Авторска справка

за приносите в научните трудове
на доц. д-р Величка Милушева,
представени за участие в конкурс за професор
в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика,
професионално направление 4.5. Математика,
научна специалност "Геометрия и топология" (Диференциална геометрия),
обявен в Държавен вестник, бр. 18 / 27.02.2018 г.

За участие в конкурса са представени 22 научни публикации, от които 16 са в списания с импакт фактор. Всички представени публикации са след придобиване на научното звание "доцент" по научната специалност 01.01.06 "Геометрия и Топология" от ВАК. Две от публикациите са самостоятелни, а останалите са в съавторство.

Представените за участие в конкурса статии могат да се разделят на следните четири групи според разглежданите в тях проблеми:

- Локална теория на повърхнини в 4-мерно Евклидово или псевдо-Евклидово пространство [статии 22, 20, 18, 6].
- Повърхнини с нулев или изотропен вектор на средната кривина [статии 19, 17, 16, 15, 9].
- Повърхнини от ротационен тип [статии 21, 13, 12, 8, 4].
- Повърхнини, лежащи върху ротационни хиперповърхнини (меридианни повърхнини) [статии 14, 11, 10, 7, 5, 3, 2, 1].

Локална теория на повърхнини в 4-мерно Евклидово или псевдо-Евклидово пространство

Една от основните задачи в съвременната диференциална геометрия на повърхнините и хиперповърхнините в стандартни моделни пространства, като Евклидовото пространство $\mathbb{E}^n$, пространството на Минковски $\mathbb{E}^n_1$, или псевдо-Евклидовото пространство $\mathbb{E}^n_s$ с индекс $s > 1$, е изследването на основните инварианти, които ги характеризират. Разработването на теорията на повърхнините в 4-мерното Евклидово пространство $\mathbb{E}^4$, както и в 4-мерното пространство на Минковски $\mathbb{E}^4_1$, е база за разработването на общата теория на 2-мерни повърхнини в $\mathbb{E}^n$ и в $\mathbb{E}^n_1$.

Изучаването на локалната теория на повърхнините в 4-мерното Евклидово пространство $\mathbb{E}^4$ на базата на геометрично изображение (от тип изображение на Вайнгартен) и въвеждане на главни тангенти по аналогия с класическата теория на повърхнините в $\mathbb{R}^3$ започва в статията [G. Ganchev, V. Milousheva, *On the Theory of Surfaces in the Four-dimensional Euclidean Space*, Kodai Math. J., 31 (2008), 183–198] [1]. В допирателното пространство в произволна точка на повърхнина M^2 в $\mathbb{E}^4$ е дефинирано геометрично линейно изображение γ, което е аналог на изображението на Вайнгартен в теорията на повърхнините в $\mathbb{R}^3$. То поражда две инвариантни функции $k = \det \gamma$ и $\varkappa = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \gamma$, които са инвариантни при движение и при смяна на параметрите върху повърхнината. Знакът на функцията k е инвариантен както при движение, така и при отражение в $\mathbb{E}^4$, докато знакът на $\varkappa$ е инвариантен при движение в $\mathbb{E}^4$, но се сменя при отражение спрямо хиперравнина. Изображението γ поражда симетрична билинейна форма II в тангенциалното пространство на M^2. Аналогична билинейна форма, определена с точност до множител, е въведена от C. Burstin и W. Mayer за двумерна повърхнина в 4-мерно афинно пространство $\mathbb{A}^4$ [Burstin, C., Mayer, W., *Über affine Geometrie XLI: Die Geometrie zweifach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten F_2 im affinen R_4*, M. Z., 26 (1927), 373–407]. Като се използва и метриката върху повърхнина M^2 в Евклидовото пространство $\mathbb{E}^4$ с помощта на формата II в [29] са дефинирани геометрични обекти, като спрегнати тангенти, асимптотични тангенти и главни тангенти в точка от повърхнината. Въвеждайки параметризация спрямо главните линии на повърхнина без минимални точки, е намерен геометричен придружаващ репер във всяка точка на такава повърхнина и са изведени деривационни формули от тип класическите формули на Френе за криви в n-мерно Евклидово пространство.

