за това право, формира цената на опцията и съответната премия. Има два основни типа опции - европейски и американски - това разграничение не е географско, а се определя от техните характеристики. Основна от тях е моментът на падеж. Докато европейските инструменти могат да се упражняват само на датата на падежа, американските дават на своя притежател правото да избере датата на падеж. По такъв начин той може незабавно да затвори позицията, когато базовият актив достигне желаното ниво. Това допълнително право е много важно за инвеститорите и обяснява голямата част, която американските опции имат сред всички търгувани деривативи на световните пазари. Освен това съществуват много екзотични модификации – азиатски, бермудски, бариерни, ограничени, straddle, strangle, отменяеми и т.н.

В съвременната финансова теория цените на активите се задават чрез стохастични процеси – дифузии, процеси на Леви, дробни процеси и т.н. В представената дисертация ние работим при лог-нормални предположения стъпвайки по този начин върху фундаменталния модел на Black and Scholes (1973). Въпреки че той не описва някои важни емпирични феномени наблюдавани на всички финансови пазари – тежки опашки, внезапни скокове, клъстерирана волатилност, дългосрочна зависимост, ливъридж ефекти и т.н. – ние го избираме поради неговата интуитивност и възможност за обобщаване. Оказва се,че много от получените резултати са верни при доста по-общи предположения. В допълнение, моделът на Black-Scholes е толкова фундаментален, че всеки нов подход би трябвало да се приложи първо спрямо него като по този начин се валидира както научната му значимост, така и практическата му стойност.

Има два основни метода за оценка на европейски вид деривативи. Една от основните теореми на математическите финанси гласи, че всички дисконтирани ценови процеси са мартингали спрямо така наречената рисково неутрална вероятностна мярка. За разлика от естествената вероятностна мярка, която описва пазарната несигурност (така наречената реална мярка), рисково-неутралната е математическа конструкция, базирана на някои неарбитражни аргументи. Тя позволява цената на деривативa да бъде изчислена като математическо очакване на неговото крайно плащане. Алтернативно, ако цената се разгледа като функция на времето и текущата стойност на основния актив, то тази функция решава частно диференциално уравнение с гранични условия, определени от платежната функция.

От друга страна, оценяването на американски опции е по-сложно. Очевидно, правото за ранно упражнение води до задача за оптимално спиране. Така че множеството на възможните състояния трябва да се раздели на две части. В първата от тях – т.нар. оптимална област, незабавното упражняване на деривативa е най-добрата стратегия за притежателя. Напротив, запазването на опцията дава по-добър финансов резултат, ако спот цената е в така нареченото множество за запазване. Така че притежателят упражнява деривативa, когато основният актив достигне до оптималното множество. Границата между двете области е известна като оптимална или граница за ранно упражняване. Обикновено задачите за оптимално спиране се разглеждат като диференциално уравнение със свободна граница, което води до двумерна динамична система от интегрални уравнения, която може да се реши числено. Като алтернатива в тази дисертация предлагаме нов метод, базиран на максимизиране на очакваните печалби. Използвайки някои свойства на първия момент на достигане до ниво от Брауново движение, ние апроксимираме оптималната граница, максимизирайки финансовите резултати на държателя на деривативa върху времева решетка. Като следствие, цената на опцията може да бъде изчислена с висока точност в реално време. Също така, след като веднъж имаме оптималната граница, диференциалната задача със свободната граница се превръща в частно диференциално уравнение проблем върху известна област. Много числени методи са приложими към тази задача. От друга страна, дериватите без матуритетни ограничения са специфични. Техните оптимални граници са независими по времето, тъй като притежателят и издателят им не са застрашени от принудително упражняване в матуритета. Това свойство позволява решаването на задачата за оценяване в затворена форма. Въпреки че тези деривативи се търгуват рядко, главно на някои неофициални пазари, те предоставят много важна информация. Асимптотичните характеристики, които те описват, предопределят цялостното поведение на оптималните граници, както и цените при ограничен падеж.

2 Увод

‘

2.1 Цел на дисертацията

Целта на тази дисертация е да се изследват финансовите инструменти от американски вид и да се конструира бърз и точен метод за техния анализ и оценка. Нашето изследване се базира на известния модел на Black and Scholes (1973), приемайки, че цената на основният актив се задвижва от лог-нормален стохастичен процес. Основната характеристика, която отличава американските от другите деривативи, е правото на ранно упражняване, което притежателят може да използва в произволен момент преди падежа. Но именно тази характеристика създава големи затруднения при анализа на този вид инструменти поради задачите за вземане на решения, до които те водят.

Като първа цел, ние разглеждаме някои класически инструменти като обичайните американски опции, както и техните ограничени(capped) версии, работейки с предложения нов подход. Въз основа на получените резултати, след това ще систематизираме математически тези деривативи спрямо вида на задачата до който те водят – едностранна задача за достигане, или двустранна задача за изход от ивица. Ще разгледаме подробно свойствата на така класифицираните групи. По този начин можем да изпълним следващата цел, а именно да предложим и проучим строг математически метод за дефиниране и изследване на нови финансови деривативи, които отговарят на различните нужди на инвеститорите. Тези нови инструменти включват strengle-стратегии, квадратични strengle-опции, степенни деривативи, отменяими опции, както и други инструменти с обобщени платежни функции *payoffs*. Ще покажем и някои такива примера. Не на последно място, достигнатите теоретични резултати ще бъдат валидирани и проверени чрез платформата за математически изчисления MATLAB.

2.2 Актуалност на темата

Правото на ранно упражняване, което характеризира американския вид деривативите, предполага тяхното голямо значение за финансовата индустрия. Това се подкрепя и от големият дял, който те имат от всички търгувани активи на съвременните пазари. Те са важни не само като търгувани средства, но и като регулатор на пазарната несигурност, както и като антирисков фактор. От друга страна, финансовата криза от 2008 г. доведе до появата на различни нови инструменти срещу възникващите нови рискове. Освен това, инвеститорите се нуждаят от бързи и точни методи за оценяване. Това е още по-вярно в светлината на нарастващата високочестотна търговия през последното десетилетие. Всичко това обуславя изключителното значение на съвременните научни изследвания в областта – факт, подкрепен от увеличаващата се литература, посветена на темата.

2.3 Оригиналност на теоретичните и практически резултати

Представената дисертация дава някои теоретични обобщения, както и решения на проблеми, възникващи от финансовата практика.

Два основни въпроса стоят пред притежателя на финансов дериватив от американски стил – оптимално ли е да се упражни незабавно и, ако не, каква е справедливата му цена. Основните съществуващи методи за оценка на такива инструменти се основават на динамично приближение на двойката оптимална граница-цена. Те отнемат относително много изчислително време. Ние решаваме този проблем, като изграждаме бърз и ефективен метод за приближаване на оптималната граница върху рядка времева мрежа. Като следствие, получаваме оценка за опцията с висока точност (четвърти знак след десетичната запетая) в реално време. Така почти веднага можем да преценим дали моментът е подходящ за упражнение и каква е цената на опцията, ако запазването ѝ е за предпочитане. Това е от изключително значение в светлината на нарастващата част от високочестотната търговия на съвременните финансови пазари.

От друга страна, ако имаме нужда от по-плътна времева мрежа, то конструираме различни методи за оценяване, основаващи се на Монте Карло симулации или базирани на крайни разлики.

Използваната методология се основава на няколко стъпки. Първо решаваме задачата за оценяване без матуритетни ограничения. След това апроксимираме оптималните граници при краен падеж максимизирайки финансовия резултат на притежателя на опцията. Като резултат, решаваме задачата за оценяване. По-късно ще разгледаме подробно тази схема.

Така установеният метод се прилага към няколко класически инструмента, включващи опциите и техните ограничени (capped) версии. В допълнение, обобщаваме теоретичните резултати, дефинирайки и изследвйки няколко нови класа финансови деривативи.

Друг теоретичен принос е един подход за систематизиране на финансови деривативи спрямо техните оптимални множества. Разграничаваме три основни типа. За инструментите от кол-вид оптималните точки са тези над определена граница, докато за пут-дериватвите са тези под. Освен това извеждаме достатъчно условие, което води до две оптимални множества – над и под съответните граници. Това води до оптимални стратегии, които с е явяват изход от ивица.

За да изследваме всички гореспоменати конструкции, имаме нужда от някои резултата, свързани с Лапласовата трансформация на първият момент на достигане на Брауново движение, или по точно на неговата плътност. Във вероятностни термини, това е функцията генерираща моментите. Нужните резултати са доказани в отделна глава.

Практическите приноси на дисертационния труд са в няколко насоки. Първо, ние прилагаме теоретичните резултати към някои съществуващи инструменти от американски вид - класически опции, ограничени опции, strangle-опции, отменяеми опции и др. Второ, ние изграждаме метод за изследване на деривативи с обобщени платежни функции, като разграничаваме инструменти пут и кол вид както и двустранни хибридни стратегии. По-специално, предлагаме някои нови американски деривативи, като strangle-опции с произволни цени на изпълнение и различни тегла на кол и пут характеристиките, квадратични strangle-опции, степенни фючърси, отмениями опции с конвертируема неустойка и др. Тези инструменти могат да отговорят на много изисквания на инвеститорите. Произволните страйк-цени, както и различните тегла в strangle-комбинациите позволяват изграждането на много нови стратегии, комбиниращи пут и кол платежни функции. Предложените квадратични strangle-стратегии предоставят по-силно хеджиране на рисковите позиции, които са далеч от цената на изпълнение. Обратното е вярно за позициите близо до тази цена. Това се постига чрез платежна функция, променена от $|x - K|$ на $(x - K)^2$. Тези заключения важат също и за степенните фючърсни договори. Нещо повече, изследваните обобщени платежни функции могат да се използват за специфичните нужди на инвеститорите. От друга страна, отменяемите опции дават на издателя си възможност за предсрочно отмяна. Цената на това право е неустойка над обичайната платежна функция. Ние разширяваме гъвкавостта на тези инструменти, като разглеждаме три компонентни неустойки - фиксирана сума, брой дялове от базовия актив, както и пропорция от обичайната платежна функция.

Така установените теоретични методи са практически валидирани софтуерно – ние използваме платформата за математически изчисления MATLAB. Имплементирани са формулите от затворен вид за безматуритетните инструменти. От друга страна, апроксимирайки оптималните граници при крайни падежи, ние предоставяме относително бърз метод за оценяване. В допълнение, конструираме различни числени подходи, базирани на Монте Карло симулации или различни схеми с крайни разлики, базирани на значително по-плътни времеви деления. Тези софтуерни алгоритми са изготвени за всички изследвани опции - класически, ограничени (capped) опции, степенни инструменти, strangle-опции както и квадратичната им разноводност, отменяеми опции и др. Нещо повече, предложените методи могат да бъдат приложени към различни нови ифинансови деривативи.

2.4 Мотивация и класически подходи

През последните години и още повече след финансовата криза от 2008 г. се наблюдава повишен интерес на международните финансови пазари към финансовите деривативи, тъй като те са един от основните инструменти срещу финансовия риск. Те показват много голямо разнообразие - най-популярни са опциите, фючърсите, облигациите, суаповете и т.н. Условно казано можем да разграниияим два вида - европейски и американски. Европейските деривативи имат предварително фиксирана дата, на която се изпълнява сделката. Алтернативно, инструментите от американски вид дават на своя притежател правото да избере кога да упражни преди падежа. Това право прави американските деривативи предпочитани за инвеститорите и предопределя големия сегмент, който те имат всред търгуваните активи на съвременните финансови пазари. Налични са много видове такива инструменти, факт, който води до нарастваща научна литература, посветена на темата. Тъй като притежателят има право да избира момента на упражняване, естествено е да се предположи, че той ще следва стратегия, която максимизира печалбата му. Така достигаме до проблем за оптимално спиране – виж Lamberton and Lapeyre (1996) или Wong (1996). Тези проблеми са решения на така наречените диференциални задачи със свободната граница – вижте Bensoussan (1984), Jaillet et al. (1990), Kim (1990), Jacka (1991), Peskir and Shiryaev (2006), Pascucci (2008) или Magirou et al. (2020). За тези задачи знаем диференциалното уравнение и трябва да намерим неговото решение, както и областта, в която то е удовлетворено. Математическа теорията за този вид уравнения може да бъде намерена в Bather (1970), Moerbeke (1973), Friedman (1975), Friedman (2010) и Shiryaev (2009). Получаването на решение в затворена форма е трудно и често невъзможно, освен когато няма матуритетни ограничения. За това много автори предлагат различни числени решения. Cox et al. (1979) предлагат много полезна схема, базирана на биномни дървета. Други интересни числени методи са предложени от Johnson (1983), Geske and Johnson (1984), Barone-Adesi and

Whaley (1987), Bjerksund and Stensland (1993), Ho et al. (1994), Ju (1998) и Longstaff and Schwartz (2001). Да отбележим също и изследванията на Brennan and Schwartz (1977), Myneni (1992), Karatzas (1988), Rogers (2002) и Huang et al. (1996). Те използват рекурсивен метод, базиран на класическите статии на Kim (1990), Jacka (1991) и Carr et al. (1992). Някои сравнения са представени в Zhao (2018). От друга страна, оптималната граница е константна по времето за опциите без матуритет, което позволява извеждането на формули в затворен вид – виж Shiryaev et al. (1995) или Shiryaev et al. (1994), в допълнение към споменатите по-горе изследвания. Някои формули за Lévy модели могат да бъдат намерени в Gerber and Shiu (1994), Pham (1997), Gerber and Shiu (1996), Mordecki (1999, 2002), Boyarchenko and Levendorskii (2002), Levendorskiǐ (2004) , Alili and Kyprianou (2005) и Ivanov (2007). Преглед на кредитните деривативи е предоставен в Popchev and Radeva (2008).

2.5 Методология

Финансовите инструменти, разгледани в тази дисертация, се изучават чрез методология, обобщена в следните стъпки:

1. Определяне на формата на оптималните множества както и на съответните граници за ранно упражняване.

2. Решаваме задачата за оценяване в затворена форма, когато няма падежни ограничения.

3. Определяме цената на дериватив, който изтича, когато логаритмуваната цена на базовия актив достигне линейна по части граница или излезе от ивица, образувана от такива функции.

4. Апроксимираме оптималната граница върху рядка времева мрежа. Така разбираме дали незабавното упражнение е оптимално или не.

5. Определяме цената на опцията въз основа на това приближение. Това е бърза и относително точна процедура – грешката е в четвъртия знак след десетичната запетая.

6. Апроксимираме цялата граница, ако има нужда от по-плътна времева мрежа.

7. Решаваме числено съответното уравнение на Блек-Шоулс чрез схема с крайни разлики или чрез Монте Карло симулации.

3 Структура на дисертацията

Дисертацията се състои от шестнадесет раздела, базирани на тринадесет публикувани статии:

1. Zaevski (2020d) Laplace transforms for the first hitting time of a Brownian motion. *Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences*, 73(7):934–941, 2020a. ISSN 2367-6248 (print), 2603-4832 (online).
doi: 10.7546/CRABS. 2020.07.05.
URL http://www.proceedings.bas.bg/index_old.html.

2. Zaevski (2021b) Laplace transforms of the Brownian motion's first exit from a strip. *Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences*, 74(5):669–676, 2021a. ISSN 2367-6248 (print),2603-4832 (online).
doi: 10.7546/CRABS.2021.05.04
URL http://www.proceedings.bas.bg/index_old.html.

3. Zaevski (2024a) Some limits for the Laplace transform of the Brownian motion's first hit to a linear function. *Serdica Mathematical Journal*, 50(2):183–202, 2024a. ISSN 1310-6600 (print), 2815-5297 (online).
doi:10.55630/serdica.2024.50.183-202.
URL https://serdica.math.bas.bg/index.php/serdica/article/view/87.

4. Zaevski (2021a) A new approach for pricing discounted American options. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 97:105752, 2021b. ISSN 1007-5704 (print), 1878-7274 (online).
doi: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2021.105752.
URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570421000630.

5. Zaevski (2022a) Pricing discounted American capped options.*Chaos, Solitons & Fractals*, 156:111833, 2022a. ISSN 1007-5704 (print), 1878-7274 (online).
doi: https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.111833.
URL https:// www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077922000443.

6. Zaevski (2024c) On some generalized American style derivatives. *Computational and Applied Mathematics*, 43(3):115, 2024b. ISSN 2238-3603 (print), 1807-0302 (online).
doi: https://doi.org/10.1007/s40314-024-02625-6.
URL https://link.springer.com/article/10.1007/s40314-024-02625-6.

7. Zaevski (2023b) American strangle options with arbitrary strikes. *Journal of Futures Markets*, 43(7):880–903, 2023a. ISSN 0270-7314 (print), 1096-9934 (online).
doi: https://doi.org/10.1002/fut.22419.
URL https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/fut.22419.

8. Zaevski (2024b) Quadratic American strangle options in light of two-sided optimal stopping problems. *Mathematics*, 12(10):1449, 2024c. ISSN 2227-7390.
doi: 10.3390/math12101449.
URL https://www.mdpi.com/2227-7390/12/10/1449.

9. Zaevski (2020b) Discounted perpetual game call options. *Chaos, Solitons & Fractals*, 131:109503, 2020b. ISSN 0960-0779 (print), 1873-2887 (online).

doi: https://doi.org/10.1016/j.chaos.2019.109503.
URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077919304552.

