

АВТОРСКА СПРАВКА

на Цветомир Йотов Цачев

Тази справка се отнася за публикациите, изброени в приложения списък за участие в конкурса за професор в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5 Математика, научна специалност 01.01.11 изследване на операциите (оптимално управление и неговите приложения), обявен в "Държавен вестник", бр. 7 / 24.01.2014 г. от Института по математика и информатика при БАН. В нея те ще бъдат цитирани със съответния си номер от раздела, в който фигурират и с номера на раздела от списъка.

Публикациите с номера 1, 2, 3 и 4 от раздел I и с номера 1 и 2 от раздел II (№ 1, разд. I е кратка версия на № 3, разд. I, а № 2, разд. II е кратка версия на № 4, разд. I) са свързани с кандидатската ми дисертация. В тях се изучават задачи за оптимално управление на линейно параболично частно диференциално уравнение (ЧДУ) от втори ред. Всички разглеждани задачи са с терминален критерий за качество (целева функция) - минимизация на L_2 - отклонението на температурата на тяло в даден момент $T > 0$ от зададено (желано) температурно разпределение, и с интегрално ограничение върху управлението. В зависимост от параметъра на граничната задача за параболичното ЧДУ, с който се управлява, разглежданите задачи се делят на три типа: управление чрез началното условие (в № 1 и 3 от раздел I); управление чрез дясната страна на уравнението (в № 4, разд. I и № 2, разд. II); управление чрез граничното условие (в № 2, разд. I). В № 1, разд. II е публикуван конструктивен метод за намиране на приближени решения на първите два типа задачи, основан на крайномерни апроксимации. При управление с началното условие (№ 3, разд. I) е получена експоненциална скорост на сходимост на "приближените" минимума на целевата функция към точния ѝ минимум, а при управление с дясната страна на уравнението (№ 4, разд. I) - степенна сходимост. За същите два типа задачи съответно в № 3, разд. I и в № 4, разд. I е изследван въпросът за устойчивост на споменатата скорост на сходимост относно желаното в момента $T > 0$ температурно разпределение $y(\cdot)$. Доказано е, че ако $y(\cdot)$ не е от множеството на достигане (с допустими управления), има устойчивост, и че ако $y(\cdot)$ е от множеството на достигане - няма устойчивост.

В № 3, разд. I и в № 4, разд. I е получена скоростта на сходимост на намерените приближени оптимални управления към единственото оптимално управление при предположение, че $y(\cdot)$ не е от множеството на достигане: експоненциална в № 3, разд. I и степенна в № 4, разд. I. Доказано е, че тя е устойчива по отношение на $y(\cdot)$. В № 2, разд. I е предложен конструктивен метод за намиране на приближени решения на третия тип задачи - с управление в граничното условие. Съответно в статиите с номера 2, 3 и 4 от раздел I за трите типа разглеждани задачи е изследвана зависимостта на множеството от оптимални управления от $y(\cdot)$ (желаното в момента $T > 0$ температурно разпределение). И в трите случая е доказано, че:

- ако $y(\cdot)$ не е от множеството на достигане, въпросната зависимост е липшицова;
- ако $y(\cdot)$ може да се достигне с управление от границата на множеството от допустими управления, зависимостта е непрекъсната;
- ако $y(\cdot)$ може да се достигне с управление от вътрешността на множеството от допустими управления, зависимостта е прекъсната.

Предложеният в статиите с номера 2, 3 и 4 от раздел I и в № 1, разд. II метод за намиране на приближени решения е едно развитие на метода на квазиобръщането на Р. Латтес и Ж.-Л. Лионс, разработен от тях в края на 60-те години за задачи, в които няма ограничения върху управлението.