Разработването на локалната теория на повърхнините в $\mathbb{E}^4$ продължава в статия [22], където на базата на главните тангенти върху повърхнина без минимални точки и въведения геометричен придружаващ репер са получени 8 инвариантни функции γ_1, γ_2, ν_1, ν_2, λ, μ, β_1, β_2 на повърхнината, които се определят геометрично от вектора на средната кривина и главните направления. Функциите са инвариантни с точност до смяна на параметризацията, запазваща главните направления. Основните класове повърхнини в $\mathbb{E}^4$ се характеризират чрез условия върхи тези инварианти: минималните повърхнини се характеризират с равенството $\nu_1 + \nu_2 = 0$, повърхнините с плоска нормална свързаност се задават с $\nu_1 = \nu_2$, повърхнините, за които присъединеното векторно поле на средна кривина е нула (т.н. Chen-повърхнини) се определят с условието $\lambda = 0$. Доказана е фундаментална теорема за съществуване и

[1] Статията не е включена в списъка на публикациите за участие в конкурса, тъй като е използвана в конкурс за придобиване на научното звание "доцент". Статията е под номер 29 в общия списък с публикации.

единственост, която гласи, че осемте инвариантни функции γ_1, γ_2, ν_1, ν_2, λ, μ, β_1, β_2 определят еднозначно повърхнината с точност до движение в $\mathbb{E}^4$.

Също така, в статия [22] са характеризирани минималните повърхнини и повърхнините с плоска нормална свързаност чрез условия върху две геометрични фигури: елипсата на нормална кривина, която е геометрична фигура в нормалната равнина в точка от повърхнината, и тангенциалната индикатриса (аналогична на индикатрисата на Дюпен в теорията на повърхнините в $\mathbb{R}^3$), която е крива от втора степен в тангенциалната равнина, дефинирана чрез главните нормални кривини.

Като приложение на разработената теория е дадена геометрична конструкция на семейство повърхнини с плоска нормална свързаност, които са повърхнини лежащи върху ротационна хиперповърхнина в $\mathbb{E}^4$. Тези повърхнини са наречени *меридианни*. Намерени са всички меридианни повърхнини с постоянна Гаусова кривина, с постоянна средна кривина и с постоянна инварианта k.

Този подход за изучаване на повърхнини в Евклидовото пространство $\mathbb{E}^4$ може да бъде приложен и за пространственоподобни повърхнини в 4-мерното пространство на Минковски $\mathbb{E}^4_1$. Статия [20] е посветена на разработване на локалната теория на пространственоподобните повърхнини в $\mathbb{E}^4_1$ и изучаване на техните инварианти. Въведена е инварианта ζ_{g_1,g_2} на двойка тангенти g_1, g_2 в точка от пространственоподобна повърхнина M^2 в $\mathbb{E}^4_1$ чрез коефициентите на първата основна форма и скаларните произведения на вторите производни на локална параметризация с векторите от ортонормиран нормален репер. Показано е, че тази инварианта не зависи от локалната параметризация на повърхнината, а само от нейната ориентация, като при смяна на ориентацията на тангенциалната или нормалната равнина тя си сменя знака. Дефинирано е понятието спрегнати тангенти на повърхнината чрез условието $\zeta_{g_1,g_2} = 0$. Въвеждането на инвариантата ζ_{g_1,g_2} е еквивалентно на въвеждане на втора основна форма II на пространственоподобна повърхнина в $\mathbb{E}^4_1$, аналогично на въвеждането на такава форма за повърхнини в $\mathbb{E}^4$, направено в статии [29] и [22]. Спрягането, дефинирано чрез инвариантата ζ_{g_1,g_2}, съвпада със спрягането, породено от втората основна форма II на повърхнината.

С помощта на инвариантата ζ_{g_1,g_2} са въведени понятията нормална кривина ν_g и геодезична торзия α_g на тангента g. Инвариантите ν_g и α_g се изразяват чрез коефициентите на първата и втората основна форма на повърхнината по същия начин, както нормалната кривина и геодезичната торзия в теорията на повърхнините в $\mathbb{R}^3$, поради което е използвана същата терминология. Асимптотичните тангенти на повърхнина в $\mathbb{E}^4_1$ се характеризират с условието $\nu_g = 0$, а главните тангенти се характеризират с $\alpha_g = 0$.