10. Zaevski (2020c) Discounted perpetual game put options. *Chaos, Solitons & Fractals*, 137:109858, 2020c. ISSN 0960-0779 (print), 1873-2887 (online).
doi: https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.109858.
URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077920302587.

11. Zaevski (2020a) Perpetual game options with a multiplied penalty. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 85:105248, 2020d. ISSN 1007-5704 (print), 1878-7274 (online).
doi: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105248.
URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570420300812.

12. Zaevski (2023a) Perpetual cancellable American options with convertible features. *Modern Stochastics: Theory and Applications*, 10(4):367–395, 2023b. ISSN 2351-6046 (print), 2351-6054 (online).
doi: 10.15559/23-VMSTA230.
URL https://www.vmsta.org/journal/VMSTA/article/273/read

13. Zaevski (2022b) Pricing cancellable American put options on the finite time horizon. *Journal of Futures Markets*, 42(7):1284–1303, 2022b. ISSN 0270-7314 (print), 1096-9934 (online).
doi: https://doi.org/10.1002/fut.22331.
URL https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/fut.22331.

Всички тези статии са самостоятелни. Статии с номера 1, 9, 10 и 11 са използвани в предишна процедура за длъжността доцент. Въпреки това резултатите, получени в тези статии, се използват съществено в по-късните публикации и поради тази прична са включени в настоящата дисертация. Някои кодове на MATLAB, които имплементират получените резултати, са представени в отделна глава. Списъкът с литература съдържа 294 източника, включително споменатите по-горе статии.

4 Основни резултати

4.2 Някои резултати за първо достигане до ниво

В Глава 2 са изведени някои резултати за първо достигане на брауново движение до (по части) линейни граници. Необходимостта от тези резултати е мотивирана от лог-нормалния процес, който използваме за моделиране на основния актив

$$dS_t = (r - \delta)\, S_t dt + \sigma S_t dB_t \tag{4.1}$$

Ако означим границата с $b(t) = b_1 t + b_2 > K$, моментът на първо достигане с τ, матуритетът с T, и цената на изпълнение с K, то настоящата стойност на крайното плащане на кол-опция може да се запише като

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{-\theta t}\left(S_t - K\right)^+\right] &= S_0 \mathbb{E}\left[e^{-\left(\theta - r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma b(\tau)} \Lambda_T\right] - K\mathbb{E}\left[e^{-\theta\tau}\Lambda_T\right] \\ &+ S_0 e^{-\left(\theta - r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T} \mathbb{E}\left[e^{\sigma B_T} I_{\tau \geq T, S_T > K}\right] - K\mathbb{P}\left(S_T \in \left(K, b(T)\right), \tau \geq T\right),\end{aligned} \tag{4.2}$$

където Λ_t е индикаторът τ да се случи преди t. Виждаме, че се нуждаем от Лапласовта трансформацията на момента на достигане, ако той се случва преди матуритета, и от трансформацията свързана с Брауновото движение ако $\tau \geq T$. Тези резултати са доказани в глава 2.2 като теореми 2.1 и 2.2:

Теорема 2.1 (Theorem 3.1 from Zaevski (2020d))**.** *Нека $\theta > 0$. Лапласовата трансформация на τ преди T е*

$$L(T, \theta; b_1, b_2) = \mathbb{E}\left[e^{-\theta\tau}\Lambda_T\right] = e^{b_2\left(\sqrt{b_1^2 + 2\theta} - b_1\right)} g\left(T; \sqrt{b_1^2 + 2\theta}, b_2\right), \tag{4.3}$$

където функцията $g(\cdot)$ е

$$g(T; b_1, b_2) \equiv \mathbb{P}(\tau < T) = 1 - N\left(\frac{b_1 T + b_2}{\sqrt{T}}\right) + \exp(-2 b_1 b_2) N\left(\frac{b_1 T - b_2}{\sqrt{T}}\right). \tag{4.4}$$

Теорема 2.2 (Theorem 3.2 from Zaevski (2020d))**.** *Ако $z < b(T)$, то*

$$\begin{aligned}&V(\theta, z, T; b_1, b_2) \equiv \mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{B_T > z, \tau > T}\right] = \\ &= \exp\left(\frac{T\theta^2}{2}\right)\left[\begin{array}{l} N\left(\frac{b(T) - T\theta}{\sqrt{T}}\right) - N\left(\frac{z - T\theta}{\sqrt{T}}\right) \\ + e^{2b_2(\theta - b_1)}\left(N\left(\frac{z - T\theta - 2b_2}{\sqrt{T}}\right) - N\left(\frac{b(T) - T\theta - 2b_2}{\sqrt{T}}\right)\right)\end{array}\right].\end{aligned} \tag{4.5}$$

Ако функцията $b(t)$ е по части линейна, то тези теореми изглеждат по следния начин

Теорема 2.3 (Theorem 4.1 from Zaevski (2020d))**.** *Нека $\theta > 0$. Лапласовата трансформация на τ при положение, че той се случва в m-ия интервал е*

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[e^{-\theta\tau} I_{\tau \in (t_{m-1}, t_m]}\right] \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\beta_1, \dots, \beta_{m-1}} \left(\begin{array}{c} \prod\limits_{i=1}^{m-1}\left(1 - \exp\left(-\frac{2(\beta_{i-1} - x_{i-1})(\beta_i - x_i)}{t_i - t_{i-1}}\right)\right) \\ \prod\limits_{i=1}^{m-1} \frac{\left(\exp\left(-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right)\right)}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \\ e^{-\theta t_{m-1}} L\left(t_m - t_{m-1}, \theta; b_{1,m}, \beta_{m-1} - x_{m-1}\right)\end{array}\right) dx_1 \dots dx_{m-1},\end{aligned} \tag{4.6}$$

където функцията $L(\cdot)$ се дава от формула (4.3).

Теорема 2.4 (Theorem 4.2 from Zaevski (2020d)). *Ако $z < b(T)$, то Лапласовата трансформация, при положение, че момента на достигане е след крайния момент T, е*

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{B_T > z, \tau > T}\right] \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\beta_1,\ldots,\beta_{n-1}} \left(\begin{array}{l}
\prod\limits_{i=1}^{n-1}\left(1-\exp\left(-\frac{2(\beta_{i-1}-x_{i-1})(\beta_i-x_i)}{t_i-t_{i-1}}\right)\right) \\
\prod\limits_{i=1}^{n-1}\frac{\left(\exp\left(-\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{2(t_i-t_{i-1})}\right)\right)}{\sqrt{2\pi(t_i-t_{i-1})}} \\
e^{\theta x_{n-1}} V\left(\theta, z-x_{n-1}, t_n-t_{n-1}; b_{1,n-1}, \beta_{n-1}-x_{n-1}\right)
\end{array}\right) dx_1 \ldots dx_{n-1},
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

където функцията $V(\cdot)$ се задава чрез формула (4.5).

Ако разглеждаме финансов дериватив с ограничена от двете страни област на запазване, тогава момента на упражняване е първото напускане на ивица. Такива деривативи са стредъл и стренгъл комбинациите, както и отменяемите опции. Желаните резултати са получени и представени в теореми 2.6, 2.7 и 2.8 от глава 2.4. Също така доказваме резултатите, когато границите са по части линейни и едната от тях изчезва след някакъв момент – Теорема 2.9.

В тази глава изследваме и някои граници, свързани с изследваните трансформации на Лаплас. Тяхната необходимост възниква, когато разглеждаме така деривативи без падежни ограничения – $T = \infty$. Резултатите са формулирани в две теореми – 2.10 и 2.11:

Теорема 2.10 (Theorem 3.1 from Zaevski (2024a)). *Нека θ е положителна константа и ζ е момента на първо достигане на брауново движвние до линейна функция $b(t) = b_1 t + b_2$. Следните твърдения са верни.*

1. *Ако $\{b_2 = 0\}$, то $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta}\right] = 0$.*
2. *Ако $\left\{b_2 \neq 0, k < -\frac{\theta^2}{2}\right\}$, то $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta}\right] = 0$.*
3. *Ако $\left\{b_2 \neq 0, b_1 = \theta, k = -\frac{\theta^2}{2}\right\}$, то $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta}\right] = 0$.*
4. *Ако $\left\{b_2 \neq 0, b_1 = \theta, k > -\frac{\theta^2}{2}\right\}$, то $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta}\right] = \infty$.*
5. *Ако $\left\{b_2 > 0,\ b_1 < \theta,\ k = -\frac{\theta^2}{2}\right\}$, то $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta}\right] = 0$.*
6. *Ако $\left\{b_2 > 0,\ b_1 > \theta,\ k = -\frac{\theta^2}{2}\right\}$, то $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta}\right] = 1 - e^{2b_2(\theta - b_1)}$.*
7. *Ако $\left\{b_2 > 0,\ b_1 > \theta,\ k > -\frac{\theta^2}{2}\right\}$, то $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta}\right] = \infty$.*

8. *Ако* $\left\{b_2 > 0,\ b_1 < \theta,\ -\frac{\theta^2}{2} < k \leq \frac{b_1^2}{2} - \theta b_1\right\}$, *то* $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta}\right] = 0$.

9. *Ако* $\left\{b_2 > 0,\ b_1 < \theta,\ \frac{b_1^2}{2} - \theta b_1 < k\right\}$, *то* $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta}\right] = \infty$.

10. *Ако* $\left\{b_2 < 0,\ b_1 > \theta,\ k = -\frac{\theta^2}{2}\right\}$, *то* $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta}\right] = 0$.

11. *Ако* $\left\{b_2 < 0,\ b_1 < \theta,\ k = -\frac{\theta^2}{2}\right\}$, *то* $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta}\right] = 1 - e^{2b_2(\theta - b_1)}$.

12. *Ако* $\left\{b_2 < 0,\ b_1 < \theta,\ k > -\frac{\theta^2}{2}\right\}$, *то* $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta}\right] = \infty$.

13. *Ако* $\left\{b_2 < 0,\ b_1 > \theta,\ -\frac{\theta^2}{2} < k \leq \frac{b_1^2}{2} - \theta b_1\right\}$, *то* $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta}\right] = 0$.

14. *Ако* $\left\{b_2 < 0,\ b_1 > \theta,\ \frac{b_1^2}{2} - \theta b_1 < k\right\}$, *то* $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta}\right] = \infty$.

Теорема 2.11 е за подобен проблем в случая, когато Брауновото движение е ограничено от друга линейна функция.

4.3 Основни положения

Както споменахме по-горе, нашето изследване е поставено в рамката на известния модел на Black and Scholes (1973) – основният актив се моделира чрез лог-нормалната дифузия

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t, \tag{4.8}$$

където r е безрисковият лихвен процент, а σ е волатилността. Да обърнем внимание, че динамиката (4.8) е спрямо рисково-неутралната мярка. Да предположим, че европейски дериватив матурира, когато активът напусне множество D, чиято граница е ∂D. Ако τ е първия изход а платежната функция е $G(t, x)$, тогава принципът на рисково-неутралното ценообразуване гласи, че цената на дериватива може да се намери като

$$Y_t = \mathbb{E}^{t,S_t}\left[e^{-r(\tau - t)} G(\tau, S_\tau)\right]. \tag{4.9}$$

Алтернативно, цената на дериватива може да бъде записана като функция на времето и текущата цена на основния актива – $Y_t = V(t, S_t)$. Уравнението на Колмогоров ни дава, че функцията $V(\cdot, \cdot)$ е решения на частното диференциално уравнение (ЧДУ)

$$\begin{aligned} &V_t(t, x) + \left(\mathcal{A}^{\mathbb{Q}} V\right)(t, x) - rV(t, x) = 0, \quad (t, x) \in D \\ &V(t, x) = G(t, x), \quad (t, x) \in \partial D, \end{aligned} \tag{4.10}$$

където $\mathcal{A}^{\mathbb{Q}}$ е инфинитезималния генератор на дифузията (4.8) спрямо рисково-неутралната мярка $\mathbb{Q}$. Уравнението (4.10) е известното уравнение на Блек-Шоулс. Ако активът изплаща непрекъснато дивиденти при процент λ, тогава динамиката (4.8) се превръща в

$$dS_t = (r - \lambda)\, S_t dt + \sigma S_t dB_t. \tag{4.11}$$

Разбира се, уравнението на Блек-Шоулс (4.10) се нуждае от малка модификация. В нашето изследване дивидентите са въведени по алтернативен начин чрез подход, предложен от Shiryaev et al. (1995). Рисково-неутралната динамика (4.8) запазва формата си, но платежната функция се променя на $N(t,x) = e^{\lambda t} g(x)$. Този метод е възможен благодарение на следната теорема:

Теорема 3.1 (See Proposition 2.3 from Zaevski (2020c))**.** *Модел параметризиран чрез (r, λ, δ) е еквивалентен на $(r - \delta, \lambda + \delta, 0)$-модел в смисъл, че дериватива има една и съща цена в началния момент и при двете алтернативи.*

По този начин кол- и пут- платежните функции могат да се запишат като

$$\begin{aligned} N(t,x) &= e^{-\lambda t} (x - K)^{+} \quad \text{call} \\ N(t,x) &= e^{-\lambda t} (K - x)^{+} \quad \text{put.} \end{aligned} \tag{4.12}$$

Нека се върнем към американските деривативи. Правото на ранно упражняване води до проблем за оптимално спиране. Така уравнението на Блек-Шоулс (4.10) се превръща в диференциално урвнение със свободна граница – трябва да намерим както решението, така и областта D, в която то е изпълнено. Класическият метод за решаване на тези задачи използва двумерна интегро-диференциална система за свободната граница и ценовата функция.

В настоящото изследване ние предлагаме различен подход, основан на максимизиране на пеалбата на държателя на дериватива. Наред със своята интуитивност, този метод има и друго голямо предимство – изисква относително малко изчислително време. От друга страна, често притежателят не се нуждае от справедливата цена на опцията, а само дали е оптимално да се упражни веднага или не. Ако използваме класическия подход, трябва да решим двумерната система, докато нашият метод връща незабавно оптималната стойност в текущия момент.

По същество, нашият метод разделя задачата със свободната граница на две части. Първо, апроксимираме оптималната граница. Така достигаме до ЧДУ върху известно множество. Можем да го решим по два начина – чрез очакването (4.9) или чрез ЧДУ-то (4.10). По-късно ще конструираме някои Монте Карло методи за определяне на очакването (4.9). Като алтернатива, ние модифицираме експлицитния, имплицитния и Кранк-Николсън–метода на крайната разлики към ЧДУ-то. Съвсем очаквано, последният е най-подходящ поради своята стабилност (A-стабилност, не L-стабилност).

В цялата дисертация ще използваме следните константи:

$$p := \frac{x_1 - x_2}{\sigma} = 2\sqrt{\left(\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{r+\lambda}{\sigma^2}}$$
$$q := -\frac{x_2}{\sigma} = \sqrt{\left(\frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\frac{r+\lambda}{\sigma^2}} + \frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}. \tag{4.13}$$

Те са свързани с корените на квадратно уравнение, което характеризира първото достигане на брауново движение до линейна граница. Имаме $p \geq q+1$, като равенство се достига само в недисконтирания случай.

4.4 Нов метод за оценка на дисконтирани Американски деривативи

В тази глава изследваме американските опции чрез нашия подход при наличие на допълнително дисконтиране. За някои фундаментални резултати в областта препоръчваме Kim (1990), Jacka (1991), Jacka (1991) и Carr et al. (1992).

Доказваме всички основни свойства на оптималните граници и свързаните с тях множества. Както обикновено, притежателят на американска кол опция упражнява, когато базовият актив е над оптималната граница и обратно за пут. Резултатите за опции без матуритет са обобщени в теореми 4.1 и 4.2:

Теорема 4.1. *Нека $T = \infty$. Цената на дисконтирана американска кол опция, издадена върху актив с начална цена под границата на упражняване $S_0 = x < c$ и цена на изпълнение K е*

$$V(x) = \left(\frac{x}{p-q}\right)^{p-q} \left(\frac{p-q-1}{K}\right)^{p-q-1}, \tag{4.14}$$

където p and q са дадени в (4.13). Да отбележим, че $p > q+1$ когато $\lambda > 0$.

Ако началната стойност на актива е над оптималнат границата, тогава цената на опцията е $V(x) = x - K$. Самата границата е

$$c = \frac{p-q}{p-q-1}K. \tag{4.15}$$

Оптималната стратегия е първото достигане до $[c, \infty)$.

