Научни приноси на публикациите за участие в конкурс за доцент на ИМИ-БАН

на д-р Цветелин Стефанов Заевски

февруари 2021

Общият списък на научните публикации на кандидата съдържа 13 заглавия. За участие в конкурса са представени 10 от тях. Те са излезли от печат през периода 2014 - 2020 г. след придобиване на образователна и научна степен „доктор“. Кандидата потвърждава, че нито една от тези статии не е участвала като доказателство за предходни процедури. Всички статии са публикувани в списания с импакт фактор (IF), освен една, която е публикувана в списание реферирано в MathSciNet. Общият импакт фактор на представените статии е 21.0590.

Научните приноси са в няколко насоки, всички от тях свързани с областта на финансовата математика. Въпреки, че част от темите се препокриват, можем да направим следното разделение на приносите:

1. Добавяне на скоково поведение в модели със стохастична волатилност чрез използване на процеси на Леви.
2. Идентифициране на свързани елементи в дадено множество.
3. Слабо зависими от пътя финансови деривати.
4. Финансови деривати с право на ранно упражняване.
   (а) Американски тип деривати.
   (б) Игрови опции.
5. Лапласови трансформации свързани с момент на достигане на Брауново движение до ниво.

По-долу са представени получените от кандидата резултати в контекста на съществуващата теория. Ще се използват наименованията на английски език на някои от термините, за които няма наложен превод на български.

1 Добавяне на скоково поведение в модели със стохастична волатилност чрез използване на процеси на Леви.

Тук се включва статията

1. T.S. Zaevski, Y.S. Kim, and F.J. Fabozzi. (2014) Option pricing under stochastic volatility and tempered stable Lévy jumps. International Review of Financial Analysis, 31:101 – 108, 2014. ISSN 1057-5219. doi: https://doi.org/10.1016/j.irfa.2013.10.004. URL http: //www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1057521913001403. IF 0.881.

В класическия модел на Black and Scholes (1973) основният актив S_t е описан чрез геометрично Брауново движение:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \tag{1.1}$$

където μ и σ са константи, а B_t е Брауново движение. По-късно Merton (1976) обобщава този модел чрез добавяне на скоково поведение

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t + S_t dM_t, \tag{1.2}$$

където M_t е сложен Поасонов процес с лог-нормално разпределени скокове. Решението на стохастичното диференциално уравнение (СДУ) (1.2) представлява експонента от процес на Леви, чиято скокова компонента е отново сложен Поасонов процес, но с нормално разпределени скокове. Естествено се появяват т.нар. експоненциални модели на Леви. Нещо повече, оказва се че реално наблюдаваните данни се описват по-добре чрез infinite activity Lévy process, отколкото чрез Брауново движение + сложен Поасонов процес.

От друга страна Heston (1993) обобщава модела на Блек-Шолс чрез заместване на коефициента на волатилност σ в СДУ (1.1) с процес на Cox-Ingersoll-Ross. По-късно Bates (1996) обобщава модела на Хестън по същия начин, по който Мертън обобщава модела на Блек-Шолс

$$\begin{aligned} dS_t &= \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dB_t^1 + S_t dM_t \\ dV_t &= \xi \left(\eta - V_t\right) dt + \theta \sqrt{V_t} dB_t^2 \\ dB_t^1 dB_t^2 &= \rho dt. \end{aligned} \tag{1.3}$$

След това се е наложило мнението, че при наличие на гаусова компонента добавянето на Поасонов скоков елемент е достатъчно за точно описание на активите. Точно това е мотивацията за написването на тази статия - дали това наистина е така? Процесът M_t е заменен с произволен процес на Леви със скокове по-големи от -1. (Това гарантира положителност на S_t.) Изведено е рисково-неутралното условие, както и цената на кол

опция. За да се направи сравнение с реални данни се използва т.нар. tempered stable process. Методът за калибриране е оригинален сам по себе си – използва се съвместно калибриране на реалната и на рисково-неутралната мярка. Така се избягва възможността да се получи много добър фит за реалната мярка, но да не съществува достатъчно добра еквивалентна мярка за рисково-неутралната.