Дефинирано е линейно изображение γ от тип изображение на Вайнгартен, което се поражда от втората основна форма на повърхнината, и е въведен геометричен придружаващ репер, определен от вектора на средната кривина и главните направления в точка от повърхнината. С помощта на въведения придружаващ репер са намерени 8 инвариантни функции γ_1, γ_2, ν_1, ν_2, λ, μ, β_1, β_2 и е получена характеризация на основни класове пространственоподобни повърхнини в $\mathbb{E}^4_1$ чрез условия върху тези инварианти. Минималните повърхнини и повърхнините с плоска нормална свързаност са характеризирани и чрез условия върху две геометрични фигури: елипсата на нормална кривина и тангенциалната индикатриса.

Доказана е фундаментална теорема за класа на пространственоподобните повърхнини, за които векторът на средната кривина във всяка точка е ненулев пространственоподобен (или времеподобен) вектор, която гласи, че всяка такава повърхнина се определя еднозначно с точност до движение в $\mathbb{E}^4_1$ от осемте инвариантни функции γ_1, γ_2, ν_1, ν_2, λ, μ, β_1, β_2. Конструиран е клас пространственоподобни повърхнини от ротационен тип в $\mathbb{E}^4_1$, които са аналог на обобщените ротационни повърхнини на C. Moore в $\mathbb{E}^4$, и са намерени техните инвариантни функции.

Статия [18] има обзорен характер и представя подходът към изучаване на повърхнините в 4-мерно Евклидово пространство или пространство на Минковски, основаващ се на въвеждане на геометрично изображение от тип изображение на Вайнгартен в допирателното пространство на повърхнина в $\mathbb{E}^4$ или $\mathbb{E}^4_1$ и изучаване на повърхнината спрямо геометрично въведен придружаващ репер. Представени са резултати от статии [22] и [20], както и локалната теория на пространственоподобни повърхнини с изотропен вектор на средната кривина в $\mathbb{E}^4_1$, която е разработена в статия [19]. Разгледани са три типа геометрично конструирани класове повърхнини в $\mathbb{E}^4$ и $\mathbb{E}^4_1$: ротационни повърхнини, обобщени ротационни повърхнини и меридианни повърхнини, които ще бъдат коментирани по-долу в авторската справка.

Напоследък интезивно се изучават повърхнини в псевдо-Евклидови пространства с неутрална метрика, тъй като те намират интерпретация в математическата физика. Използвайки идеята от локалната теория на повърхнините в 4-мерното пространство на Минковски, в статия [6] е разработена локална теория на Лоренцовите повърхнини в четиримерното псевдо-Евклидово пространство $\mathbb{E}^4_2$ със сигнатура (2,2). За основния клас Лоренцови повърхнини (с диагонализируемо изображение на Вайнгартен) са дефинирани главни линии, на базата на които е въведен геометрично определен придружаващ репер. В случаите, когато векторното поле на средната кривина е пространственоподобно (или времеподобно) във всяка точка, е намерена система от 8 инвариантни функции. Доказана е фундаментална теорема за съществуване и единственост, която гласи, че тези инвариантни функции определят повърхнината с точност до движение в $\mathbb{E}^4_2$. Характеризирани са някои основни класове повърхнини в $\mathbb{E}^4_2$ чрез техните инвариантни функции, а именно: плоски повърхнини, повърхнини с постоянна ненулева Гаусова кривина, повърхнини с плоска нормална свързаност, Chen-повърхнини, повърхнини с паралелно векторно поле на средната кривина и повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина.