Теорема 4.2. *Ако началната цена на актива е над оптималнат границата, $S_0 = x > c$, то цената на американска пут опция е*

$$V(x) = \left(\frac{K}{q+1}\right)^{q+1} \left(\frac{q}{x}\right)^{q}, \tag{4.16}$$

Ако началната стойност на актива е под границата, то цената е

$$V\left(x\right) = K - x. \tag{4.17}$$

Границата е

$$c = \frac{q}{q+1}K. \tag{4.18}$$

Да обобщим подхода за апроксимиране на оптималната граница за американска пут опция чрез експонента на по части линейни функции. Нека времевият интервал $[0, T]$ е разделен на n подинтервала $0 \equiv t_0 < t_1 < ... < t_n \equiv T$. Да предположим, че стратегията на притежателя ζ е да упражни, когато активът достигне ниво $\exp\left(a_i t + b_i\right)$, ако това се случи в интервала $[t_{i-1}, t_i)$, $i = 1, 2, ..., n$. Налагаме и непрекъснатост $\exp\left(a_i t_i + b_i\right) = \exp\left(a_{i+1} t_i + b_{i+1}\right) \equiv C_i$. Да приемем, че базовият актив стартира от стойност x, т.е. $S_0 = x$. Следователно упражняването се случва, когато брауновото движение достигне ниво

$$\frac{1}{\sigma}\left(\left(a_i - r + \frac{\sigma^2}{2}\right)t + b_i - \log\left(x\right)\right) = A_i t_i + B_i \tag{4.19}$$

за

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{\sigma}\left(a_i - r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \\ B_i &= \frac{b_i - \log\left(x\right)}{\sigma}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Нека дефинираме дериватив, който плаща сума от $\exp\left(-\lambda\left(\zeta \wedge T\right)\right)\left(K - S_{\zeta\wedge T}\right)^+$ в момент $\zeta \wedge T$. Означаваме цената му с

$$\begin{aligned} &V\left(x; \{t_0, ..., t_n\}; \{C_0, ..., C_n\}\right) = \mathbb{E}^x\left[e^{-(r+\lambda)(\tau\wedge T)}(K - S_{\tau\wedge T})^+\right] \\ &= \mathbb{E}^x\left[e^{-(r+\lambda)\tau}\left(K - S_\tau\right)\Lambda_T\right] + E^x\left[e^{-(r+\lambda)T}(K - S_T)^+\Phi_T\right] \\ &= K\mathbb{E}\left[e^{-\alpha_1\tau}\Lambda_T\right] - x\sum_{m=1}^{n} e^{\sigma B_m} E\left[e^{-\alpha_{2,m}\tau} I_{t_{m-1}<\tau\leq t_m}\right] \\ &+ Ke^{-\alpha_1 T}\mathbb{Q}\left(B_T < k, \Phi_T = 1\right) - xe^{-\alpha_3 T}\mathbb{E}\left[e^{\sigma B_T} I_{B_T<k,\Phi_T=1}\right] \end{aligned} \tag{4.21}$$

за

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= r + \lambda \\ \alpha_{2,m} &= (r+\lambda) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) - A_m\sigma = \frac{\sigma^2}{2} - A_m\sigma + \lambda \\ \alpha_3 &= \lambda + \frac{\sigma^2}{2} \\ k &= \frac{1}{\sigma}\log\left(\frac{K}{x}\right) - \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)T. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Нашият алгоритъм се основава на уравнения (4.21) и (4.22).

1. Стойността на оптималнат границата при падежа, C_n, е

$$c\left(T\right)=\min\left(\frac{r+\lambda}{\lambda},1\right)K. \tag{4.23}$$

2. Да предположим, че сме намерили стойностите C_m, C_{m+1}, ..., C_n за някое $m\leq n$. Нека фиксираме $x\leq K$ и означим с $C\left(x\right)$

$$C\left(x\right)=\arg\max\left\{C:V\left(x;\left\{0,t_m-t_{m-1},...,t_n-t_{m-1}\right\};\left\{C,C_m,...,C_n\right\}\right)\right\}. \tag{4.24}$$

   Можем да намерим C_{m-1} чрез една от формулите

$$\begin{aligned} &C_{m-1}=\max\left\{x:C\left(x\right)=x\right\}\\ &C_{m-1}=\max\left\{x:V\left(x;\left\{0,t_m-t_{m-1},...,t_n-t_{m-1}\right\};\left\{C\left(x\right),C_m,...,C_n\right\}\right)=K-x\right\}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

   Функции $V\left(x;\left\{0,t_m-t_{m-1},...,t_n-t_{m-1}\right\};\left\{C,C_m,...,C_n\right\}\right)$ се изчисляват чрез уравнения (4.21) и (4.22).

Нека обсъдим този алгоритъм. Ако действителната оптимална граница наистина е експонента от по части линейна функция, тогава константата $C\left(x\right)$ няма да зависи от конкретната стойност на първоначалната цена на актива x. Така че можем да фиксираме едно x и да намерим стойността на C. Това предположение обаче е необосновано и затова се нуждаем от друг подход. Търсим най-голямото x, за което $C\left(x\right)=x$ – това е най-голямата първоначална стойност за актива, която да прави незабавното упражнение оптимално.

Оказва се, че този алгоритъм приближава оптималната граница много точно, използвайки само три стъпки. Резултатът за цената на опцията също е близък до реалния. Времето за изчисление е незначително. Ако се нуждаем от изключително висока точност, тогава можем да изпълним няколко пъти алгоритъма с различно времево разделяне и по този начин да апроксимираме границата върху по-плътна мрежа. Въз основа на нея създаваме Монте Карло метод за намиране на очакването (4.9), имайки предвид някои резултати на Wang and Pötzelberger (1997):

1. Генерираме $m-1$ нормално разпределени стойности с нулево очакване и стандартно отклонение единица. Те образуват вектора u.

2. Нека D е $(m-1)\times(m-1)$ диагонална матрица съставена от $\sqrt{T/N}$ и M е $(m-1)\times(m-1)$ долна триъгълна матрица със стойности единици. Дефинираме вектора x като $x=MDu$.

3. Изчисляваме стойностите на функцията

$$w_j = e^{-\alpha t_{m-1}} L\left(t_m - t_{m-1}, \alpha; a_m, b_m - x_{m-1}\right).$$

4. Извеждаме стойностите на функцията

$$v_j = v\left(x_1, ..., x_{m-1}\right) = \prod_{i=1}^{m-1} I_{x_i < \bar{c}_i} \left(1 - \exp\left(-\frac{2\left(\bar{c}_{i-1} - x_{i-1}\right)\left(\bar{c}_i - x_i\right)}{\frac{T}{N}}\right)\right).$$

5. Изчисляваме $p_j = w_j v_j$.

6. Изчисляваме отрязаната Лапласова трансформация, повтаряйки горната процедура H пъти и усреднявайки $\left(\sum_{i=1}^{H} p_i\right) \Big/ H$.

Последните два члена в уравнението (4.21) се получават по същия начин, като се вземе $m = n$ и се промени членът $e^{-\alpha t_{m-1}} L\left(\cdot\right)$ в w (стъпка 3) на $e^{-\alpha x_{m-1}} U\left(\cdot\right)$ и $e^{-\alpha x_{m-1}} V\left(\cdot\right)$, съответно.

Резултатите за кол опции се получават чрез някои симетрични аргументи.

4.5 Оценяване на Американски опции при ограничение за цената на основния актив

За някои основни резултатите препоръчваме Broadie and Detemple (1995) and Detemple and Tian (2002). Ограничената опция лимитира спот цената, на която държателя може да упражни опцията, до фиксирано ниво – да речем L. Така платежните функции се задават чрез

$$\begin{aligned} N\left(t, x\right) &= e^{-\lambda t}\left(S_t \wedge L - K\right)^+ \\ N\left(t, x\right) &= e^{-\lambda t}\left(K - S_t \vee L\right)^+, \end{aligned} \tag{4.26}$$

В съгласие с Broadie and Detemple (1995), установяваме формата на оптималните граници:

Теорема 5.1 (Theorem 3.1 of Zaevski (2022a))**.** *Ако $c^A\left(t\right)$ е оптималната граница за опция без ограничаване, тогава границата на дисконтираната американска ограничена пут опция е $c\left(t\right) = c^A\left(t\right) \vee L$.*

Теорема 5.3 (Theorem 4.1 of Zaevski (2022a))**.** *Границата за упражняване на американска ограничена кол опция е $c\left(t\right) = c^A\left(t\right) \wedge L$.*

Важно е да се отбележи, че тези теореми са доказани чрез техника, базирана на инфинитезималните генератори – тя ни позволява да обобщим резултатите за различни стохастични процеси.

Изведена е следната теорема за цената на пут опция при краен матуритет.

Теорема 5.2 (Theorem 3.2 of Zaevski (2022a)). *Нека константите D_1 и D_2 са*

$$\begin{aligned} D_1 &= \min\left(\frac{r+\lambda}{\lambda}, 1\right) K \\ D_2 &= \frac{q}{q+1} K. \end{aligned} \tag{4.27}$$

В случай, че $L \in (D_2, D_1)$, ще означаваме с τ^* това време до падежа, за което $c^A(\tau^*) = L$. Цената на американска ограничена пут опция може да бъде получена чрез едно от следните твърдения.

1. *Да предположим, че $L \in [D_1, K)$. Ако $S_0 \leq L$, то цената е $V = K - L$. В противен случай, ако $S_0 > L$, то цената е*

$$\begin{aligned} V &= (K-L)\, e^{b_2\left(\sqrt{b_1^2+2(r+\lambda)}-b_1\right)} g\left(T, \sqrt{b_1^2+2(r+\lambda)}, b_2\right) \\ &\quad + K e^{-(r+\lambda)T} W(0, d(T,K), T; b_1, b_2) - S_0 e^{-\left(\lambda+\frac{\sigma^2}{2}\right)T} W(-\sigma, d(T,K), T; b_1, b_2) \\ &\quad g(T; b_1, b_2) = 1 - N\left(\frac{b_1 T + b_2}{\sqrt{T}}\right) + \exp(-2b_1 b_2) N\left(\frac{b_1 T - b_2}{\sqrt{T}}\right) \\ &\quad d(t,x) = \frac{\ln S_0 - \ln x}{\sigma} + \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right) t \\ &\quad W(\theta, z, T; b_1, b_2) \\ &\quad = \exp\left(\frac{T\theta^2}{2}\right) \left[\begin{array}{l} N\left(\frac{b(T)-T\theta}{\sqrt{T}}\right) - N\left(\frac{z-T\theta}{\sqrt{T}}\right) \\ +e^{2b_2(\theta-b_1)}\left(N\left(\frac{z-T\theta-2b_2}{\sqrt{T}}\right) - N\left(\frac{b(T)-T\theta-2b_2}{\sqrt{T}}\right)\right) \end{array}\right] \\ b_1 &= \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \\ b_2 &= \frac{\ln S_0 - \ln L}{\sigma}. \end{aligned} \tag{4.28}$$

2. *Да предположим, че $L \in (D_2, D_1)$ и $T > \tau^*$. Ако $S_0 \leq L$, то $V = K - L$. Ако $S_0 > L$, то цената на американската ограничена опция е*

$$\begin{aligned} V &= (K-L)\, e^{b_2\left(\sqrt{b_1^2+2(r+\lambda)}-b_1\right)} g\left(T-\tau^*, \sqrt{b_1^2+2(r+\lambda)}, b_2\right) \\ &\quad + e^{-(r+\lambda)(T-\tau^*)} \int\limits_{-\infty}^{d(T-\tau^*, L)} A\left(S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-\tau^*)-\sigma y}, \tau^*\right) f(T-\tau^*, y)\, dy, \end{aligned} \tag{4.29}$$

където A е цената на съответната обикновена американска опция.

3. *Ако $L \leq D_2$ или $L \in (D_2, D_1) \cap T \leq \tau^*$, то опцията е обикновена американска и нейната цена може да бъде намерена с помощта на предоставения подход в Глава 4.*

Тази теорема предоставя явна формула в първия случай, докато в третия случай имаме обикновена американска опция. Нека обсъдим втория случай. Численият подход за оценяване на американски опции, използван в Глава 4 (без значение дали с крайни разлики или Монте Карло), позволява извличането на цените на обичайната пут опция за различни първоначални стойности на базовия актив наведнъж. Така интегралът във формула (4.29) може лесно да бъде оценен, което прави оценяването на ограничената опция много бързо.

Резултатите за кол опциите се получават по подобен начин.

4.6 Някои обобщения на Американските опции

В тази глава представяме метод за определяне кога една платежна функция води до задача, подобна на тази за класическите американски опции в смисъл, че пространството на състоянието може да бъде разделено на две свързани части – оптимален и регион за запазване. Ще казваме, че дериватива е кол вид, ако оптималният регион е отгоре. Ако е отдолу, наричаме дериватива пут стил. Нека платежната функция е

$$N(t, x) = e^{-\lambda t} G(x) \tag{4.30}$$

Дефинираме следния диференциален оператор, свързан с инфинитезималния, върху C^2-функциите:

$$(\mathcal{B}g)(x) = (\mathcal{A}g)(x) - (r + \lambda) g(x). \tag{4.31}$$

Доказваме, че следните условия водят до такива инструменти:

1. Кол: ако $(\mathcal{B}G)(x) < 0$ за някое x, то $(\mathcal{B}G)(y) < 0$ за всички $y \geq x$.
2. Пут: ако $(\mathcal{B}G)(x) < 0$ за някое x, то $(\mathcal{B}G)(y) < 0$ за всички $y \leq x$.

Да се обърнем към кол-дериватите при безкраен времеви интервал. Нека функцията $g_c(c)$ бъде дефинирана като

$$g_c(c) = \frac{G(c)}{c^{p-q}}, \tag{4.32}$$

Ако стартира от ниво x, то финансовият резултат от стратегията на първо достигане до c е

$$V^c(x; c) = g_c(c) x^{p-q} + \lim_{T \to \infty} \mathbb{E}^x \left[e^{-(r+\lambda)T} G(S_T) I_{T < \zeta^c} \right]. \tag{4.33}$$

Доказваме, че тази функция няма повече от един локален максимум в интервала $[x, \infty)$. Ако означим с $c(x)$ глобалния максимум в този интервал, то доказваме следния резултат:

1. Ако съществува начална точка x, за която x е строго по-малко от $c(x)$, $x < c(x)$, то $c(x)$ е оптималната граница.

2. Ако $x = c(x)$ за всички x, тогава оптималната граница е нула, т.е. всички точки са оптимални.

3. Ако $x < c(x)$ за всяко x, то оптималната граница е безкрайност, т.е. ранното упражняване никога не е оптимално.

Така получаваме оптималната граница c и цената, до която тя води чрез формула (4.33).

Пут-стойността се задава чрез:

$$V^p(x; c) = \frac{g_p(c)}{x^q} + \lim_{T \to \infty} \mathbb{E}^x \left[e^{-(r+\lambda)T} G(S_T) I_{T<\zeta^c} \right], \tag{4.34}$$

където функцията $g_p(\cdot)$ е

$$g_p(c) = G(c) c^q. \tag{4.35}$$

В този случай ние максимизираме в интервала $(0, x]$. Резултатът за оптималната граница е:

1. Ако $c(x) < x$ за някое x, то оптималната граница е именно $c(x)$.

2. Ако $c(x) = x$ за всички x, то всички точки са оптимални.

3. Ако $c(x) < x$ за всички x, то ранното упражняване никога не е оптимално.

Финансовите инструменти с краен падеж се оценяват чрез подхода за обичайните американски опции, представен в глава 3.

Като частен случай разглеждаме платежни функции в степенен вид $G(x) = Mx^n + K$, където $n > 0$ и $M \in \{-1, 1\}$. Оказва се, че следната константа е много важна:

$$L = (n-1)\left(r + \frac{\sigma^2}{2} n\right) - \lambda. \tag{4.36}$$

Да означим с A_1 и A_2 крайните точки на оптималната граница на пут-дериватив, а с B_1 и B_2 тези за кол. Да Обърнем внимание, че дериватívът може да комбинира и двете свойства - това се случва, когато ранното упражняване е винаги или никога оптимално. Доказан е следният резултат:

Теорема 6.3 (Theorem 3 of Zaevski (2024c))**.** *В сила са следните твърдения.*

1. *Ако* $\{L=0,\ K\geq 0\}$, $\{L<0,\ M=1,\ K\geq 0\}$ *или* $\{L>0,\ M=-1,\ K\geq 0\}$, *то дериватива е комбиниран пут-кол и незабавното изпълнение е винаги оптимално. Границите като кол* $B_1=B_2=0$, *а като пут* $A_1=A_2=\infty$. *Цената се задава от* $V^c(x)=Mx^n+K$.

2. *Ако* $\{L=0,\ K<0\}$, $\{L<0,\ M=-1,\ K\leq 0\}$ *или* $\{L>0,\ M=1,\ K\leq 0\}$, *то дериватива отново е комбиниран пут-кол, но незабавното упражняване никога не е оптимално. Границите като кол са* $B_1=B_2=\infty$, *а като пут* $A_1=A_2=0$. *Цената е* $V(x)=Mx^n$ *в първия случай,* $V(x)=0$ *във втория и* $V(x)=\infty$ *в третия.*

3. *Ако* $\{L<0,\ M=1,\ K<0\}$ *или* $\{L>0,\ M=-1,\ K<0\}$, *то имаме кол-дериватив. Стойностите на оптималните граници се дават с формулите* (4.37) *и* (4.38):

$$B_1=\left(K\frac{r+\lambda}{L}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad B_2=\left(-K\frac{p-q}{p-q-n}\right)^{\frac{1}{n}} \tag{4.37}$$

$$B_1=\left(-K\frac{r+\lambda}{L}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad B_2=\left(-K\frac{p-q}{n-p+q}\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{4.38}$$

съответно. Цената е $V^c(x)=Mx^n+K$, *ако* $x\geq B_2$. *Иначе, цента се задава чрез* $V^c(x)=\frac{B_2^n+K}{B_2^{p-q}}x^{p-q}$ *или* $V^c(x)=\frac{-B_2^n+K}{B_2^{p-q}}x^{p-q}$ *съответно в първия и втория случай.*

4. *Ако* $\{L<0,\ M=-1,\ K>0\}$ *или* $\{L>0,\ M=1,\ K>0\}$, *то имаме пут-дериватив. Границите са*

$$A_1=\left(-K\frac{r+\lambda}{L}\right)^{\frac{1}{n}} \qquad A_2=\left(\frac{Kq}{q+n}\right)^{\frac{1}{n}}, \tag{4.39}$$

for the first case; цената е $V^p(x)=Mx^n+K$ *ако* $x\leq A_2$ *и* $V^p(x)=\frac{\left(-A_2^n+K\right)A_2^q}{x^q}$ *иначе. Началната стойност на оптималната граница* A_1 *за втория случай е* $A_1=\left(K\frac{r+\lambda}{L}\right)^{\frac{1}{n}}$, *докато крайната е нула ,* $A_2=0$. *Цената в този случай е* $V^p(x)=\infty$.