В № 5, разд. I и № 6, разд. I (№ 5, разд. I е кратка версия на № 6, разд. I) е разгледана задача за оптимално управление на линейно параболично ЧДУ от втори ред с терминален критерий за качество (целева функция) и поточно ограничение върху управлението. Интересът към тази задача бе породен от статия на Кл. Гласхоф и Н. Век. в *SIAM J. Contr. Optim.* от 1976 г., в която те доказват *bang – bang* свойство на оптималното управление в задача, в която терминалният критерий за качество е равномерно (т.е. в C -нормата) отклонение на температурата на тяло в даден момент $T > 0$ от зададено (желано) температурно разпределение. В № 6, разд. I е доказано *bang – bang* свойство на оптималното управление в задача, обобщаваща разгледаната от Кл. Гласхоф и Н. Век в следните две направления:

- коефициентите на елиптичния оператор зависят и от времето (не само от пространствената променлива), което води до неприменимост на метода на разделяне на променливите;
- отклонението в терминалния критерий за качество е относно норма, по-силна от C -нормата: Хьолдерова норма или норма на подходящо пространство на Бесов.

Следва справка за статиите, публикувани след придобиване на научното звание ст. н. с. II ст. (доцент).

Публикациите с номера 7, 9, 11, 12 и 13 от раздел I и с номера 4 и 5 от раздел II са от областта на оптималното управление на хетерогенни динамични системи и неговите приложения в моделирането на процеси от икономиката, епидемиологията и екологията. Статията от раздел III е обзор върху някои от тях (този обзор не обхваща № 13, разд. I и № 5, разд. II). Една динамична система се нарича хетерогенна, ако всеки отделен неин елемент има собствена динамика. Това, което прави от различните елементи система, е, че динамиките им си влияят една на друга. Ето защо наличието на интегрална фазова променлива, свързваща фазовите променливи на отделните елементи чрез интегриране по параметрите на хетерогенност, е характерна особеност на хетерогенните динамични системи. В тук обсъжданите публикации се разглежда оптимално управление на системи, чиято хетерогенност се описва с едномерен или двумерен параметър – на всяка стойност на параметъра отговаря съответен елемент на системата.

Типични представители на хетерогенните системи са системите, структурирани по възраст. Тласък в тяхното изучаване от гледна точка на оптималното управление беше даден с принципа за максимума на Понтрягин за такива системи, доказан в [2] и подобряващ съответния по-ранен резултат на Brokate от [1].

Ще скицираме извеждането на основното ЧДУ от първи ред, появяващо се в описанието на възрасто-структурираните системи. Нека t да означава “време”, a да означава “възраст” и $S(t, a)$ да е броят на индивидите в някаква група, които са на възраст a в момента t . Нека Δt да е достатъчно малък интервал от време с начало в момента t , през който към групата се присъединяват индивиди със скорост $in(t)$, а я напускат индивиди със скорост $out(t)$ (считаме, че Δt е толкова малък, че $in(\cdot)$ и $out(\cdot)$ са постоянни в него и са съответно равни на $in(t)$ и $out(t)$). В момента $t + \Delta t$ броят на индивидите в същата група е $S(t + \Delta t, a + \Delta a)$ (те междувременно са остарели с $\Delta t = \Delta a$). Така получаваме

$$S(t + \Delta t, a + \Delta a) - S(t, a) = in(t)\Delta t - out(t)\Delta t.$$

Като разделим на Δt и оставим Δt да клони към нула, получаваме диференциалното уравнение

$$S'_t(t, a) + S'_a(t, a) = in(t) - out(t), \quad (1)$$

което задава динамиката на броя на индивидите в разглежданата група.

В № 7, разд. 1 е формулиран и изучен модел на оптимално противодействие на разпространението на заболяването СПИН. Мотив за това изследване е разпространението на болестта в африканските страни, намиращи се на юг от Сахара (Ботсвана е типичен пример). Противодействието се състои от превенция (напр. - образователни програми) и лечение на носителите на вируса ХИВ (вируса на човешката имунонедостатъчност). Разходите за тези два типа противодействие са управленията във формулираната задача за оптимално управление. В нея управляемата динамична система се състои от незаразени хора, характеризиращи се със своята възраст във всеки един момент, и от носители на ХИВ, характеризиращи се със своята възраст във всеки един момент и с продължителността на периода, в който са вирусоносители до същия този момент, т.е. хетерогенността на системата се описва с два параметъра. Незаразените се различават по момента на тяхното раждане, а заразените – по момента на тяхното раждане и по момента на заразяване. Основното заключение от направените на базата на модела числени експерименти е, че разходите за лечение трябва да бъдат съпътствани от адекватни (достатъчно големи) разходи за превенция, в противен случай загубите за обществото ще са по-големи в дългосрочна перспектива. За целите на изследването беше доказан принцип за максимума на Понтрягин за обща система, структурирана по възраст и по продължителност (Теорема 2 на стр. 13 в № 7, разд. 1), като доказателството е сходно с това на основния резултат от [2].