Специално внимание е отделено на класа на Лоренцовите повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, за които са въведени канонични параметри, позволяващи броят на функциите и съответно на частните диференциални уравнения, които определят повърхнината, да бъде редуциран до три. Теоремата за съществуване и единственост за този клас повърхнини гласи, че всяка Лоренцова повърхнина с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина се определя от три функции $\lambda(u,v)$, $\mu(u,v)$ и $\nu(u,v)$, удовлетворяващи следната система от три частни диференциални уравнения:

$$\begin{aligned}
&\nu_u = -\lambda_v + \lambda(\ln|\mu|)_v;\\
&\nu_v = \lambda_u - \lambda(\ln|\mu|)_u;\\
&\varepsilon(\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2) = \frac{1}{2}|\mu|\Delta^h \ln|\mu|; \quad \varepsilon = \pm 1,
\end{aligned}$$

където $\Delta^h = \dfrac{\partial^2}{\partial u^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial v^2}$ е хиперболичният оператор на Лаплас. При $\varepsilon = 1$ съответната повърхнина е с пространственоподобно векторно поле на средната кривина, а при $\varepsilon = -1$ повърхнината е с времеподобно векторно поле на средната кривина.

Повърхнини с нулев или изотропен вектор на средната кривина

Основен клас повърхнини както в Евклидово така и в псевдо-Евклидови пространства е класът на повърхнините с нулев вектор на средната кривина (минималните повърхнини). Основен проблем в теорията на минималните повърхнини е въвеждането на геометричен придружаващ репер и канонични параметри. Въвеждането на такива параметри позволява да се минимизира броят на функциите и броят на частните диференциални уравнения, които определят повърхнината с точност до движение. В статията [Tribuzy R., Guadalupe I., *Minimal immersions of surfaces into 4-dimensional space forms*, Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova 73 (1985), 1–13] е решен този проблем за минималните повърхнини в 4-мерното Евклидово пространство $\mathbb{E}^4$, а за пространственоподобните повърхнини в пространството на Минковски $\mathbb{E}^4_1$ този проблем е решен в [Alías L., Palmer B., *Curvature properties of zero mean curvature surfaces in four-dimensional Lorenzian space forms*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 124 (1998), 315–327].

В статия [17] от приложения списък е разработена локална теория на времеподобните повърхнини с нулев вектор на средната кривина в 4-мерното пространство на Минковски $\mathbb{E}^4_1$ на базата на въвеждане на каноничен придружаващ репер и канонични параметри. За всяка времеподобна повърхнина с нулев вектор на средната кривина, която няма инфлексни точки, са въведени специални изотермични параметри (наречени канонични) и е конструиран каноничен придружаващ репер във всяка точка от повърхнината. Доказана е теорема за съществуване и единственост за класа на времеподобните повърхнини с нулев вектор на средната кривина без инфлексни точки, която гласи че всяка такава повърхнина се определя еднозначно с точност до движение в $\mathbb{E}^4_1$ от две функции $\mu(u,v)$ и $\nu(u,v)$, удовлетворяващи следната система от две частни диференциални уравнения:

$$\begin{aligned}
&(\mu^2+\nu^2)^{\frac{1}{2}}\,\Delta^h \ln(\mu^2+\nu^2)^{\frac{1}{4}} = \nu^2-\mu^2;\\
&(\mu^2+\nu^2)^{\frac{1}{2}}\,\Delta^h \arctan\frac{\mu}{\nu} = 2\nu\mu.
\end{aligned}$$

Примери за решения на горната система диференциални уравнения са намерени в класа на времеподобните обобщени ротационни повърхнини (от типа на C. Moore).

Обобщение на минималните повърхнини в 4-мерното пространство на Минковски $\mathbb{E}^4_1$ са т.нар. "marginally trapped" повърхнини, които са обект на активно проучване през последните няколко години, тъй като играят важна роля в теорията на относителността и теорията на черните дупки. Понятието "trapped" повърхнина е въведено от Roger Penrose в [Penrose, R., *Gravitational collapse and space-time singularities*, Phys. Rev. Lett. 14 (1965), 57–59]. Основен проблем при изучаването на черните дупки е описанието на повърхнината, която разделя семейството на "trapped" повърхнините от семейството на "untrapped" повърхнините. От математическа гледна точка "marginally trapped" повърхнините разделят семейството на повърхнините с времеподобен вектор на средната кривина от семейството на повърхнините с пространственоподобен вектор на средната кривина. Една двумерна повърхнина в пространство на Минковски се нарича *marginally trapped* [2], ако е пространственоподобна и във всяка нейна точка векторното поле на средната кривина е изотропно (светлинноподобно).