Получените резултати категорично потвърждават хипотезата, че temperd stable процес описва по-добре данните от сложен Поасонов. Калибрираните параметри на Поасоновия процес са - интензитет 273.7020 и нормално разпределени скокове с параметри $(0.0008, 0.0030)$, т.е. имаме бързо скачащ процес с малка големина на скоковете. Това е типично поведение на един infinite activity Lévy process.

2 Идентифициране на свързани елементи в дадено множество.

Тук се отнася следната статия

2. T. Zaevski, O. Kounchev, D. Palejev, and E. Stoimenova. (2017) Spectral clustering of multidimensional genetic data. Annual of Sofia University St. Climent Ohridski, 104: 201–215, ISSN 1313-9215 (print), 2603-5529 (online).

Използван е един метод от спектралната теория на графите към проблема за намиране на генна експресия в две отделни контролни групи. Методът е базиран на т.нар. спектрална клъстеризация. Необходимата матрица на подобие, която задава разстоянията между отделните възли на графа, е базирана на корелационната матрица. Тя е преобразувана по такъв начин, че по-голям (по абсолютна стойност) корелационен коефициент да води до по-малко разстояние. Генерирани са различни корелационни матрици за да бъде тестван алгоритъма. Даден е и метод, чрез който да се генерира корелационна матрица, която максимално да включва наличната информация за корелационните коефициенти между различните гени.

Наглед може да изглежда, че тази материя е далече от финансовата математика, но това не е напълно така. Ако заменим понятието гени с активи във финансов пазар, достигаме до задача за разделяне на търгуемите активи в известен брой групи (клъстери). Корелационните коефициенти могат да бъдат статистически изведени от наличните реални данни. По такъв начин метода може да бъде използван в задачата за диверсификация на портфейл, също и в областта на риск-мениджмънта. Това е тема на бъдеща работа.

3 Слабо зависими от пътя финансови деривати.

Към тази тема се отнасят следните две статии

3. T.S. Zaevski and O. Kounchev. (2018) A jump moment as a stopping time and defaultable derivatives. Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences, 71(9):1186–1191, ISSN 2367-6248 (print),2603-4832 (online). IF 0.321

4. T.S. Zaevski, O. Kounchev, and M. Savov. (2019) Two frameworks for pricing defaultable derivatives. Chaos, Solitons & Fractals, 123:309–319. ISSN 0960-0779.
doi: https://doi.org/10.1016/j.chaos.2019.04.025. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077919301365. IF: 3.764

Слабо зависимите от пътя финансови деривати (понятието не е общоприето нито на български, нито на английски език) се влияят от някакво случайно събитие (stopping time на езика на теория на вероятностите) и евентуално от стойността на актива в този момент. Разликата с т.нар. силно зависими от пътя деривати, е че тяхната платежна структура зависи от целия път на актива – пример за това са Азиатските опции, при които се разглежда средна стойност за периода.

В гореспоменатите две статии са систематизирани два различни метода за оценка на така наречените дефолт-деривати, като е изградена стройна теория, която обхваща максимално различни начални предположения. Макар че наименованието на тези деривати ги свързва с фалит, то и други видове деривати, чийто живот приключва в даден случаен момент, могат да се опишат по този начин. За общност ще използваме понятието фалит. Също така е предвидена възможност за моментална загуба на стойност за основния актив в момента на фалит. (Когато тази загуба е цялостна имаме тотален фалит.) В първата статия е представен, и допълнително развит след това във втората, метод, при който фалита настъпва при първия скок на даден стохастичен процес. Вторият метод, представен във втората статия, е базиран на външно за системата случайно събитие, което чрез разширяване на филтрацията се инкорпорира като stopping time. Предположенията за вида на основния актив варират в широките граници между логнормален процес до решение на СДУ задвижвано от процес на Леви. Същото важи и за предположенията за интензитета на фалита (в смисъл на интензитет на stopping time) и за нивото на загуба на стойност. Разгледани са случаите от константни предположения (те могат да се асоциират с Поасонов процес) до генерирани от marked point process. Изведени са условията за неарбитражност, както и диференциалните уравнения, които цените на дериватите трябва да удовлетворяват. Изведена е формула за премията за възможен фалит, също така са разгледани и някои конкретни примери.