Може да изглежда, че изискването за двукратна диференцируемост е доста ограничително, тъй като много търгувани инструменти не го удовлетворяват - например опциите в цената на изпълнение. Всъщност то не е толкова силно, тъй като всички реални финансови деривативи допускат изглаждане на платежните функции. Например тези на опциите могат да бъдат приближени чрез следните функции:

$$G_\epsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x < K \\ \frac{(x-K)^2}{2\epsilon}, & \text{if } K \le x < K+\epsilon \quad call \\ x - K - \frac{\epsilon}{2}, & \text{if } K+\epsilon \le x. \end{cases} \tag{4.40}$$

$$G_\epsilon(x) = \begin{cases} K + \frac{\epsilon}{2} - x, & \text{if } x < K - \epsilon \\ \frac{(K-x)^2}{2\epsilon}, & \text{if } K - \epsilon \le x < K \quad \text{p}ut \\ 0, & \text{if } K \le x. \end{cases} \tag{4.41}$$

4.7 Американски стренгъл-стратегии с произволни цени на изпълнение

В тази глава са разгледани така наречените американски стренгъл-стратегии. Някои основни резултати могат да се намерят в Beibel and Lerche (1997) and Shiryaev (1999), Jeon and Oh (2019), and Qiu (2020). Основната им характеристика е комбинираното пут и кол право. Притежателят има право да упражни опцията избирайки и нейния вид – пут или кол. В съществуващата литература е прието че кол-страйка е над пут-страйка – ние се отказваме от това ограничение. Също така приемаме, че теглата на пут и кол правата са различни. Доказваме, че тези инструменти водят до задача за първи изход от ивица. Именно тази ивица е област за запазване на деривативa. Ако инвеститорът предпочита пут-характеристика, той получава $C_1 > 0$ акции от пут опция с цена на изпълнение K_1. Аналогично, ако притежателят избере функция за кол, той получава плащането на $C_2 > 0$ кол опции със страйк-цена K_2. Следователно платежната функция на опцията може да се запише като

$$N(t,x) = e^{-\lambda t} \max\left\{C_1 (K_1 - x)^+, C_2 (x - K_2)^+\right\}. \tag{4.42}$$

Нека D_0 е стойността, която приравнянва пут и кол платежните функции:

$$D_0 := \frac{C_1 K_1 + C_2 K_2}{C_1 + C_2}. \tag{4.43}$$

Наричаме я пут-кол-бариера. Имаме две оптимални граници – между множеството за запазванеи и пут- и кол- оптималните множества. Означаваме тези граници съответно с $A(t)$ и $B(t)$. Доказваме, че пут-границата $A(\tau)$ е ненарастваща спрямо времето до падежа, докато кол-границата $B(\tau)$ не намалява. Началните им стойности са

$$
\begin{aligned}
D_1 &\equiv A(0) = \min\left\{K_1, \frac{C_1K_1 + C_2K_2}{C_1 + C_2}, \frac{r+\lambda}{\lambda}K_1\right\} \\
D_2 &\equiv B(0) = \max\left\{K_2, \frac{C_1K_1 + C_2K_2}{C_1 + C_2}, \frac{r+\lambda}{\lambda}K_2\right\}.
\end{aligned} \tag{4.44}
$$

Оказва се, че незабавното упражняване никога не е оптимално като кол, ако допълнителният дисконтов фактор λ е нула. Да предположим, че $\lambda > 0$. Доказваме, че следното уравнение има единствено решение – то определя оптималните граници при безкраен матуритет:

$$
\begin{aligned}
&a^{p+1}C_1C_2K_2\alpha - a^pC_1C_2K_1\beta - a^{p-q}C_2^2K_2(\beta - \alpha) \\
&- a^{q+1}C_1^2K_1(\beta - \alpha) - aC_1C_2K_2\beta + C_1C_2K_1\alpha = 0,
\end{aligned} \tag{4.45}
$$

където α и β са

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{q}{q+1} \\
\beta &= \frac{p-q}{p-q-1}.
\end{aligned} \tag{4.46}
$$

Теорема 7.1 (Theorem 4.1 of Zaevski (2023b))**.** *Да предположим, че $\lambda > 0$ и $\overline{a}$ е решението на уравнение (4.45). Оптималните граници могат да бъдат получени като $\overline{A} = A_1(\overline{a})$ и $\overline{B} = \frac{\overline{A}}{\overline{a}}$, където*

$$
A_1(a) = a\frac{(p-q)(a^qC_1K_1 + C_2K_2) + q\left(C_2K_2 + \frac{C_1K_1}{a^{p-q}}\right)}{(p-q-1)(a^{q+1}C_1 + C_2) + (q+1)\left(C_2 + \frac{C_1}{a^{p-q-1}}\right)}. \tag{4.47}
$$

Тези граници водят до цена

$$
f(A,B,x) = C_1(K_1 - A)\left(\frac{A}{x}\right)^q \frac{B^p - x^p}{B^p - A^p} + C_2(B - K_2)\left(\frac{B}{x}\right)^q \frac{x^p - A^p}{B^p - A^p}. \tag{4.48}
$$

Да предположим, че $\lambda = 0$. Както вече споменахме, ранното упражняване като кол никога не е оптимално. Получаваме следните резултати

Теорема 7.2 (Theorem 4.2 of Zaevski (2023b))**.** *Ако $\lambda = 0$, то ранното упражняване на стренгъл-стратегията никога не е оптимално като кол. Притежателят упражнява като пут, когато базовият актив достигне ниво $\overline{A}$:*

$$
\overline{A} = \frac{2rC_1K_1}{(C_1 + C_2)(2r + \sigma^2)}, \tag{4.49}
$$

Ако началната точка е под тази стойност, $x \leq \overline{A}$, то цената е $C_1(K_1 - x)$. В противен случай, ако $x > \overline{A}$, то цената е $Y\left(\overline{A}\right)$, където функцията $Y(\cdot)$ е

$$Y(A) = C_2 x + \left(\frac{A}{x}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} \left[-A(C_1 + C_2) + C_1 K_1\right]. \tag{4.50}$$

Независимо от това, че упражняването като кол никога не е оптимално, пут-границата и цената на опцията зависят от кол-характеристиката чрез броя на акциите C_2, но не и от цената на изпълнение K_2.

Да предположим, че падежът е краен, $T < \infty$. За функции $A(t)$ и $B(t)$, $A(t) < B(t)$, дефинираме европейски стил дериватив, който изтича като пут, ако активът падне под $A(t)$ и като кол, ако се покачи над $B(t)$. Назоваваме тези инструменти $(A(t), B(t))$-европейски опции. Съответните Марковски моменти се означават с ζ^A и ζ^B, а по-малкият измежду тях с ζ, $\zeta = \zeta^A \wedge \zeta^B$.

Нека $0 \equiv t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n \equiv T$ е времева разбивка и $a(t)$ и $b(t)$ са две непрекъснати по части части линейни функции спрямо нея

$$\begin{aligned} a(t) &= \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\, I_{t\in[t_{i-1},t_i]} \equiv \sum_{i=1}^{n} (a_{1,i}t + a_{2,i})\, I_{t\in[t_{i-1},t_i]} \\ b(t) &= \sum_{i=1}^{n} b_i(t)\, I_{t\in[t_{i-1},t_i]} \equiv \sum_{i=1}^{n} (b_{1,i}t + b_{2,i})\, I_{t\in[t_{i-1},t_i]}, \end{aligned} \tag{4.51}$$

$a_i(t_i) = a_{i+1}(t_i)$ и $b_i(t_i) = b_{i+1}(t_i)$, $i = 1, 2, ..., n-1$. Налагаме условието $a(t) < b(t)$ както и $a(0) < 0 < b(t)$. Ще апроксимираме оптималните граници като експоненти от такива функции – $A(t) = \exp(a(t))$ за пут-границата и $B(t) = \exp(b(t))$ за кол. Стойностите на тези функции във възлите на времевата мрежата са означени с $\alpha_i = a(t_i)$, $\beta_i = b(t_i)$, $A_i = A(t_i)$ и $B_i = B(t_i)$, $i = 0, 1, ..., n$. Да въведем функциите

$$\begin{aligned} c(t) &= \sum_{i=1}^{n} c_i(t)\, I_{t\in(t_{i-1},t_i]} \equiv \sum_{i=1}^{n} (c_{1,i}t + c_{2,i})\, I_{t\in(t_{i-1},t_i]} \\ d(t) &= \sum_{i=1}^{p} d_i(t)\, I_{t\in(t_{i-1},t_i]} \equiv \sum_{i=1}^{p} (d_{1,i}t + d_{2,i})\, I_{t\in(t_{i-1},t_i]} \end{aligned} \tag{4.52}$$

за

$$\begin{aligned} c_{1,i} &= \frac{a_{1,i} - r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2},\ i = 1, ..., n \\ c_{2,i} &= \frac{a_{2,i} - \ln(x)}{\sigma},\ i = 1, ..., n \\ d_{1,i} &= \frac{b_{1,i} - r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2},\ i = 1, ..., n \\ d_{2,i} &= \frac{b_{2,i} - \ln(x)}{\sigma},\ i = 1, ..., n. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Моментите ζ^A и ζ^B могат да се разглеждат като първо достигане на брауновото движение до функциите $c(t)$ и $d(t)$, съответно. Използвайки тези означенията, представяме цената на $(A(t), B(t))$-европейска опция като

$$
\begin{aligned}
&G(x,T;A(t),B(t)) = \mathbb{E}^x\left[C_1 e^{-(r+\lambda)\zeta^A}\left(K_1 - S_{\zeta^A}\right)^+ I_{\zeta^A=\zeta,\zeta<T}\right] \\
&+ \mathbb{E}^x\left[C_2 e^{-(r+\lambda)\zeta^B}\left(S_{\zeta^B} - K_2\right)^+ I_{\zeta^B=\zeta,\zeta<T}\right] \\
&+ \mathbb{E}^x\left[C_1 e^{-(r+\lambda)T}(K_1 - S_T)^+ I_{T\leq\zeta,S_T\in(D_1,D_0)}\right] + \mathbb{E}^x\left[C_2 e^{-(r+\lambda)T}(S_T - K_2)^+ I_{T\leq\zeta,S_T\in(D_0,D_2)}\right] \\
&= C_1 K_1 \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[e^{-(r+\lambda)\zeta^A} I_{\zeta\in(t_{i-1},t_i],\zeta=\zeta^A}\right] - C_1 x \sum_{i=1}^n e^{\sigma c_{2,i}} \mathbb{E}\left[e^{-\psi_{1,i}\zeta^A} I_{\zeta\in(t_{i-1},t_i],\zeta=\zeta^A}\right] \\
&+ C_2 x \sum_{i=1}^n e^{\sigma d_{2,i}} \mathbb{E}\left[e^{-\psi_{2,i}\zeta^B} I_{\zeta\in(t_{i-1},t_i],\zeta=\zeta^B}\right] - C_2 K_2 \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[e^{-(r+\lambda)\zeta^B} I_{\zeta\in(t_{i-1},t_i],\zeta=\zeta^B}\right] \\
&+ C_1 K_1 e^{-(r+\lambda)T}\mathbb{Q}\left(v_1 < B_T < l, T\leq\zeta\right) - C_1 x e^{-\psi_3 T}\mathbb{E}\left[e^{\sigma B_T} I_{v_1<B_T<l,T\leq\zeta}\right] \\
&+ C_2 x e^{-\psi_3 T}\mathbb{E}\left[e^{\sigma B_T} I_{l<B_T<v_2,T\leq\zeta}\right] - C_2 K_2 e^{-(r+\lambda)T}\mathbb{Q}\left(l < B_T < v_2, T\leq\zeta\right),
\end{aligned}
\tag{4.54}
$$

където

$$
\begin{aligned}
\psi_{1,i} &= (r+\lambda) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \sigma c_{1,i} = \lambda + \frac{\sigma^2}{2} - \sigma c_{1,i} \\
\psi_{2,i} &= (r+\lambda) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \sigma d_{1,i} = \lambda + \frac{\sigma^2}{2} - \sigma d_{1,i} \\
\psi_3 &= \lambda + \frac{\sigma^2}{2} \\
l &= \frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{D_0}{x}\right) - \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)T \\
v_1 &= \frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{D_1}{x}\right) - \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)T \\
v_2 &= \frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{D_2}{x}\right) - \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right)T.
\end{aligned}
\tag{4.55}
$$

Извличаме очакванията във формула (4.54), като използваме резултатите от Глава 2. Конструираме следния алгоритъм, за да апроксимираме оптималните граници:

1. Границите при падежа са $A_n = D_1$ и $B_n = D_2$.

2. Да предположим, че знаем всички стойности $A_m, A_{m+1}, ..., A_n$ и $B_m, B_{m+1}, ..., B_n$ за някое $m < n$.

3. Извеждаме пут-границата по следния начин. За константа $A < x$, нека $B(x, A)$ е стойността, която максимизира

$$G(x;0,t_m - t_{m-1},...t_n - t_{m-1};A,A_m,...,A_n;B,B_m,...,B_n) \tag{4.56}$$

измежду всички $B > x$. Да разгледаме уравнението (4.56) като функция на A и да означим с $A(x)$ аргументът, който максимизира

$$G(x;0,t_m - t_{m-1},...t_n - t_{m-1};A,A_m,...,A_n;B(x,A),B_m,...,B_n). \tag{4.57}$$

Нашето приближение за пут-границата A_{m-1} е най-голямото x, за което $x = A(x)$. Всъщност това е най-голямата първоначална стойност на базовия актив, за която незабавното упражняване като пут е оптимално.

4. Аналогично получаваме кол-границата. Нека за фиксирано $x < B$, $A(x,B)$ е стойността, която максимизира функция (4.56) спрямо променливата A. Освен това, нека $B(x)$ максимизира

$$G(x;0,t_m - t_{m-1},...t_n - t_{m-1};A(x,B),A_m,...,A_n;B,B_m,...,B_n) \tag{4.58}$$

измежду всички $B > x$.

5. Апроксимираме кол-границата B_{m-1} като най-малкото x, за което $x = B(x)$. Нашето приближение е най-малкото x, за което тази разлика е нула.

Да отбележим отново, че ако оптималните граници наистина са експоненти от по части линейни функции, то стойностите $A(x,B)$, $B(x)$, $B(x,A)$ и $A(x)$ не трябва да варират спрямо към x. Разбира се, това предположение е неоснователно – това мотивира алгоритъма по-горе.

След като знаем границите, можем да оценим стренгъл-комбинацията като решим съответното ЧДУ например чрез Кранк-Николсън метода на крайните разлики.

4.8 Квадратични Американски стренгъл деривативи като частен случай на задачи водещи до първи изход от ивица.

Целта на тази глава е да разгледа някои финансови инструменти от американски тип, които водят до изход от ивица. Обръщаме специално внимание на подобни на стренгъл деривативи, но с квадратична платежна функция. Тези финансови инструменти са разгледани в светлината на много по-общи платежни-структури, които гарантират, че оптималната стратегия е изход от ивица. Необходимо условие за оператора (4.31), приложен към платежната функция $G(x)$, което води до такава задача е:

Съществуват консатнти $C \leq D$, такива че $(\mathcal{B}G)(x) < 0$ за $x < C$ и $x > D$, и $(\mathcal{B}G)(x) \geq 0$ за $x \in [C,D]$.