В № 11, разд. 1 е формулиран и изучен модел на оптимална образователна политика на макро ниво, като работната сила (обектът на образователната политика) е хетерогенна по отношение на своята възраст и на работните си умения (квалификация). Различията в квалификацията на работещите са представени в модела чрез разделянето на последните на две групи – ниско квалифицирани и високо квалифицирани. Броят на работещите във всяка от двете групи удовлетворява съответно уравнение от типа (1), като се приема, че новопостъпващите работещи (на възраст около 20 г.) са (почти изцяло) ниско квалифицирани, а впоследствие някои от тях стават високо квалифицирани в резултат на правителствените инвестиции в човешки капитал (образование). Параметърът на хетерогенност в настоящия модел, т.е. това, по което различаваме работещите, е моментът на започване на работа за всеки от тях. Целта на правителството е да максимизира разликата между приходите от производство и разходите за образование. В рамките на този модел се изучава оптималната образователна политика в контекста на изменения в търсенето на работна сила (представени чрез еластичността по заместване между различните възрастови и квалификационни групи) и в предлагането на работна сила (представени чрез различни демографски сценарии). Показано е, че в случая на идеална заменяемост (perfect substitutability) по възраст и квалификация оптималната образователна политика не зависи от промени в демографската картина (Твърдение 2 на стр. 167), докато в случая на неидеална заменяемост (nonperfect substitutability) демографските процеси влияят на тази политика (Твърдение 4 на стр. 174). Един от резултатите във втория случай (на неидеална заменяемост) е приспособяването на оптималната образователна политика още преди настъпването на демографската промяна, в случай че такава промяна се очаква (Твърдение 5 на стр. 177). Основният математически резултат, използван за анализа в тази статия е принципът за максимума на Понтрягин, доказан в [2].

В статиите с номера 9 и 13 от раздел I, както и в № 5, разд. II, се разглеждат задачи за оптимално управление на хетерогенни системи, чието изменение (динамика) протича в област, зависеща от управлението. В този модел едномерният параметър q на хетерогенност има смисъл на отделна налична технология, като колкото по-голямо е q , толкова по-“добра” е технологията. В началния момент $t = 0$ са налични технологиите от интервала $[0, Q_0]$ ($Q_0 > 0$ е дадено число). За $t > 0$ наличните технологии образуват интервал $[0, Q(t)]$ като функцията $Q(\cdot)$ (чиято графика е част от границата на областта, в която разглеждаме динамиката на системата) зависи от инвестициите в изследователска дейност, които са управление.

Зависимостта на областта от управлението поражда известни трудности от математическо естество. Оказва се, че целевият функционал J , съпоставящ на управление $u \in L_\infty$ число $J(u)$, не е диференцируем, дори само по направление. Два примера за това са дадени в точка 5 на № 9, разд. I. В първия от тях недиференцируемостта (по направление $v \equiv \text{const}$) може да бъде отстранена чрез предефиниране на u (в което

диференцираме) върху частта от дефиниционната му област, намираща се над графиката на функцията $Q(\cdot)$. Във втория пример това не може да се направи. Причината е, че u (в което диференцираме) е прекъснато отляво по q в $Q(t)$ за всяко t от разглеждания времеви интервал. Такова евентуално свойство на оптималното управление е в основата на факта, че при извеждането на необходимо условие за оптималност от типа на принципа за максимума на Понтрягин (Теорема 1 на стр. 295 в № 9, разд. I), едното от спрегнатите “уравнения” се оказва включване ((14) на стр. 294 в № 9, разд. I), а самото условие за максимума - условие от типа “min-max” ((21) на стр. 296 в № 9, разд. I). Ако *априори* се предположи, че оптималното управление е непрекъснато отляво по q в $Q(t)$ за почти всяко t от разглеждания времеви интервал (такива управления наричаме “регулярни”), принципът за максимума на Понтрягин придобива обичайната си форма (Теорема 2 на стр. 297 в № 9, разд. I).