Използвайки идеите от разработения в [20] подход за изучаване на пространственоподобни повърхнини в $\mathbb{E}^4_1$, за които векторът на средна кривина във всяка точка е ненулев пространственоподобен (или времеподобен) вектор, в статия [19] се изучават marginally trapped повърхнини в $\mathbb{E}^4_1$ като се въвежда геометрично определен придружаващ репер, определен от векторното поле на средната кривина и главните направления на повърхнината. Получена е система от инвариантни функции и е

[2] Тъй като не е намерен добър превод на понятието на български език, авторът предпочита да го употребява на английски.

доказана фундаментална теорема за съществуване и единственост, която гласи, че тази система от функции определя еднозначно повърхнината с точност до движение в $\mathbb{E}^4_1$. Като приложение на разработената теория е конструиран един клас marginally trapped повърхнини, които са 1-параметрични системи от меридиани на ротационна хиперповърхнина с времеподобна или пространственоподобна ос (наречени съответно меридианни повърхнини от елиптичен или хиперболичен тип) и са намерени техните инвариантни функции.

Идеята за конструиране на marginally trapped повърхнини в $\mathbb{E}^4_1$, които са 1-параметрични системи от меридиани на ротационна хиперповърхнина е продължена в статия [15]. Разгледани са 2-мерни повърхнини, които са 1-параметрични системи от меридиани на ротационна хиперповърхнина със светлинноподобна ос и са наречени меридианни повърхнини от параболичен тип. Намерени са в експлицитен вид всички marginally trapped меридианни повърхнини от параболичен тип.

В статия [16] се изучават marginally trapped повърхнини в $\mathbb{E}^4_1$, за които Гаусовото изображение е поточково от тип 1, т.е. лапласианът ΔG на Гаусовото изображение G удовлетворява условието $\Delta G = \varphi(G + C)$, където φ е ненулева функция върху повърхнината, а C е константен 2-вектор. Като се използва разработения подход за изучаване на marginally trapped повърхнините чрез въвеждане на геометрично определен придружаващ репер и системата от инвариантни функции, получена в [19], е изразен лапласианът на Гаусовото изображение чрез тези инвариантни функции. Намерени са необходими и достатъчни условия, при които една marginally trapped повърхнина има Гаусово изображение, което е поточково от тип 1. Основният резултат гласи, че една marginally trapped повърхнина без изродени точки има Гаусово изображение, което е поточково от тип 1, тогава и само тогава когато повърхнината има паралелно векторно поле на средната кривина. Този резултат, заедно с класификацията на marginally trapped повърхнините с паралелно векторно поле на средната кривина, направена в [Chen, B.-Y., Van der Veken, J., *Classification of marginally trapped surfaces with parallel mean curvature vector in Lorenzian space forms*, Houston J. Math. 36 (2010), 421–449], дава пълно описание на всички marginally trapped повърхнини без изродени точки, за които Гаусовото изображение е поточково от тип 1. Marginally trapped повърхнините, които се състоят от изродени точки и за които Гаусовото изображение е поточково от тип 1, са описани в [Turgay, N. C., *On the marginally trapped surfaces in 4-dimensional space-times with finite type Gauss map*, Gen. Relativ. Grav. (2014) 46:1621].