Съществуват две оптимални граници – $c(t) < d(t)$. Множеството за запазване е между тях. Оптималното множество се състои от две части – една под областта за запазване и друга над нея. Доказваме, че стойностите на оптималните граници при падежа са именно $c(0) = C$ и $d(0) = D$. След това получаваме стойностите при безкраен матуритет $c(\infty) = A$ и $d(\infty) = B$ като решение на следната система:

$$\begin{aligned} \left(\frac{A}{B}\right)^{q} &= \frac{G'(B)B - (p-q)G(B)}{G'(A)A - (p-q)G(A)} \\ \left(\frac{A}{B}\right)^{p-q} &= \frac{G'(A)A + qG(A)}{G'(B)B + qG(B)}. \end{aligned} \tag{4.59}$$

След това дефинираме така наречените квадратични стренгъли чрез платежна функция:

$$G(x) = (x-K)^2. \tag{4.60}$$

Първо, получаваме цената на съответния европейски дериватив

$$P(S_0) = S_0^2 e^{\left(r+\sigma^2-\lambda\right)T} - 2KS_0 e^{-\lambda T} + K^2 e^{-(r+\lambda)T}. \tag{4.61}$$

След това се разглеждаме инструменти от американски вид. Стойността на оператора $\mathcal{B}$, приложен към платежната функция, е

$$(\mathcal{B}G)(x) = x^2\left(r+\sigma^2-\lambda\right) + 2\lambda Kx - (r+\lambda)K^2. \tag{4.62}$$

Налага се да разгледаме по отделно случаите $\lambda > r+\sigma^2$ и $\lambda \leq r+\sigma^2$. Да допуснем, че $\lambda > r+\sigma^2$. Горното условие показва, че наистина имаме задача за излизане от ивица. Стойностите на C и D са

$$\{C, D\} = K\frac{\lambda \mp \sqrt{r^2+\sigma^2(r+\lambda)}}{\lambda - r - \sigma^2}. \tag{4.63}$$

Следната теорема дава стойностите когато няма матуритетни ограничения:

Теорема 8.1 (Theorem 1 of Zaevski (2024b))**.** *Нека $\overline{a}$ е решението на*

$$\begin{aligned} &\frac{(p-q-1)\left(1-a^{q+1}\right) - \sqrt{(p-q-1)^2\left(1-a^{q+1}\right)^2 - (p-q)(p-q-2)\left(1-a^{q}\right)\left(1-a^{q+2}\right)}}{(p-q)\left(1-a^{q}\right)} \\ &= a\frac{(q+1)\left(1-a^{p-q-1}\right) + \sqrt{(q+1)^2\left(1-a^{p-q-1}\right)^2 - q(q+2)\left(1-a^{p-q}\right)\left(1-a^{p-q-2}\right)}}{q\left(1-a^{p-q}\right)} \end{aligned} \tag{4.64}$$

в интервала $(0,1)$ и $\overline{x}$ се задава като

$$\overline{x} = \frac{(p-q-1)\left(1-\overline{a}^{q+1}\right) - \sqrt{(p-q-1)^2\left(1-\overline{a}^{q+1}\right)^2 - (p-q)(p-q-2)\left(1-\overline{a}^{q}\right)\left(1-\overline{a}^{q+2}\right)}}{(p-q)\left(1-\overline{a}^{q}\right)}. \tag{4.65}$$

Оптималните граници на квадратичната стренгъл стратегия са $\overline{A} = \frac{\overline{a}}{\overline{x}} K$ *и* $\overline{B} = \frac{K}{\overline{x}}$. *Цената е*

$$f\left(\overline{A}, \overline{B}; x\right) = \left(x - \overline{A}\right)^2 \left(\frac{\overline{A}}{x}\right)^q \frac{\overline{B}^p - x^p}{\overline{B}^p - \overline{A}^p} + \left(x - \overline{B}\right)^2 \left(\frac{\overline{B}}{x}\right)^q \frac{x^p - \overline{A}^p}{\overline{B}^p - \overline{A}^p}. \tag{4.66}$$

Засчата при краен падеж се изследва чрез подхода на глава 7. Ценообразуващата функция на инструмент, свързан с първия изход от ивица с по части линейни граници, е

$$\begin{aligned}
&F\left(x, T; c\left(t\right), d\left(t\right)\right) = \mathbb{E}^x \left[e^{-(r+\lambda)\zeta^A} \left(S_{\zeta^A} - K\right)^2 I_{\zeta^A = \zeta, \zeta < T}\right] \\
&+ \mathbb{E}^x \left[e^{-(r+\lambda)\zeta^B} \left(S_{\zeta^B} - K\right)^2 I_{\zeta^B = \zeta, \zeta < T}\right] + \mathbb{E}^x \left[e^{-(r+\lambda)T} (S_T - K)^2 I_{T \le \zeta}\right] \\
&= K^2 \sum_{i=1}^n \left(\mathbb{E}\left[e^{-(r+\lambda)\zeta^A} I_{\zeta \in (t_{i-1}, t_i], \zeta = \zeta^A}\right] + \mathbb{E}\left[e^{-(r+\lambda)\zeta^B} I_{\zeta \in (t_{i-1}, t_i], \zeta = \zeta^B}\right]\right) \\
&- 2Kx \sum_{i=1}^n \left(e^{\sigma a_{2,i}} \mathbb{E}\left[e^{-\psi_{1,i}\zeta^A} I_{\zeta \in (t_{i-1}, t_i], \zeta = \zeta^A}\right] + e^{\sigma b_{2,i}} \mathbb{E}\left[e^{-\psi_{2,i}\zeta^B} I_{\zeta \in (t_{i-1}, t_i], \zeta = \zeta^B}\right]\right) \\
&+ x^2 \sum_{i=1}^n \left(e^{2\sigma a_{2,i}} \mathbb{E}\left[e^{-\eta_{1,i}\zeta^A} I_{\zeta \in (t_{i-1}, t_i], \zeta = \zeta^A}\right] + e^{2\sigma b_{2,i}} \mathbb{E}\left[e^{-\eta_{2,i}\zeta^B} I_{\zeta \in (t_{i-1}, t_i], \zeta = \zeta^B}\right]\right) \\
&+ K^2 e^{-(r+\lambda)T} \mathbb{Q}\left(v_1 < B_T < v_2, T \le \zeta\right) - 2Kx e^{-\psi_3 T} \mathbb{E}\left[e^{\sigma B_T} I_{v_1 < B_T < v_2, T \le \zeta}\right] \\
&+ x^2 e^{-\psi_4 T} \mathbb{E}\left[e^{2\sigma B_T} I_{v_1 < B_T < v_2, T \le \zeta}\right],
\end{aligned} \tag{4.67}$$

където

$$\begin{aligned}
\psi_{1,i} &= (r+\lambda) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \sigma a_{1,i} = \lambda + \frac{\sigma^2}{2} - \sigma a_{1,i} \\
\psi_{2,i} &= (r+\lambda) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \sigma b_{1,i} = \lambda + \frac{\sigma^2}{2} - \sigma b_{1,i} \\
\eta_{1,i} &= (r+\lambda) - 2\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \sigma a_{1,i}\right) = \lambda + \sigma^2 - r - 2\sigma a_{1,i} \\
\eta_{2,i} &= (r+\lambda) - 2\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \sigma b_{1,i}\right) = \lambda + \sigma^2 - r - 2\sigma b_{1,i} \\
\psi_3 &= \lambda + \frac{\sigma^2}{2} \\
\psi_4 &= \lambda + \sigma^2 - r \\
v_1 &= \frac{1}{\sigma} \ln\left(\frac{C}{x}\right) - \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right) T \\
v_2 &= \frac{1}{\sigma} \ln\left(\frac{D}{x}\right) - \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right) T.
\end{aligned} \tag{4.68}$$

Очакванията в(4.67) могат да бъдат получени чрез резултатите от Глава 2. Да отбележим, че за някои стойности на параметрите трябва да използваме аналитичното продължение на erf-функцията.

И накрая, разглеждаме случая $\lambda \leq r + \sigma^2$. Оказва се, че имаме едностранна задача от пут-вид – тя е изучена в глава 6. Доказваме, че границата при падежа е

$$C = \tfrac{r+\lambda}{2\lambda} K \qquad if\ \lambda = r + \sigma^2 \tag{4.69}$$

$$C = \tfrac{\sqrt{r^2+\sigma^2(r+\lambda)}-\lambda}{r+\sigma^2-\lambda} K \qquad if\ \lambda < r + \sigma^2.. \tag{4.70}$$

Безматуритетната както и съответната цена се получват чрез следната теорема:

Теорема 8.2 (Theorem 2 of Zaevski (2024b))**.** *Ако $\lambda < r + \sigma^2$, то ранното упражняване никога не е оптимално. Цената е безкрайно голяма.*

Ако $\lambda = r + \sigma^2$, то всички точки под $\overline{A}$, зададено от

$$\overline{A} = \frac{q}{2\left(q+1\right)} K, \tag{4.71}$$

са оптимални. Цената е $(x-K)^2$, когато началната стойност на актива $S_0 = x$ е под $\overline{A}$ и се намира чрез

$$F\left(x; \overline{A}\right) = \frac{K^2 \overline{A}^q - 2K\overline{A}^{q+1}}{x^q} + x^2, \tag{4.72}$$

когато $S_0 => \overline{A}$.

Желаните резултати за квадратичните стренгъл стратегии с краен падеж се получават чрез подхода от глава 6.

4.9-12. Отменяеми опции при липса на матуритетни ограничения

Ще обсъдим съвместно глави 8-12. Основната характеристика на отменяемите американски опции, също така известни като игрови или израелски, е съществуващото право на издателя да анулира договора преждевременно, като плати някаква неустойка. Тези опции са въведени от Kifer (2000). Някои по-късни важни изследвания са представени в Kifer (2000), Kyprianou (2004), Kühn and Kyprianou (2007), Suzuki and Sawaki (2007), Emmerling (2012) и Yam et al. (2014). Алтернативно, ние прилагаме нашия подход за максимизиране полезността за притежателя и издателя. Представяме основно Глава 12, защото тя обобщава резултатите от Глави 9-11. Въпреки това, доказателствата в Глава 12 се основават основно на Глави 9-11. Следователно яснотата на представянето налага наличието на тези глави.

Основната цел на тази глава е да представи и разгледа нов подклас от такива опции. Той затваря в някакъв смисъл множеството от отменяеми опции. Нека функцията

$N_1(t,x)$ представя сумата, която издателят дължи, ако притежателят упражни опцията в момента t при спот цената $S_t = x$. Аналогично, функцията $N_2(t,x)$ дефинира сумата, която издателят трябва да плати, ако анулира договора. Да предположим, че неустойката се състои от три части – константата $\eta_1 \geq 1$ води до пропорция от обичайното плащане на опцията, $\eta_2 \geq 0$ е брой акциите от базовия актив и $\eta_3 \geq 0$ е фиксирана сума. Така функциите $N_1(t,x)$ и $N_2(t,x)$ се задават като

$$\begin{aligned} N_1(t,x) &= e^{-\lambda t}(x-K)^+ \\ N_2(t,x) &= e^{-\lambda t}\big(\eta_1 (x-K)^+ + \eta_2 x + \eta_3\big) \end{aligned} \tag{4.73}$$

или

$$\begin{aligned} N_1(t,x) &= e^{-\lambda t}(K-x)^+ \\ N_2(t,x) &= e^{-\lambda t}\big(\eta_1 (K-x)^+ + \eta_2 x + \eta_3\big). \end{aligned} \tag{4.74}$$

съответно за call- или put-опциите. Всъщност това е задача от областта на стохастичните игри – виж Dynkin (1969). Следователно, основната разлика между стренгълите и отменяемите опции е, че първите водят до задача за намиране на максимум на двумерен функционал върху пространството на случайните Марковски моменти, докато вторите се нуждаят от седлова точка. Нашият подход ни позволява да изследваме и двата класа финансови инструменти чрез подобни техники.

Можем да разделим пространството на състоянията на три части – оптимално за притежателя (Υ^b), оптимално за издателя (Υ^s) и множество за задържане (Υ). Ще означаваме ценовата функция с $V(t,x)$.

Налага се да наложим едно ограничение за оптималното множество на издателя в някои незначителни случаи, за да запазим общност на представянето: издателя не канселира опцията незабавно, дори ако това е оптимално за него, при положение, че някоя бъдеща стратегия осигурява същия резултат. Това предположение не е толкова ограничаващо от финансова гледна точка. Формулирано математически, то изглежда по следния начин:

Нека опцията е out-of-the-money, $\lambda = 0$, и $\eta_3 = 0$. Да допуснем, че $V(t,x) = N_2(t,x)$ и съществува стопинг тайм $\zeta > t$ п.с. такъв че $N_2(t,x) = M(t,x;\zeta,B(\zeta;x))$. Тогава $(t,x) \notin \Upsilon^s$.

Да разгледаме кол опциите. Доказваме следните твърдения, които характеризират оптималните граници:

1. Ако $x < K$, то $x \in \overline{\Upsilon}$.
2. Ако $\eta_3 \geq \eta_1 K$, то $\Upsilon^s = \emptyset$.
3. Да предположим, че по-голяма от цената на изпълнение константа x е оптимална за издателя, $x \in \Upsilon^s$. Нека y е друга константа, такава че $K < y < x$. Тогава $y \in \Upsilon^s$.

4. Ако $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 0$, и $\eta_3 = 0$, то $\overline{\Upsilon} = (0, K)$.

5. Ако $x \in \Upsilon^b$ и $y > x$, то $y \in \Upsilon^b$.

6. Ако $\lambda = 0$, то оптималното множество за държателя е празно.

7. Ако $r < 0$, то $\Upsilon^s \equiv \emptyset$ или $\Upsilon^s \equiv \{K\}$.

Тези твърдения показват, че оптималната областта на притежателя има формата $\Upsilon^b = [B, \infty)$ за някоя константа $B > K$, докато тази на издателя е интервал $\Upsilon^s = [K, A]$ (A е константа, по-малка от B, $K < A < B$), отделна точка $\Upsilon^s = \{K\}$, или празното множество $\Upsilon^s \equiv \emptyset$.

Нека x е началната стойност на базовия актив. За фиксирано B, означаваме $a = \frac{A}{B}$, $k = \frac{K}{B}$, $\xi = \frac{\eta_3}{B}$ и $y = \frac{x}{B}$. Доказваме, че уравнението

$$\begin{aligned}&a^{p+1}\left(\eta_1+\eta_2\right)\left(p-q-1\right)-a^p\left(\eta_1 k-\xi\right)\left(p-q\right)\\&-a^{p-q}p\left(1-k\right)+a\left(q+1\right)\left(\eta_1+\eta_2\right)-q\left(\eta_1 k-\xi\right)=0\end{aligned}$$

има единствено решение, което означаваме с $a\left(B\right)$. Аналогично, нека $b = \frac{B}{A}$, $k = \frac{K}{A}$, $\xi = \frac{\eta_3}{A}$ и $y = \frac{x}{A}$ за някоя фиксирана стойност на A. Доказваме, че уравнението

$$\begin{aligned}&-b^{p+1}\left(p-q-1\right)+b^p k\left(p-q\right)\\&+b^{p-q}p\left(\eta_1+\eta_2-\eta_1 k+\xi\right)-b\left(q+1\right)+qk=0\end{aligned} \tag{4.75}$$

има точно един корен в интервала $(1, \infty)$ с изключение на граничния случай $\eta_2 = \eta_3 = 0$, разгледан в Глава 11. Означаваме този корен с $b\left(A\right)$. Нека $\overline{\eta}$ цената на обиновенна американска at-the-money опция:

$$\overline{\eta} = \frac{K}{\gamma}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)^{\gamma-1} \tag{4.76}$$

за $\gamma = p - q$. Доказваме следната теорема:

Теорема 12.1 (Theorem 3.8 of Zaevski (2023a))**.** *Нека $\lambda > 0$, $\eta_2 + \eta_3 > 0$, а истинските граници да означим с A^* и B^*.*

1. *Ако $\eta_3 \geq \eta_1 K$, то $\Upsilon^s = \emptyset$ и така опцията се превръща в обикновена американска – за повече подробности за тези опции виж глава 4.*

2. *Ако $\eta_3 < \eta_1 K$ в допълнение към $\eta_2 + \eta_3 > 0$, то $\overline{A}$ се дефинира като решение на уравнението $b\left(y\right)a\left(yb\left(y\right)\right) = 1$. В сила са следните твърдения:*

   (a) *Ако $\overline{A} \geq K$, то $A^* = \overline{A}$ и $B^* = \overline{A}b\left(\overline{A}\right)$. Множествата за упражняване са $\Upsilon^s = [K, A^*]$ и $\Upsilon^b = [B^*, \infty)$. Цената на опцията $V\left(x\right)$ се задава от:*

      i. *формула*

$$V\left(x\right) = \left(\eta_2 K + \eta_3\right)\mathbb{E}^x\left[e^{-(r+\lambda)\tau}I_{\tau<\infty}\right] = \left(\eta_2 K + \eta_3\right)\left(\frac{x}{K}\right)^{\gamma} \tag{4.77}$$

      когато $x \leq K$;

ii. $V(x) = (\eta_1 + \eta_2)x - \eta_1 K + \eta_3$ *когато* $K < x < A^*$;

iii. $V(x) = x - K$ *когато* $x > B^*$;

iv. *формула*

$$V(x) = \\ ((\eta_1 + \eta_2) A^* - \eta_1 K + \eta_3) \left(\frac{A^*}{x}\right)^q \frac{B^{*p} - x^p}{B^{*p} - A^{*p}} + (B^* - K) \left(\frac{B^*}{x}\right)^q \frac{x^p - A^{*p}}{B^{*p} - A^{*p}} \tag{4.78}$$

когато $A^* \leq x \leq B^*$.

(б) *Ако* $\overline{A} < K$ *и* $\eta_2 K + \eta_3 \leq \overline{\eta}$, $\overline{\eta}$ *е дефинирана чрез* (4.76), *то* $A^* = K$ *и* $B^* = Kb(K)$. *Множествата за упражняване са* $\Upsilon^s = \{K\}$ *и* $\Upsilon^b = [\overline{B}, \infty)$. *Цената на опцията* $V(x)$ *се определя както в предишния случай.*

(в) *Ако* $\overline{A} < K$ *и* $\eta_2 K + \eta_3 > \overline{\eta}$, *то опцията отново е обикновена американска.*

Ако допълнителният дисконтов фактор е нула, ранното упражняване никога не е оптимално за притежателя. Доказваме следните резултати:

Теорема 12.2 (Theorem 3.9 of Zaevski (2023a))**.** *Нека* $\lambda = 0$.

1. *Да предположим, че* $M < K$ *– константата* M *е дефинирана като:*

$$M = \frac{2r(\eta_1 K - \eta_3)}{(\eta_1 + \eta_2 - 1)(2r + \sigma^2)}. \tag{4.79}$$

(а) *Ако* $\eta_2 K + \eta_3 > K$, *то ранното упражняване никога не е оптимално и за двамата участници. Цената на опцията е* $V(x) = x$.