В статиите № 13, разд. I и № 5, разд. II се разглеждат модели, които са частни случаи на въведения в № 9, разд. I модел, и за които може да се докаже *априори* (т.е. само въз основа на свойствата на данните в модела), че оптималното управление е регулярно: Твърдение 2 в точка 4 на № 13, разд. I и Твърдение 1 в точка 3 на № 5, разд. II. В № 13, разд. I се доказва съществуване на оптимално управление: Твърдение 1 в точка 3. Специфичното в тези два модела, което позволява априорното установяване на регулярност на оптималното управление, са видът на уравнението за разпределената фазова променлива ((4) в № 13, разд. I и (4) в № 5, разд. II) и участието на управлението $u(\cdot, \cdot)$ отделно от фазовите променливи в интегранда на целевия функционал. Въпросните две особености не възпрепятстват използването на двата модела в моделирането на породилите ги икономически явления.

В статиите № 12, разд. I и № 4, разд. II се разглежда модел на ограничаване на замърсяването на околната среда от индустрията. Производството се извършва от машини, работещи по различни технологии, като всяка технология се идентифицира с момента τ на нейното създаване (τ е параметърът на хетерогенност тук). Една машина (единица капитал) от технологията τ произвежда $f(\tau)$ количество продукция и емитира $g(\tau)$ количество замърсители в околната среда. Предполага се, че $f(\cdot)$ е растяща функция, а $g(\cdot)$ е намаляваща, т.е. по-новите технологии са по-производителни и по-малко замърсяващи. Във всеки момент t всеки производител трябва да заплати цена (такса) $v(t)$ за единица вредни емисии. Целта на производството е да се максимизира разликата между приходите от производство и разходите за инвестиции и за такси за замърсяване. Управленията са две: инвестициите в машини и решението каква част от наличните машини да произвеждат във всеки един момент. Получената задача (от гледна точка на индустрията) е за оптимално управление на хетерогенна система, но тъй като динамиките на количествата машини от различните технологии не са свързани помежду си, тя се разпада на отделни задачи за всяка една от технологиите. Така имаме за всяко τ по една задача за оптимално управление на система, описвана с ОДУ. Моделът се разширява със задаването на “таван” $E(t)$ на

емисиите за всяко $t > 0$. Поставя се задачата да се определи $v(t)$ за всяко $t > 0$ така, че вредните емисии да са равни на $E(t)$ за всяко $t > 0$, която води до интегрално уравнение на Фредхолм от първи род за $v(\cdot)$. Така формулирана, тази задача се интерпретира като пазарно определяне на цената $v(\cdot)$ чрез търг. Тъй като уравнението на Фредхолм от първи род е некоректно, предложен е метод за неговото регуляризиране, който кореспондира на реално изпълнима процедура в моделираната ситуация – “таваните” на вредните емисии се определят за определени интервали от време, така, както в Протокола от Киото. Извършените числени експерименти демонстрират случаи на нефункциониране на пазара (market failure: $v(t) < 0$ за някои стойности на t – фиг. 3 на стр. 157 в № 4, разд. II), както и че увеличаване на продължителността на интервалите на задаване на “таваните” на вредните емисии намаляват пазарната волатилност и отстраняват периодите на нефункциониране на пазара – фиг. 2 на стр. 157 в № 4, разд. II и фиг. 4 на стр. 158 в № 4, разд. II. Проблемът за разпределението на свободни квоти за вредни емисии между различните технологии е обект на Твърдения 1 и 2 и Следствие 1 съответно на стр. 220, стр. 221 и стр. 223 в № 12, разд. I.