4 Финансови деривати с право на ранно упражняване.

Както е отбелязано по-горе, тези деривати се делят на два основни вида. Американският тип деривати дават на техния собственик право на упражняване в произволен момент преди матуритета. При игровите опции се дава такова право и на емитента на деривата, като той се задължава да плати известна сума над обичайната, когато реши да прекрати контракта.

4.1 Американски тип деривати.

Тук се включвват следните две статии

5. T.S. Zaevski. A new form of the early exercise premium for American type derivatives. (2019) Chaos, Solitons & Fractals, 123:338–340. ISSN 0960-0779.
doi: https://doi.org/10.1016/j.chaos.2019.04.024.
URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077919301341. IF: 3.764

6. T.S. Zaevski. Early exercise boundary of an American put. (2019) Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences, 72(6):720–726. ISSN 2367-6248 (print),2603-4832 (online).IF:0.343

Както отбелязахме, американските деривати дават право на собственика си да избере момента на упражняване. Това естествено води до задача за оптимално спиране и съответно до диференциално уравнение със свободна граница. В първата статия е изведен нов вид на т.нар. премия за ранно упражняване. Тя представлява цената, която купувача на деривата плаща за правото да го упражни преди матуритета. Разбира се, това е разликата между цените на съответните американски и европейски деривати. Използвана е техниката на stopping times, а не класическия метод свързан с инфинитезималния генератор. Това ни дава възможност да изведем премията в случаи, когато платежната структура на деривата не е диференцируема функция, и дори не е задължително да бъде непрекъсната. Такъв е случаят на конвертируемите облигации.

Във втората статия е разгледан един нов подход за апроксимиране на оптималната граница за американска пут опция. Тази граница определя нивото за основния актив, под което незабавното упражняване на опцията е оптимално. Използвани са помощни финансови деривати, които матурират при достигане на актива до някаква граница. След това се максимизират очакваните финансови резултати на собственика на такъв дериват. По този начин уравнението със свободна граница, което описва цената на опцията, се превръща в частно диференциално в известна област. То е тясно свързано с уравнението на Колмогоров и има за решение съответното очакване. Даден е Монте Карло метод за намирането му.

4.2 Игрови опции.

Тук се включват следните три статии

7. T.S. Zaevski. Discounted perpetual game call options. (2020) Chaos, Solitons & Fractals, 131: 109503. ISSN 0960-0779. doi: https://doi.org/10.1016/j.chaos.2019.109503.
URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077919304552. IF: 3.764

8. T.S. Zaevski. (2020) Discounted perpetual game put options. Chaos, Solitons & Fractals, 137: 109858. ISSN 0960-0779. doi: https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.109858.

URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960077920302587. IF: 3.764

9. T.S. Zaevski. (2020) Perpetual game options with a multiplied penalty. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 85:105248. ISSN 1007-5704. doi:https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105248.
URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1007570420300812. IF: 4.115

Тези опции са известни в литературата като game options, Israeli options, cancellable American put or call. Въведени са за пръв път от Kifer (2000), след което има редица изследвания. В отбелязаните по-горе три статии игровите опции се изследват на база обобщени предположения като се използва нов подход базиран на специален вид помощни деривати. При тях единият контрагент е задължен да упражни опцията когато основния актив достигне някакво ниво, а втория има право да оптимизира своята стратегия. Също така и в трите статии е въведен допълнителен дисконтиращ фактор, който има две особено важни функции. Първо, по този начин се задава времева зависимост в платежните структури. Второ, наличието на този допълнителен дисконтиращ фактор позволява да се разглежда модел плащащ дивиденти като такъв без дивиденти, но с различни параметри. Това е една от причините да не се налага положителност на безрисковата лихва. Моделите са дефинирани в термините на stopping times, след което са доказани серия от твърдения, които характеризират оптималните множества за двамата контрагенти. Трябва да се спомене, че се разглежда асимптотичният случай, в който няма матуритет. Това означава, че оптималните граници както за купувача на опцията, така и за продавача, са константи по времето.