(б) *Ако* $\eta_2 K + \eta_3 \leq K$, *то зоната за упражняване на издателя е страйка. Цената се дава чрез*

i. $V(x) = x + \left(\frac{K}{x}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}} (K(\eta_2 - 1) + \eta_3)$ *когато* $x \geq K$.

ii. $V(x) = \frac{(\eta_2 K + \eta_3)x}{K}$ *когато* $x < K$.

2. *Ако* $M \geq K$, *то областта за упражняване на издателя е* $\Upsilon^s = [K, M]$. *Цената е*

(а) $V(x) = \frac{(\eta_2 K + \eta_3)x}{K}$ *когато* $x < K$;

(б) $V(x) = x\left(1 - \frac{\sigma^2(\eta_1+\eta_2-1)}{2r}\left(\frac{2r(\eta_1 K - \eta_3)}{x(\eta_1+\eta_2-1)(2r+\sigma^2)}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\right)$ *когато* $M < x$;

(в) $V(x) = (\eta_1 + \eta_2)x - \eta_1 K + \eta_3$ *когато* $K \leq x \leq M$.

Теорема 11.1 (Theorem 4.1 of Zaevski (2020a))**.** *Нека* $\eta_2 = \eta_3 = 0$ *и* $\lambda > 0$.

1. *Ако* $r > 0$, *то оптималните граници са* $A^* = \max\left(K, \overline{A}\right)$ *и* $B^* = A^* b\left(A^*\right)$. *Константата* $\overline{A}$ *е решението на уравнение* $b\left(A\right) a\left(Ab\left(A\right)\right) = 1$. *Цената се* V *намира чрез:*

   (а) *Ако* $x \leq A^*$, *то* $V = \eta_1 (x-K)^+$.

   (б) *Ако* $A^* < x < B^*$, *то*

$$V = \eta_1\left(A^* - K\right)\left(\frac{A^*}{x}\right)^q \frac{B^{*p} - x^p}{B^{*p} - A^{*p}} + \left(B^* - K\right)\left(\frac{B^*}{x}\right)^q \frac{x^p - A^{*p}}{B^{*p} - A^{*p}}. \tag{4.80}$$

   (в) *Ако* $B^* \leq x$, *то* $V = x - K$.

2. *Ако* $r \leq 0$, *то* $\Upsilon^s = (0, K]$ *и* $\Upsilon^b = (K, \infty)$. *Ако* $x \leq K$, *то* $Y = 0$ *и* $Y = x - K$ *в противен случай.*

Нека обсъдим случая $\eta_2 = \eta_3 = 0$. *Всички точки под цената на изпълнение се считат за оптимални за издателя, тъй като той не дължи нищо. От друга страна, тези точки могат да се разглеждат и като принадлежащи към региона на задържане, тъй като стратегията за изчакване на първото достигане до цената на изпълнение дава същия резултат - можем да приложим наложеното по-горе условие.*

Нека да обсъдим пут-опциите. Доказани са следните твърдения

1. Ако $x > K$, то $x \in \overline{\Upsilon}$.
2. Ако $\eta_2 \geq \eta_1$, то $\Upsilon^s \equiv \emptyset$.
3. Ако $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 0$, и $\eta_3 = 0$, то $\overline{\Upsilon} = (K, \infty)$.
4. Ако $x \in \Upsilon^b$ и $y < x$, то $y \in \Upsilon^b$.
5. Ако $x < K$, $x \in \Upsilon^s$, и $x < y < K$, то $y \in \Upsilon^s$.
6. Ако $r > 0$, то $\Upsilon^s \equiv \emptyset$ или $\Upsilon^s \equiv \{K\}$.

Тези твърдения показват, че областта за упражняване на притежателя има формата $\Upsilon^b = (0, A]$ за някоя константа A, докато множеството на издателя има една от следните три форми – $\Upsilon^s = [B, K]$, $\Upsilon^s = \{K\}$ или $\Upsilon^s = \emptyset$. Дефинираме функциите $a\left(B\right)$ и $b\left(A\right)$ като корени на

$$\begin{aligned}
&-a^{p+1}\left(p-q-1\right) + a^p k\left(p-q\right) - a^{p-q} p\left(\eta_1 k - \eta_1 + \eta_2 + \xi\right) - a\left(q+1\right) + qk = 0 \\
&b^{p+1}\left(p-q-1\right)\left(\eta_1 - \eta_2\right) - b^p\left(\eta_1 k + \xi\right)\left(p-q\right) + \\
&+ b^{p-q} p\left(k-1\right) + b\left(q+1\right)\left(\eta_1 - \eta_2\right) - q\left(\eta_1 k + \xi\right) = 0
\end{aligned} \tag{4.81}$$

Цената на at-the-money put-опция е

$$\overline{\eta}=\frac{K}{q+1}\left(\frac{q}{q+1}\right)^{q}. \tag{4.82}$$

Доказваме следната теорема за оптималните граници и цената на опцията:

Теорема 12.3 (Theorem 4.6 of Zaevski (2023a))**.** *Да допуснем, че $\eta_2+\eta_3>0$. Нека $\overline{B}$ е решението на уравнението $a(y)\,b(ya(y))=1$. Имаме следните случаи:*

1. *Ако $\eta_2\geq\eta_1$, то опцията е обикновена американска.*
2. *Да допуснем, че $\eta_2<\eta_1$ и $\eta_2+\eta_3>0$.*
   (а) *Ако $\overline{B}\leq K$, то $B^*=\overline{B}$ и $A^*=B^*a(B^*)$ – следователно областите за упражняване са $\Upsilon^s=[B^*,K]$ и $\Upsilon^b=[0,A^*)$. Цената на опцията $V(x)$ се дава от:*
      i. *$V(x)=(\eta_2K+\eta_3)\left(\frac{K}{x}\right)^q$ когато $x\geq K$;*
      ii. *от формула*

$$V(x)$$
$$=(K-A^*)\left(\frac{A^*}{x}\right)^{q}\frac{B^{*p}-x^p}{B^{*p}-A^{*p}}+(\eta_1K-(\eta_1-\eta_2)\,B^*+\eta_3)\left(\frac{B^*}{x}\right)^{q}\frac{x^p-A^{*p}}{B^{*p}-A^{*p}}.$$

      когато $\overline{A}\leq x\leq\overline{B}$;
      iii. *от $V(x)=-(\eta_1-\eta_2)\,x+\eta_1K+\eta_3$ когато $\overline{B}<x<K$;*
      iv. *от $V(x)=K-x$ когато $x<\overline{A}$.*
   (б) *Ако $K<\overline{B}$ и $\eta_2K+\eta_3\leq\overline{\eta}$, то $B^*=K$ и $A^*=Ka(K)$. Множествата за упражняване са $\Upsilon^s=\{K\}$ и $\Upsilon^b=\left(0,\overline{A}\right]$. Цената на опцията се определя както в предишния случай.*
   (в) *Ако $K<\overline{B}$ и $\eta_2K+\eta_3>\overline{\eta}$, то опцията е обикновена американска.*

Теорема 11.3 (Theorem 6.1 of Zaevski (2020a))**.** *Да допуснем, че $\eta_2=\eta_3=0$.*

1. *Ако $r\geq0$, то областите за упражняване са $\Upsilon^s=[K,\infty)$ и $\Upsilon^b=(0,K)$. Ако $x<K$, то цената е $V=K-x$. В противен случай тя е нула.*
2. *Ако $r<0$, то областите за упражняване са $\Upsilon^s=[B^*,\infty)$ и $\Upsilon^b=(0,A^*)$, където $B^*=\min\left(\overline{B},K\right)$ и $A^*=B^*a(B)$. Стойността на $\overline{B}$ се получава като решение на уравнението $1=a(B)\,b(Ba(B))$. Така цената на опцията е*
   (а) *$V=K-x$, ако $x<A^*$;*
   (б) *$V=(A^*-K)\left(\frac{A^*}{x}\right)^q\frac{B^{*p}-x^p}{B^{*p}-A^{*p}}+\eta\,(B^*-K)\left(\frac{B^*}{x}\right)^q\frac{x^p-A^{*p}}{B^{*p}-A^{*p}}$, ако $x\in[A^*,B^*)$;*

(в) $V = \eta(K-x)^+$, *ако* $B^* \leq x$.

Ако $\eta_2 = \eta_3 = 0$, *то всички точки над цената на изпълнение се считат за оптимални за издателя, но те могат да се разглеждат и като част от множеството за задържане, тъй като изчакването на първото достигане до страайка осигурява същия финансов резултат.*

4.13. Оценяване на отменяеми Американски пут опции върху краен времеви интервал.

Да разглеждаме отменими пут опции с краен падеж и с постоянна неустойка, т.е. $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 0$ и $\eta_3 = \eta > 0$. Специална роля в нашето разглеждане има един подклас на американските деривативо. Притежателят им има право да упражни във всеки момент преди падежа, получавайки обичайното опционно плащане. В допълнение, ако базовият актив достигне страйка, когато оставащото време до падежа е по-голямо от някаква предварително определена стойност τ, дериватívът изтича, като изплаща някаква сума η. Ще наречем този дериватив (τ, η)-американска опция. Очевидно, ако времето до падежа е по-малко от τ, тогава (τ, η)-американската опция съвпада с обикновената.

Имаме две критични стойности за времето до падежа. Първата, τ_1, прави цената на обичайната американска at-the-money-опция равна на неустойката:

$$V^{am}(K; \tau_1) = \eta. \tag{4.83}$$

Характеризирането на втората, τ_2, е по-сложно – правим това числено. Доказваме следната теорема:

Теорема 13.1 (Theorem 3.1 of Zaevski (2022b))**.** *Границата за упражняване на притежателя е намаляваща функция, започваща от точката*

$$\min\left(\frac{r+\lambda}{\lambda}, 1\right) K. \tag{4.84}$$

Формата на границата на издателя е по-сложна. Нека B *е стойността при безкраен матуритет, ако тя съществува. Следните твърдения характеризират границата:*

1. *Ако* B *не съществува, еквивалентно на* $\eta \geq \overline{\eta}$ *за* $\overline{\eta}$*, дадено в уравнение* (4.83)*, то* $\tau_1 = \tau_2 = \infty$ *и* $\Upsilon^s \equiv \emptyset$.

2. *Ако* $B = K$*, то* $\tau_1 < \infty$*, но* $\tau_2 = \infty$*. Освен това* $\Upsilon^s_\tau \equiv \emptyset$ *за* $\tau \leq \tau_1$ *и* $\Upsilon^s_\tau \equiv \{K\}$ *в противен случай. Да обърнем внимание, че това е случаят, когато* $r \geq 0$.

3. *Ако* $B < K$*, то* $\tau_1 < \tau_2 < \infty$*. Така границата на издателя не съществува за* $\tau < \tau_1$*, тя съвпада с цената на изпълнение за* $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$*, и е намаляваща клоняща към* B *функция за* $\tau \geq \tau_2$.

По този начин опцията е обикновена американска, когато $\tau \in (0, \tau_1]$, тя е (τ_1, η)-американска за $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$ и реална отменяема опция за $\tau \in [\tau_2, \infty)$.

Първо трябва да разберем кой случай на теорема 13.1 е валиден. Ако неустойката е по-голяма от критичната стойност $\overline{\eta}$, дадена във формула (4.83), то опцията е обикновена американска. Да предположим, че $\eta < \overline{\eta}$. Можем да изчислим границата на издателя при безкраен матуритет, B, като използваме резултатите от Глава 10. Тя може да бъде равна или по-малка от страйка.

Следващата стъпка е да разделим времевия интервала $n \geq 2$-подинтервали, $0 \equiv t_0 < t_1 < ... < t_n \equiv T \equiv \tau$. Можем да приемем, че $\tau_1 < \tau$, защото в обратния случай опцията е обикновена Американска. Налагаме две изисквания – τ_1 да бъде възел на мрежата и разделянето да е относително равномерно. За целта използваме следната процедура. Първо, разделяме интервала на две части – $(0, \tau_1)$ и (τ_1, τ). След това разделяме равномерно двата интервала съответно на m_1 и m_2 части, така че $m_1 + m_2 = n$ и

$$m_1 = \min\left(\max\left(1, Round\left(\frac{\tau_1}{\tau}n\right)\right), n-1\right). \tag{4.85}$$

Използвахме по-горе обозначението $Round\,(x)$ за най-близкото до x цяло число. Формулировката (4.85) гарантира, че $m_1 \geq 1$ и $m_2 \geq 1$, т.е. има поне един подинтервал преди τ_1, както и след него. Също така да отбележим, че $t_{m_1} = \tau_1$.

Трябва да модифицираме подхода за апроксимиране на оптималните граници, вземайки предвид техните особености. Първо, дефинираме следните деривативи в европейски тип за някои функции $0 < a\,(t) < b\,(t)$. Те изтичат на датата на падежа или когато базовият актив излезе от ивицата $(a\,(t)\,, b\,(t))$. Дериватите плащат сума $N_1\,(t, a\,(t))$ или $N_2\,(t, b\,(t))$ ако излизането се случи съответно от долната или горната граница. Ще назовем тези производни $(a\,(t)\,, b\,(t))$-европейски опции. Тяхната цената може да се получи като

$$\begin{aligned}
&G\,(x, T; a\,(t)\,, b\,(t)) = \mathbb{E}^x\left[e^{-(r+\lambda)(\zeta_1\wedge T)}(K - S_{\zeta_1\wedge T})^+ I_{(\zeta_1\wedge T)\leq\zeta_2}\right]\\
&+ \mathbb{E}^x\left[e^{-(r+\lambda)\zeta_2}\left((K - S_{\zeta_2})^+ + \eta\right) I_{\zeta_2<(\zeta_1\wedge T)}\right]\\
&= K\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[e^{-(r+\lambda)\zeta_1} I_{\zeta\in(t_{i-1},t_i],\zeta=\zeta_1}\right] - x\sum_{i=1}^{n} e^{\sigma c_{2,i}}\mathbb{E}\left[e^{-\psi_{1,i}\zeta_1} I_{\zeta\in(t_{i-1},t_i],\zeta=\zeta_1}\right]\\
&+ (K+\eta)\sum_{i=1}^{m_1}\mathbb{E}\left[e^{-(r+\lambda)\zeta_2} I_{\zeta\in(t_{i-1},t_i],\zeta=\zeta_2}\right] - x\sum_{i=1}^{m_1} e^{\sigma d_{2,i}}\mathbb{E}\left[e^{-\psi_{2,i}\zeta_2} I_{\zeta\in(t_{i-1},t_i],\zeta=\zeta_2}\right]\\
&+ Ke^{-(r+\lambda)T}\mathbb{Q}\,(B_T < k, T \leq \zeta) - xe^{-\psi_3 T}\mathbb{E}\left[e^{\sigma B_T} I_{B_T<k,T\leq\zeta}\right],
\end{aligned} \tag{4.86}$$

където

$$\begin{aligned}
\psi_{1,i} &= (r+\lambda) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \sigma c_{1,i} = \lambda + \frac{\sigma^2}{2} - \sigma c_{1,i} \\
\psi_{2,i} &= (r+\lambda) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) - \sigma d_{1,i} = \lambda + \frac{\sigma^2}{2} - \sigma d_{1,i} \\
\psi_3 &= \lambda + \frac{\sigma^2}{2} \\
k &= \frac{1}{\sigma} \ln\left(\frac{K}{x}\right) - \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right) T.
\end{aligned} \tag{4.87}$$

Както споменахме по-горе, отменяемите опции водят до задача за намиране на седлова точка. Така че можем да използваме алгоритъм, подобен на представения за обикновените американски опции или за стренгълите. Основната разлика е, че трябва да минимизираме резултата за границата на издателя – долната.

След като апроксимираме оптималните граници, можем да намерим цената на опцията много прецизно чрез схемата на крайните разлики на Кранк-Николсън. Първо, да предположим, че първоначалната цена на актива е между оптималните граници. Предлагаме в допълнение един Монте Карло метод, базиран на някои резултати на Wang and Pötzelberger (1997) и Pötzelberger and Wang (2001).

1. Генерираме $n-1$ нормално разпределени случайни числа, които образуват вектор $\overline{u}$.

2. Нека $m \leq n$ и векторът u се състои от първите $m-1$ елементи на $\overline{u}$. Нека D е $(m-1)\times(m-1)$-диагонална матрица с елементи $\sqrt{\Delta t_i/n}$. Трябва да имаме предвид, че дължината на интервалите, Δt_i, се различава преди и след момента $T-\tau_1$. Изчисляваме вектора x като $x = MDu$, където M е $(m-1)\times(m-1)$-долна триъгълна матрица с единични стойности.

3. Ако $t_{m-1} < T - \tau_1$, то намираме стойности v:

$$v = v\left(x_1, ..., x_{m-1}\right) = \prod_{i=1}^{m-1} I_{c_i < x_i < d_i} \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} q_{ij}\left(x_{i-1}, x_i\right)\right). \tag{4.88}$$

Обратно, ако $m_1 \leq m-1$, то v се намира като

$$\begin{aligned}
v = v\left(x_1, ..., x_{m-1}\right) &= \prod_{i=1}^{p-1} I_{c_i < x_i < d_i} \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} q_{ij}\left(x_{i-1}, x_i\right)\right) \\
&\times \prod_{i=p}^{m-1} I_{c_i < x_i} \left(1 - \exp\left(-\frac{2\left(c_{i-1} - x_{i-1}\right)\left(c_i - x_i\right)}{\Delta t_i}\right)\right).
\end{aligned} \tag{4.89}$$

4. Извеждаме стойностите w като $w = e^{-\xi t_{m-1}} L_{1,2}(\cdot)$, използвайки резултатите от Глава 2.4.