В № 10, разд. I е доказан принцип за максимума на Понтрягин за задача на оптималното управление в безкрайномерно фазово пространство с терминални фазови ограничения. Резултатът обобщава Теорема 1.6 от Глава 4 на стр. 135 в [3]. Обобщението се състои в отслабване на едно от двете основни предположения в тази теорема и в отпадането на второто основно предположение. Предположението, отслабено в настоящата статия, присъства в литературата, посветена на оптимално управление в безкрайномерни пространства повече от две десетилетия. То се състои в изискването за крайна коразмерност във фазовото пространство на “целта” (множеството, задаващо терминалните фазови ограничения) или на някое друго множество, тясно свързано с него. В [3] въпросното множество е алгебричната разлика на множеството от вариациите на фазовата траектория в края на времевия интервал (получени в резултат на вариране на управлението) и “целта”. Дефиницията за крайна коразмерност на множество включва изискването неговата затворена изпъкнала обвивка да има непразна вътрешност в афинната му затворена обвивка. В № 10, разд. I това изискване (за алгебричната разлика на множеството от вариациите на фазовата траектория в края на времевия интервал и “целта”) е запазено (съответните множества са наречени “квазисолидни”), като е отпаднало изискването за крайна коразмерност на афинната затворена обвивка. Второто основно предположение в Теорема 1.6 от Глава 4 в [3] е строгата изпъкналост на спрегнатото на фазовото пространство. В доказани в № 10, разд. I резултат това предположение не присъства.

Мотивацията за тази работа е получаването на необходими условия за оптималност от Понтрягинов тип за задачи за оптимално управление на възрастово-структурирани системи, в които има поточкови терминални ограничения за решенията на уравненията от типа (1) в тях. Следите на тези решения в края на времевия или в края на възрастовия интервал

са ограничени измерими функции. В примера, представен в последната секция на № 10, разд. I и илюстриращ абстрактния резултат, се показва, че алгебричната разлика на множеството от вариациите на фазовата траектория в края на времевия интервал и “целта” съдържа отрицателните измерими функции. За да е изпълнено предположението за квази-солидност, трябва фазовото пространство да е такова, че множеството от отрицателните измерими функции да има непразна вътрешност в него. Между L_p -пространствата, $p \geq 1$, само L_∞ е такова и неговото спрегнато не е строго изпъкнало. Последният факт наложи отпадането на предположението за строга изпъкналост на спрегнатото на фазовото пространство.

В № 8, разд. I се изучава съществуване на решение на диференциални включвания с полу-непрекъснати отгоре десни страни, мотивацията са добре известните примери на Филиппов. Дефинирано е свойството “сблъскване върху множество”. Когато допустимите скорости “се сблъскват” върху множество от точки на прекъснатост на дясната страна, при допълнително условие може да се докаже съществуване на ε -решение на диференциалното включване (дясната страна се замества с нейната ε -околност). Това допълнително условие е следното: ако скоростите “се сблъскват” върху множество S , то съществуват допирателни скорости в гъсто подмножество на S (от тангенциалния конус на Кларк към S в точките на това подмножество). При допълнителни предположения може да се направи граничен преход при $\varepsilon \rightarrow 0$ и да се получи решение на първоначално разглежданото диференциално включване.

В № 3, разд. II са представени модели на евакуационни дейности, единият от които е в дискретно време, а останалите три – в непрекъснато. Дискретният модел води до задача на линейното оптимизиране, а непрекъснатите – до задачи на оптималното управление. Мотивът за тяхното създаване е да бъде дискутирано със специалисти от съответната област доколко достоверно е да се очаква, че може да се събере информация за параметрите, предвидени да бъдат данни в тези модели.

Литература

- [1] Brokate, M., Pontryagin's principle for control problems in age-dependent population dynamics, J. Math. Biology, 23 (1985), 75–101
- [2] Feichtinger, G., G. Tragler and V. Veliov, Optimality conditions for age-structured control systems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 288 (2003), 47–68
- [3] Li, X.J., J. Yong, Optimal control theory for infinite dimensional systems, Basel, Birkhäuser, 1994.

21 март 2014 г.
гр. София

подпис:


Цветомир Цачев