В първите две статии са разгледани съответно кол и пут опции, за които сумата, която продавача дължи за правото си за ранно упражняване, е константа. Изведени са уравненията за оптималните граници и е доказано, че те имат единствено решение. За кол опция със страйк K получаваме, че оптималната област на купувача е (B, ∞), докато за продавача тя може да изглежда по три начина – интервал (K, A), константата K, или празното множество $(K < A < B)$. Показано е кой случай е валиден в зависимост от входящите параметри. Трябва да се отбележи, че ако няма дисконтиращ фактор, то $A = B = \infty$, което означава, че купувача никога не упражнява опцията, а за продавача е изгодно да я прекрати в момента, в който основния актив надмине страйка. Получените резултати за пут опции са в известен смисъл симетрични. Оптималната област за купувача е интервал от вида $(0, A)$, докато за емитента тя може да бъде интервал (B, K), точката K, или празното множество. $(0 < A < B < K)$

В третата статия е разгледан един некласически вид игрови опции, при които цената за ранно упражняване на емитента е пропорционална на обичайното плащане на опцията. Получени са съответните уравнения за оптималните граници и е доказана единствеността на техните решения. За кол опция оптималната област на купувача е отново от вида (B, ∞), докато тази на емитента е $(0, A)$ за някое $A \geq K$. Трябва да отбележим, че за разлика от традиционните игрови опции, при недисконтирания случай отново $B = \infty$, но винаги $A < \infty$. Интересен е случая, когато безрисковата лихва е

отрицателна. Тогава границите A и B съвпадат със страйка, т.е. точките под страйка са оптимални за продавача, докато тези над страйка са оптимални за купувача. За пут опции имаме, че оптималните области на купувача и продавача са съответно от вида $(0, A)$ и (B, ∞), $A \leq B \leq K$. Двете граници съвпадат със страйка, когато безрисковия лихвен процент е положителен.

5 Лапласови трансформации свързани с момент на достигане на Брауново движение до ниво.

В тази област се включва статията

10. T.S. Zaevski. (2020) Laplace transforms for the first hitting time of a Brownian motion. Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences, 73(7):934–941, 2020. ISSN 2367- 6248 (print),2603-4832 (online). doi: 10.7546/CRABS.2020.07.05. IF:0.343

Нека τ е момента на първо достигане на Брауново движение до линейна или по части линейна функция, T е фиксиран момент и $\tau^T = \tau \wedge T$. Изведени са формулите за следните две лапласови трансформации (1) $E\left[e^{-\theta\tau} I_{\tau \leq T}\right]$ и (2) $E\left[e^{\theta B_T} I_{\tau > T, B_T > z}\right]$. С тяхна помощ може да се изчисляват очаквания от вида (3) $E\left[e^{-\theta_1 \tau^T + \theta_2 B_{\tau^T}}\right]$, понеже (А) ако $\tau \leq T$, то ще знаем стойността на Брауновото движение в момент $\tau^T \equiv \tau$ като функция на τ и следователно ще използваме очакването (1) и (Б) ако $\tau > T$, то $\tau^T = T$ и следователно ще имаме нужда от очакване (2). Връзката с финансовата математика се явяват имено тези очаквания (3). Ако един актив е моделиран чрез геоеметрично Брауново движение и трябва да оценим дериват свързан с достигане на някаква граница, то можем да апроксимираме тази гранца с експонента от по части линейна функция и да използваме очакването (3). Това също така има общо с резултатите представени в част 4.1.

Литература

D. Bates. Jumps and stochastic volatility: The exchange rate processes implicit in deutschemark options. *Review of Financial Studies*, 9:69–107, 1996.

F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81:637–659, 1973.

S. Heston. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, 6(2):327–343, 1993.

Y. Kifer. Game options. *Finance and Stochastics*, 4(4):443–463, Aug 2000. ISSN 0949-2984. doi: 10.1007/PL00013527. URL https://doi.org/10.1007/PL00013527.

R.C. Merton. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3:125–144, 1976.