5. Изчисляваме произведението $P = vw$.

6. Повтаряме тази процедура H пъти и след осредняване намираме необходимите очаквания като $\frac{1}{H}\sum\limits_{i=1}^{H} P_i$.

Ако първоначалната цена на актива е над страйка, то имаме следната формула в полузатворена вид:

$$
\begin{aligned}
V(\tau, S_0) &= \mathbb{E}\left[e^{-(r+\lambda)\zeta}\eta I_{\zeta \le T-\tau_1}\right] \\
&+ e^{-r(T-\tau_1)} \int\limits_d^{\infty} e^{-\lambda(T-\tau_1)} V_{am}\left(\tau_1, S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-\tau_1)+\sigma y}\right) d\mathbb{Q}\left(B_{T-\tau_1} < y, \zeta > T-\tau_1\right) \\
&= \eta e^{-a_2\left(\sqrt{a_1^2+2(r+\lambda)}+a_1\right)} g\left(T-\tau_1, -\sqrt{a_1^2+2(r+\lambda)}, a_2\right) \\
&+ e^{-(r+\lambda)(T-\tau_1)} \int\limits_d^{\infty} V_{am}\left(\tau_1, S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-\tau_1)+\sigma y}\right) f(y; T-\tau_1)\, dy,
\end{aligned}
\tag{4.90}
$$

където

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{r}{\sigma} + \frac{\sigma}{2} \\
a_2 &= -\frac{\ln S_0 - \ln K}{\sigma} \\
d &= a_1(T-\tau_1) + a_2 \\
f(y;t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left(1 - \exp\left(-\frac{2a_2(a_1 t + a_2 - y)}{t}\right)\right)\exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) \\
g(T; b_1, b_2) &= N\left(\frac{b_1 T + b_2}{\sqrt{T}}\right) + \exp(-2b_1 b_2)\, N\left(\frac{-b_1 T + b_2}{\sqrt{T}}\right).
\end{aligned}
\tag{4.91}
$$

4.14. Някои програми в среда MATLAB

Изведените в предходните глави теоретични резултати са имплементирани с помощта на MATLAB. Предоставяме някои от най-важните кодове - общият им брой надхвърля двеста. Всички те са налични и могат да бъдат предоставени при поискване. Да отбележим, че те не са професионално изготвени, а са по-скоро за лична употреба. Обсъждаме и някои специфики на използваните алгоритми.

5 Заключителни бележки и насоки за бъдеща работа

В тази дисертация конструирахме нов бърз подход за оценяване на американски вид финансови инструменти. Тази задача бе решена чрез следните стъпки. Първо получаваме формата на оптималните региони и свързаните с тях граници. След това разглеждаме опции без падежни ограничения, извеждайки формули в затворена форма както за цените, така и за оптималните граници. След това разглеждаме крайните падежи, приближавайки оптималните граници при сравнително рядка времева разбивка. Така получихме много бърз алгоритъм с висока точност – грешки в четвъртия знак след десетичната запетая. За по-плътни мрежи изградихме няколко числени метода, базирани на Монте Карло симулации както и на схеми с крайни разлики. За да направим всичко това, доказахме няколко резултата за първите моменти на достигане на Брауново движение. Разгледани са два вида Марковски моменти – първото достигане до по части линейна функция и първото излизане от ивица, образувана от две такива функции. Също така са разгледани някои граници за Лапласовите трансформации на техните плътности.

Гореспоменатата методология бе приложена първо към класическите американски опции, както и към една тяхна модификация, наречена ограничени (capped) опции. Тези инструменти водят до едностранна задача за достигане до ниво. Оказа се, че можем значително да обобщим съвкупността от тези деривативи, понеже използвахме метод, базиран на инфинитезималните генератори. Нещо повече, изведохме критерий за разграничаване дали платежната функция води до едностранна задача от пут или кол вид. Като конкретен пример, предложихме нов клас финансови инструменти, които биха могли да се разглеждат като обобщение на фючърсните договори.

След това продължихме нашето изследване с така наречените straddle- и strangle-комбинации, които са хибридни стратегии между пут и кол опция. Направихме това без никакви ограничения за страйк-цените, както и за пут и кол теглата. Тези инструменти доведоха до задача за първо излизане от ивица. Освен това, установихме критерий, който гарантира, че дадена ценова функция води именно до такава двустранна задача. Като пример дефинирахме и изследвахме нов клас деривативи – нарекохме ги квадратични strangle-комбинации. Интересно е да се отбележи, че някои стойности на параметри водят до двустранни задачи, докато други водят до едностранни от пут-вид. Тези инструменти биха били интересни за инвеститори, които предпочитат да хеджират по-силно рисковите позиции, които са много далече от страйк-цената.

След това разгледахме отменяемите опции, за които издателят има право да ги прекрати преждевременно. Тези инструменти също водят до двустранни задачи за достигане – едната от границите е свързана с правото на ранно упражняване на притежателя, а другата с правота за прекратяване на издателя. Проучихме поотделно опциите със и без падежни ограничения. Обобщихме тези деривативи, като приехме, че неустойката за автора се състои от три части – пропорция от обичайната платежна функция, дялове от основния актив, както и фиксирана сума. Оказва се, че това обобщение не е тривиално – изглежда, че по този начин можем да затворим класа на отменяемите опции по начин, който да гарантира пут-кол дуалност, подобна на съществуващата при класическите опции. Това е задача за по-нататъшна работа.

Не на последно място, изготвени са много MATLAB-кодове за изследваните деривативи, като така проверяваме и валидираме получените теоретични резултати. Основните от тях са представени.

Резултатите от тази дисертация могат да бъдат продължени в няколко посоки. Първо, непрекъснато променящите се финансови реалности водят до нарастващ интерес към нови инструменти срещу различни рискове. Както споменахме по-горе, предложената техника представлява значително обобщение и по този начин позволява изграждането на различни нови деривативи. В допълнение, много нови стратегии могат да бъдат конструиране чрез така разработения подход.

От друга страна, на всички финансови пазари е наблюдавано, че Гаусовите допускания в модела на Black and Scholes (1973) не са в съответствие с реалностите. За целта много автори се обръщат към различни алтернативи – процеси на Lévy (позоваваме се на Rachev and Mittnik (2000), Boyarchenko and Levendorskiĭ (2002), Bianchi et al. (2008), Cont and Tankov (2004), Rachev et al. (2005), и т.н.), стохастични волатилности (Heston (1993), Bates (1996), Zaevski et al. (2014) и т.н.) и други по-общи динамики (Zaevski and Kounchev (2018) и Zaevski et al. (2019)). Подходът, използван в тази дисертация и базиран на инфинитезималните диференциални оператори, може да бъде допълнително приложен към гореспоменатите модели, тъй като те се основават на други Фелер-Маркови стохастични процеси.

Дериватите, изучавани в тази дисертация, са мощни инструменти срещу различни финансови рискове. В тази светлина резултатите могат да се разглеждат като друг метод за анализ на пазарната несигурност. Това е много важна, но трудна задача, тъй като всеки знае какво е риск, но няма консенсус как да бъде измерен. Предлагат се различни нови техники за решаване на този проблем – например методите на блоковите вериги, Popchev and Taneva (2018) и Popchev et al. (2021b). За други интересни резултати се позоваваме на Denchev (1996), Denchev and Gumnerov (2006), Rachev et al. (2008), Popchev and Radeva (2019), Popchev et al. (2021a), Popchev et al. (2021c) и Zaevski and Nedeltchev (2023) .

Не на последно място, кодовете на MATLAB, подготвени за нуждите на тази дисертация, могат да бъдат разширени и подготвени като MATLAB-пакет за анализ и оценка на финансови инструменти от американски вид.

6 Научни приноси

В тази дисертация разработваме нов подход за оценка на финансови инструменти от американски вид, издадени върху базов актив, моделиран чрез лог-нормален процес. Тяхна основната характеристика е правото на ранно упражняване, което притежателят може да използва по всяко време преди падежа. Така уравнението на Блек-Шоулс (4.10) се превръща в ЧДУ със свободна граница. Традиционният подход за изследване на тези задачи се основава на система от интегрални уравнения, чието числено решаване изисква относително много изчислително време. Като алтернатива, подходът, който предлагаме, се основава на някои свойства на първото достигане до ниво на брауновото движение. Нека означим със ζ първото достигане до линейна функция или изхода от такава ивица. Нека T е крайна дата и θ, σ и k са константи. Интересуваме се от очакванията $\mathbb{E}\left[e^{-\theta\zeta} I_{\zeta<T}\right]$ и $\mathbb{E}\left[e^{\sigma B_T} I_{\ zeta \geq T}\right]$. Желаните резултати са доказани в глава 2. Освен това в тази глава разглеждаме някои важни граници от вида $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta}\right]$. В допълнение, получаваме необходимите резултати за границата $\lim_{T\to\infty} e^{kT}\mathbb{E}\left[e^{\theta B_T} I_{T<\zeta, B_T>z(T)}\right]$, където $z(t)$ е друга линейна функция.

Използвайки тези резултати за Марковсите моменти на Брауновото движение, апроксимирам оптималните граници чрез максимизиране на финансовата полза на притежателя на деривативa. По този начин преобразуваме задачата със свободни граници в ЧДУ в известна област. Има много числени методи за тяхното решаване. Ние предлагаме един сравнително бърз Монте Карло алгоритъм за изчисление на очакването (4.9), което задава цената. Като алтернатива, адаптираме няколко схеми с крайни разлики към възникващото ЧДУ (4.10). Оказва се, че методът на Кранк-Николсън е относително по-бърз и по-точен в сравнение с останалите. Ако финансовите договори нямат дата на падеж, то оптималните граници са фиксирани по времето поради Марковското свойството на стохастичните процеси, които управляват базовите активи. Това ни позволява да изведем затворени формули за границите както и за справедливата цена на деривативa, използвайки метода за максимизиране на финансовия резултат на притежателя. Този подход е приложен към традиционните американски опции в глава 4. Тяхната модификация, наречена ограничени (capped) опции, се изучава в глава 5. Тяханат основната характеристика, е нивото над което кол опция не може да бъде упражнена (под което за пут). Извели сме някои затворени и полузатворени формули за цените.

Глава 6 разглежда някои финансови инструменти с обобщена платежна функция – основното ограничение, което налагаме, е двойна диференцируемост. Получаваме някои достатични условия, които превръщат оценяването на такива деривативи в едностранни задачи за първо достигане. Методът се основава на инфинитезималните генератори. Грубо казано, условието е изпълнено, ако този диференциален оператор, приложен към платежната функция, разделя пространството на състоянията на две свързани подмножества – първото съдържа положителните стойности, докато другото се състои от отрицателните. Ако достигането е от долу, то дериватива̀т се асоциира с пут опциите. Напротив, ако е от горе, то имаме кол-вид договор. Нашият метод се прилага към тези деривативи, като се обръща специално внимание на степенни платежни функции. Въпреки че се разглеждат диференцируеми платежни структури, представеният метод може да се приложи и към традиционните опции, чиито платежни функции са недиференцируеми в страйка – $(x-K)^+$ или $(K-x)^+$. Това се постига чрез апроксимиране от двукратно диференцируеми функции.

В глава 7 разглеждаме така наречените стренгъл стратегии. Те се вяват като комбинация между кол и пут опции – платежната им функция е $\max\left\{C_1(x-K_1), C_2(K_2-x)\right\}$. Традиционното допускане е, че пут страйкът е по-малък от кол страйкът, $K_1 \leq K_2$. Нашият подход позволява да изоставим това ограничение. В допълнение, разглеждаме различни пут и кол тегла чрез броя на дяловете C_1 и C_2. Оказва се, че пространството на състоянията може да бъде разделено на три свързани подмножества. Ако цената на актива е в най-долното, то е оптимално притежателят да упражни като пут. Горното съдържа точките, които правят упражняването като кол оптимално. Средното подмножество прави запазването на опциятаза предпочитане. Така възниква двустранна задача за изход от ивица. Получени са формули ако няма матуритетни ограничения. Важно е да се спомене, че ако основният актив не изплаща дивиденти (еквивалентно на модел без допълнително дисконтиране), то ранното упражняване като кол никога не е оптимално - феномен, който се отнася за много други американски кол деривативи, включително обичайните опции. Интересно е да се отбележи, че въпреки това кол спецификацията има своето въздействие – тя се появява чрез броя на кол-дяловете, но не и чрез кол-страйка.

В глава 8 изследваме кои платежни структури водят до подобен двустранен проблем за оптимално спиране – получени са достатични условия. Оказва се, случаят е такъв, ако инфинитезималният генератор, приложен към платежната функция, разделя пространството $\mathbb{R}^+$ на три интервала – генераторът е положителен в средния и отрицателен в останалите. За да илюстрираме нашия модел, въвеждаме и изследваме така наречените квадратични стренгъли с платежна функция $(x-K)^2$. Тези инструменти могат да бъдат полезни за инвеститори, които предпочитат да хеджират по-силно позициите далече от страйка, и по-слабо тези близо. Оказва се, че тези деривативи могат да доведат до едностранни задачи, както и до двустранни в зависимост от позицията на дисконтовия процент λ спрямо константата $r+\sigma^2$ – двата случая се изследват по отделно.

Останалата част от дисертацията е посветена на така наречените отменими (отменяеми) американски опции, известни още като игрови или израелски опции. В допълнение към правото на притежателя да упражни предсрочно, отменимите опции предоставят на издателя си правото да прекрати договора, като заплати сума над обичайния платежна функция. По принцип тези инструменти водят до двустранни задачи за излизане от ивица. За разлика от стренгълите, които максимизират двумерни функционали, отменяемите опции са свързани с намиране на седлова точка в пространството на случайните Марковски моменти. Кол и пут вариантите са изследвани чрез нашия подход в глави 9 и 10. Доказваме, че оптималните граници решават двумерна нелинейна система, която има единствено решение. Ако имаме кол опция, то множеството за упражняване на притежателя се състои от всички точки над определено ниво, докато това на издателя може да бъде интервал с лява крайна точка равна на страйка, само токата $\{K\}$ или дори празното множество. В последния случай опцията се превръща в обикновена американска. За останалите точки запазването на опцията е по-добро от незабавното упражняване и за двамата участници. Резултатите за пут опциите са подобни, но в известен смисъл обратни - множеството на притежателя се състои от всички точки под някаква граница, докато това на издателя може да бъде интервал $(B,K]$, точката $\{K\}$, или празното множество. В Глава 11 изследваме опции, чиято неустойка е пропорция от обичайната платежна функция. Резултатите за оптималните множества са подобни.

Основната разлика е, че всички точки под страйка са оптимални за кол-отменяемите. От друга страна, ако предположим, че притежателят ще упражни по-късно, ако това осигурява същия финансов резултат, тези точки могат да се разглеждат като част от множеството за запазване. Интересен резултат е, че и двете оптимални граници за пут опция съвпадат със страйка, когато $r \geq 0$. Същото важи и за кол опциите, когато $r \leq 0$ и $\lambda > 0$. И накрая, в глава 12 дефинираме нов клас отменими опции, въвеждащи някои конвертируеми характеристики. Неустойката, която писателят дължи за правото си на предсрочно анулиране, се състои от три части - пропорция от обичайната платежна функция, брой дялове от основния актив и фиксирана сума. Получаваме някои резултати за оптималните граници и съответните множества. Изглежда, че това обобщение не е тривиално, а в известен смисъл затваря множеството на отменяемите опции. Това изследване е оставено за по-нататъшна работа. Грубо казано, колкото е по-голяма неустойката, толкова опцията е по-близо до обикновената американска. Отменяемите (пут) опции при наличие на краен матуритет са разгледани в глава 13. Използваният в тази дисертация подход е адаптиран към тези инструменти. Основната разлика е, че притежателят максимизира печалбата си, докато издателя минимизира финансовия си резултат. Оказва се, че има две критични стойности за времето до падежа $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \infty$. За достатъчно малки падежи, $\tau \leq \tau_1$, опцията е обикновена американска. Ако $\tau \in (\tau_1, \tau_2]$, тогава оптималната граница на писателя е страйкът. Случайът $\tau_1 = \infty$ е възможен. И накрая, ако $\tau > \tau_2$, то опцията е истински отменяема – оптималното множество за издателя е интервал $(K, A(\tau))$ за кол опции и $(B(\tau), K)$ за пут.

И накрая, но не по значенив, представяме в Глава 14 някои избрани MATLAB кодове за оценяване на разглежданите финансови инструменти. Те реализират конструираните алгоритми базирани на получените теоретични резултати.

7 Благодарности

Бих искал да изкажа огромната си благодарност на проф. Рачо Денчев, който ме въведе в областта на финансовата математика през студентските ми години, както и за подкрепата след това.

Благодарен съм на колегите от Института по Математика и Информатика за благоприятната работна среда, както и на сътрудниците от секция Изследване на операциите, вероятности и статистика за полезните дискусии. Специални благодарности към акад. Иван Попчев и чл.-кор. Младен Савов за полезните съвети по време на работата върху тази дисертация.

Литература

L. Alili and A.E. Kyprianou. Some remarks on first passage of lévy processes, the American put and pasting principles. *The Annals of Applied Probability*, 15(3):2062–2080, 2005.

G. Barone-Adesi and R.E. Whaley. Efficient analytic approximation of American option values. *The Journal of Finance*, 42(2):301–320, 1987.

D. Bates. Jumps and stochastic volatility: The exchange rate processes implicit in deutschemark options. *Review of Financial Studies*, 9:69–107, 1996.

J. Bather. Optimal stopping problems for Brownian motion. *Advances in Applied Probability*, 2(2):259–286, 1970.

Martin Beibel and Hans Rudolf Lerche. A new look at optimal stopping problems related to mathematical finance. *Statistica Sinica*, 7(1):93–108, 1997.

A. Bensoussan. On the theory of option pricing. *Acta Applicandae Mathematica*, 2(2):139–158, Jun 1984. ISSN 1572-9036. doi: 10.1007/BF00046576. URL https://doi.org/10.1007/BF00046576.

M. Bianchi, S. Rachev, Y.S. Kim, and F. Fabozzi. Tempered stable distributions and processes in finance: Numerical analysis. *Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Science and Finance*, 2008.

P. Bjerksund and G. Stensland. Closed-form approximation of American options. *Scandinavian Journal of Management*, 9:S87–S99, 1993.

F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–659, 1973.

S.I. Boyarchenko and S.Z. Levendorskii. Perpetual American options under Lévy processes. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 40(6):1663–1696, 2002.

S.I. Boyarchenko and S.Z. Levendorskiǐ. *Non-Gaussian Merton-Black-Scholes Theory*. World Scientific, River Edge, NJ, 2002.

Michael J Brennan and Eduardo S Schwartz. The valuation of American put options. *The Journal of Finance*, 32(2):449–462, 1977.

M. Broadie and J. Detemple. American capped call options on dividend-paying assets. *The Review of Financial Studies*, 8(1):161–191, 1995.

P. Carr, R. Jarrow, and R. Myneni. Alternative characterizations of American put options. *Mathematical Finance*, 2(2):87–106, 1992. ISSN 1467-9965. doi: 10.1111/j.1467-9965.1992.tb00040.x. URL http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-9965.1992.tb00040.x.

R. Cont and P. Tankov. *Financial Modeling with Jump Processes*. Chapman & Hall/CRC Press, New York, 2004.

J.C. Cox, S.A. Ross, and M. Rubinstein. Option pricing: A simplified approach. *Journal of financial Economics*, 7(3):229–263, 1979.

R. Denchev. Mathematics and money. *Mathematics and Education in Mathematics*, 1996. Proceedings of Twenty Fifth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, in Bulgarian.

R. Denchev and K. Gumnerov. Dynamic stochastic optimization in finance. *Mathematica Balkanica*, 20, 2006. URL http://www.math.bas.bg/infres/MathBalk/MB-20/MB-20-015-038.pdf.

J. Detemple and W. Tian. The valuation of American options for a class of diffusion processes. *Management Science*, 48(7):917–937, 2002.

E.B. Dynkin. A game-theoretic version of an optimal stopping problem. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 185(1):16–19, 1969. in Russian.

T.J. Emmerling. Perpetual cancellable American call option. *Mathematical Finance: An International Journal of Mathematics, Statistics and Financial Economics*, 22(4):645–666, 2012.

A. Friedman. Parabolic variational inequalities in one space dimension and smoothness of the free boundary. *Journal of Functional Analysis*, 18(2):151–176, 1975. ISSN 0022-1236. doi: https://doi.org/10.1016/0022-1236(75)90022-1. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022123675900221.

A. Friedman. *Variational Principles and Free-Boundary Problems*. Dover books on mathematics. Dover Publications, 2010. ISBN 9780486478531. URL https://books.google.bg/books?id=94-mBSlQ43wC.

H.U. Gerber and E.S.W. Shiu. Martingale approach to pricing perpetual American options. *ASTIN Bulletin: The Journal of the International Actuarial Association*, 24(02):195–220, 1994.

H.U. Gerber and E.S.W. Shiu. Martingale approach to pricing perpetual American options on two stocks. *Mathematical Finance*, 6(3):303–322, 1996. doi: 10.1111/j.1467-9965.1996.tb00118.x. URL https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1467-9965.1996.tb00118.x.

R. Geske and H.E. Johnson. The American put option valued analytically. *The Journal of Finance*, 39(5):1511–1524, 1984.

S. Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, 6(2):327–343, 1993.

T.S. Ho, R.C. Stapleton, and M.G. Subrahmanyam. A simple technique for the valuation and hedging of American options. *The Journal of Derivatives*, 2(1):52–66, 1994.

J.Z. Huang, M.G. Subrahmanyam, and G.G. Yu. Pricing and hedging American options: a recursive integration method. *The Review of Financial Studies*, 9(1):277–300, 1996.

R.V. Ivanov. On the pricing of American options in exponential Lévy markets. *Journal of applied probability*, 44(2):409–419, 2007.

S. D. Jacka. Optimal stopping and the American put. *Mathematical Finance*, 1(2):1–14, 1991. ISSN 1467-9965. doi: 10.1111/j.1467-9965.1991.tb00007.x. URL http://dx.doi.org/10.1111/j.1467-9965.1991.tb00007.x.

P. Jaillet, D. Lamberton, and B. Lapeyre. Variational inequalities and the pricing of American options. *Acta Applicandae Mathematica*, 21(3):263–289, 1990.

J. Jeon and J. Oh. Valuation of American strangle option: Variational inequality approach. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-B*, 24(2):755, 2019.

H.E. Johnson. An analytic approximation for the American put price. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 18(1):141–148, 1983.

N Ju. Pricing an American option by approximating its early exercise boundary as a multipiece exponential function. *The Review of Financial Studies*, 11(3):627–646, 1998.

I. Karatzas. On the pricing of American options. *Applied mathematics and optimization*, 17 (1):37–60, 1988.

Y. Kifer. Game options. *Finance and Stochastics*, 4(4):443–463, Aug 2000. ISSN 0949-2984. doi: 10.1007/PL00013527. URL https://doi.org/10.1007/PL00013527.

I.J. Kim. The analytic valuation of American options. *The Review of Financial Studies*, 3(4):547–572, 1990. ISSN 08939454, 14657368. URL http://www.jstor.org/stable/2962115.

C. Kühn and A.E. Kyprianou. Callable puts as composite exotic options. *Mathematical Finance*, 17(4):487–502, 2007.

A.E. Kyprianou. Some calculations for Israeli options. *Finance and Stochastics*, 8(1):73–86, 2004.

D. Lamberton and B. Lapeyre. *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance, Second Edition*. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series. Taylor & Francis, 1996. ISBN 9780412718007. URL https://books.google.bg/books?id=61zI_o-pIkEC.

S.Z. Levendorskiĭ. Pricing of the American put under Lévy processes. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 7(03):303–335, 2004.

F.A. Longstaff and E.S. Schwartz. Valuing American options by simulation: a simple least-squares approach. *The review of financial studies*, 14(1):113–147, 2001.

E. F. Magirou, P. Vassalos, and N. Barakitis. A policy iteration algorithm for the American put option and free boundary control problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 373:112544, 2020. ISSN 0377-0427. doi: https://doi.org/10.1016/j.cam.2019.112544. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042719305497. Numerical Analysis and Scientific Computation with Applications.

P. Van Moerbeke. On optimal stopping and free boundary problems. *Advances in Applied Probability*, 5(1):33–35, 1973.

E. Mordecki. Optimal stopping for a diffusion with jumps. *Finance and Stochastics*, 3(2): 227–236, Feb 1999. ISSN 0949-2984. doi: 10.1007/s007800050060. URL https://doi.org/10.1007/s007800050060.

E. Mordecki. Optimal stopping and perpetual options for Lévy processes. *Finance and Stochastics*, 6(4):473–493, Oct 2002. ISSN 0949-2984. doi: 10.1007/s007800200070. URL https://doi.org/10.1007/s007800200070.

R. Myneni. The pricing of the American option. *The Annals of Applied Probability*, 2(1): 1 – 23, 1992. doi: 10.1214/aoap/1177005768. URL https://doi.org/10.1214/aoap/1177005768.

A. Pascucci. Free boundary and optimal stopping problems for American Asian options. *Finance and Stochastics*, 12(1):21–41, Jan 2008. ISSN 1432-1122. doi: 10.1007/s00780-007-0051-7. URL https://doi.org/10.1007/s00780-007-0051-7.

G. Peskir and A. Shiryaev. *Optimal Stopping and Free-Boundary Problems*. Lectures in Mathematics. ETH Zürich. Birkhäuser Basel, 2006. ISBN 9783764373900. URL https://books.google.bg/books?id=UinZbLqpUDEC.

H. Pham. Optimal stopping, free boundary, and American option in a jump-diffusion model. *Applied Mathematics and Optimization*, 35(2):145–164, Mar 1997. ISSN 1432-0606. doi: 10.1007/BF02683325. URL https://doi.org/10.1007/BF02683325.

I. Popchev and I. Radeva. Briefly about the possibilities of the credit derivatives. In *Financial innovation – research and practice*. New Bulgarian University, 2008. ISBN 978-954-535-502-8. in Bulgarian.

I. Popchev and I. Radeva. Risk analysis – an instrument for technology selection. *Engineering Sciences*, LVI:5–20, 2019. doi: 10.7546/EngSci.LVI.19.04.01.

I. Popchev and G. Taneva. Blockchain – new economy and new risks. *Technospera*, 4(42): 63–67, 2018. in Bulgarian.

I. Popchev, I. Radeva, and I. Nikolova. Aspects of the evolution from risk management to enterprise global risk management. *Engineering Sciences*, LVIII:16–30, 2021a. doi: 10.7546/EngSci.LVIII.21.01.02.

I. Popchev, I. Radeva, and V. Velichkova. Blockchains in enterprise global risk management. In *2021 International Conference Automatics and Informatics (ICAI)*, pages 282–287, 2021b. doi: 10.1109/ICAI52893.2021.9639500.

I. Popchev, I. Radeva, and V. Velichkova. Blockchains in enterprise global risk management. In *2021 International Conference Automatics and Informatics (ICAI)*, pages 282–287. IEEE, 2021c. doi: 10.1109/ICAI52893.2021.9639500.

K. Pötzelberger and L. Wang. Boundary crossing probability for Brownian motion. *Journal of Applied Probability*, 38(1):152–164, 2001.

S. Qiu. American strangle options. *Applied Mathematical Finance*, 27(3):228–263, 2020.

S. Rachev and S. Mittnik. *Stable Paretian Models in Finance*. Wiley, New York, 2000.

S. Rachev, C. Menn, and F. Fabozzi. *Fat-Tailed and Skewed Asset Return Distributions: Implications for Risk Management, Portfolio selection, and Option Pricing*. Wiley, New York, 2005.

S. Rachev, S. Stoyanov, and F. Fabozzi. *Advanced Stochastic Models, Risk Assessment, and Portfolio Optimization: The Ideal Risk, Uncertainty, and Performance Measures*. Wiley, New York, 2008.

L.C.G. Rogers. Monte Carlo valuation of American options. *Mathematical Finance*, 12(3): 271–286, 2002.

A. N. Shiryaev. *Essentials of stochastic finance: facts, models, theory*, volume 3. World scientific, 1999.

A.N. Shiryaev. *Optimal Stopping Rules*. Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer Berlin Heidelberg, 2009. ISBN 9783540841814. URL https://books.google.bg/books?id=LWFlawEACAAJ.

A.N. Shiryaev, Y.M. Kabanov, D.O. Kramkov, and A.V. MelвЂ™nikov. Toward the theory of pricing of options of both European and American types. I. discrete time. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 39(1):80–129, 1994. in Russian.

A.N. Shiryaev, Y.M. Kabanov, D.O. Kramkov, and A.V. Mel'nikov. Toward the theory of pricing of options of both European and American types. II. continuous time. *Theory of Probability & Its Applications*, 39(1):61–102, 1995.

A. Suzuki and K. Sawaki. The pricing of perpetual game put options and optimal boundaries. In *Recent Advances in Stochastic Operations Research*, pages 175–187. World Scientific, 2007.

L. Wang and K. Pötzelberger. Boundary crossing probability for Brownian motion and general boundaries. *Journal of Applied Probability*, 34(1):54–65, 1997.

D. Wong. *Generalized Optimal Stopping Problems and Financial Markets*. Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics Series. Taylor & Francis, 1996. ISBN 9780582304000. URL https://books.google.bg/books?id=uQdW8tADrsAC.

S.C.P. Yam, S.P. Yung, and W. Zhou. Game call options revisited. *Mathematical Finance*, 24(1):173–206, 2014.

T. Zaevski. Perpetual cancellable American options with convertible features. *Modern Stochastics: Theory and Applications*, 10(4):367–395, 2023a. ISSN 2351-6046 (print), 2351-6054 (online). doi: 10.15559/23-VMSTA230. URL https://www.vmsta.org/journal/VMSTA/article/273/read.

T. Zaevski. American strangle options with arbitrary strikes. *Journal of Futures Markets*, 43(7):880–903, 2023b. ISSN 0270-7314 (print), 1096-9934 (online). doi: https://doi.org/10.1002/fut.22419. URL https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/fut.22419.

T. Zaevski. Some limits for the Laplace transform of the Brownian motionвЂ™s first hit to a linear function. *Serdica Mathematical Journal*, 50(2):183вЂ“202, 2024a. ISSN 1310-6600 (print), 2815-5297 (online). doi: 10.55630/serdica.2024.50.183-202. URL https://serdica.math.bas.bg/index.php/serdica/article/view/87.

T. Zaevski. Quadratic American strangle options in light of two-sided optimal stopping problems. *Mathematics*, 12(10):1449, 2024b. ISSN 2227-7390. doi: 10.3390/math12101449. URL https://www.mdpi.com/2227-7390/12/10/1449.

T. S. Zaevski, Y. S. Kim, and F. J. Fabozzi. Option pricing under stochastic volatility and tempered stable lévy jumps. *International Review of Financial Analysis*, 31:101 – 108, 2014. ISSN 1057-5219. doi: https://doi.org/10.1016/j.irfa.2013.10.004. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1057521913001403.

T.S. Zaevski. Perpetual game options with a multiplied penalty. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 85:105248, 2020a. ISSN 1007-5704 (print), 1878-7274 (online). doi: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105248. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570420300812.

T.S. Zaevski. Discounted perpetual game call options. *Chaos, Solitons & Fractals*, 131:109503, 2020b. ISSN 0960-0779 (print), 1873-2887 (online). doi: https://doi.org/10.1016/j.chaos.2019.109503. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077919304552.

T.S. Zaevski. Discounted perpetual game put options. *Chaos, Solitons & Fractals*, 137:109858, 2020c. ISSN 0960-0779 (print), 1873-2887 (online). doi: https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.109858. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077920302587.

T.S. Zaevski. Laplace transforms for the first hitting time of a Brownian motion. *Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences*, 73(7):934–941, 2020d. ISSN 2367-6248 (print),2603-4832 (online). doi: 10.7546/CRABS.2020.07.05. URL http://www.proceedings.bas.bg/index_old.html.

T.S. Zaevski. A new approach for pricing discounted American options. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 97:105752, 2021a. ISSN 1007-5704 (print), 1878-7274 (online). doi: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2021.105752. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570421000630.

T.S. Zaevski. Laplace transforms of the Brownian motion's first exit from a strip. *Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences*, 74(5):669–676, 2021b. ISSN 2367-6248 (print),2603-4832 (online). doi: 10.7546/CRABS.2021.05.04. URL http://www.proceedings.bas.bg/index_old.html.

T.S. Zaevski. Pricing discounted American capped options. *Chaos, Solitons & Fractals*, 156:111833, 2022a. ISSN 1007-5704 (print), 1878-7274 (online). doi: https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.111833. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077922000443.

T.S. Zaevski. Pricing cancellable American put options on the finite time horizon. *Journal of Futures Markets*, 42(7):1284–1303, 2022b. ISSN 0270-7314 (print), 1096-9934 (online). doi: https://doi.org/10.1002/fut.22331. URL https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/fut.22331.

T.S. Zaevski. On some generalized American style derivatives. *Computational and Applied Mathematics*, 43(3):115, 2024c. ISSN 2238-3603 (print), 1807-0302 (online). doi: https://doi.org/10.1007/s40314-024-02625-6. URL https://link.springer.com/article/10.1007/s40314-024-02625-6.

T.S. Zaevski and O. Kounchev. A jump moment as a stopping time and defaultable derivatives. *Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences*, 71(9):1186–1191, 2018. ISSN 2367-6248 (print),2603-4832 (online).

T.S. Zaevski and D.C. Nedeltchev. From BASEL III to BASEL IV and beyond: Expected shortfall and expectile risk measures. *International Review of Financial Analysis*, 87: 102645, 2023. ISSN 1057-5219. doi: https://doi.org/10.1016/j.irfa.2023.102645. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1057521923001618.

T.S. Zaevski, O. Kounchev, and M. Savov. Two frameworks for pricing defaultable derivatives. *Chaos, Solitons & Fractals*, 123:309–319, 2019. ISSN 0960-0779. doi: https://doi.org/10.1016/j.chaos.2019.04.025. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077919301365.

Jinsha Zhao. American option valuation methods. *International Journal of Economics and Finance*, 10(5), 2018.