В псевдо-Евклидовото пространство с неутрална метрика $\mathbb{E}^4_2$ аналог на marginally trapped повърхнините са т.нар. квази-минимални повърхнини. Това са Лоренцови повърхнини, за които векторът на средната кривина е изотропен (светлинноподобен) във всяка точка. В статия [9] се разглеждат квази-минимални Лоренцови повърхнини в $\mathbb{E}^4_2$ като се изследва Гаусовото им изображение. Описани са всички квази-минимални повърхнини с хармонично Гаусово изображение, като е доказано, че всяка такава повърхнина е плоска повърхнина с паралелно векторно поле на средната кривина. Намерени са в експлицитен вид всички плоски квази-минимални повърхнини, за които Гаусовото изображение е поточково от тип 1. Доказано е, че неплоска квази-минимална повърхнина с плоска нормална свързаност има Гаусово изображение поточково от тип 1, тогава и само тогава когато има паралелно векторно поле на средната кривина. Получена е пълна класификация на квази-минималните Лоренцови повърхнини с неплоска нормална свързаност и Гаусово изображение поточково от тип 1. Даден е в явен вид пример на квази-минимална повърхнина с неплоска нормална свързаност и Гаусово изображение поточково от тип 1, като това също е пример на квази-минимална повърхнина с непаралелно векторно поле на средната кривина. Заслужава да се отбележи, че докато в пространството на Минковски $\mathbb{E}^4_1$ всяка marginally trapped повърхнина, за която Гаусовото изображение е поточково от тип 1, има плоска нормална свързаност, в псевдо-Евклидовото пространство $\mathbb{E}^4_2$ съществуват квази-минимални повърхнини с неплоска нормална свързаност и Гаусово изображение поточково от тип 1.

Повърхнини от ротационен тип

Богат източник на примери както на минимални и квази-минимални повърхнини, така и на други важни класове повърхнини, като например плоски повърхнини, повърхнини с плоска нормална свързаност, с постоянна Гаусова кривина, с постоянна средна кривина и др, са ротационните и обобщените ротационни повърхнини.

В статия [21] се разглеждат пространственоподобни ротационни повърхнини от елиптичен и хиперболичен тип в 4-мерното пространство на Минковски $\mathbb{E}^4_1$. Ротационна повърхнина от хиперболичен тип е орбитата на пространственоподобна крива, подложена на ортогонална трансформация в $\mathbb{E}^4_1$, която запазва поточково пространственоподобна 2-мерна равнина. Орбитата на пространственоподобна крива под действието на ортогонална трансформация, запазваща поточково времеподобна 2-мерна равнина, е ротационна повърхнина от елиптичен тип. Намерени са всички пространственоподобни ротационни повърхнини от двата типа, за които присъединеното векторно поле на средна кривина е нула (т.н. Chen-повърхнини). Описани са и всички ротационни Chen-повърхнини в Евклидовото пространство $\mathbb{E}^4$.

В статии [13] и [8] се изучават Лоренцови ротационни повърхнини в псевдо-Евклидовото пространство $\mathbb{E}^4_2$. В зависимост от типа на ротационната ос в $\mathbb{E}^4_2$ са разгледани три типа Лоренцови ротационни повърхнини с 2-мерна ос - от елиптичен, хиперболичен и параболичен тип. В [13] е получена класификация на квазиминималните ротационни повърхнини от трите типа. Разглежданията са мотивирани от поредица от три статии на S. Haesen и M. Ortega [Haesen, S., Ortega, M., *Boost invariant marginally trapped surfaces in Minkowski 4-space*, Classical Quantum Gravity 24, no. 22 (2007), 5441–5452; Haesen, S., Ortega, M., *Marginally trapped surfaces in Minkowski 4-space invariant under a rotational subgroup of the Lorentz group*, Gen. Relativity Gravitation 41, no. 8 (2009), 1819–1834; Haesen, S., Ortega, M., *Screw invariant marginally trapped surfaces in Minkowski 4-space*, J. Math. Anal. Appl. 355, no. 2 (2009), 639–648], в които е дадена класификация на marginally trapped ротационни повърхнини в пространството на Минковски $\mathbb{E}^4_1$. В статия [8] е дадена класификация на Лоренцовите ротационни повърхнини от елиптичен, хиперболичен и параболичен тип с постоянна (ненулева) средна кривина.

Освен ротационните повърхнини с двумерна ос, в 4-мерно Евклидово или псевдо-Евклидово пространство могат да се разглеждат и така наречените *обобщени ротационни повърхнини*. Обобщените ротационни повърхнини в Евклидовото пространство $\mathbb{E}^4$ са въведени от C. Moore [Moore C., *Surfaces of rotation in a space of four dimensions*, Ann. of Math., 2nd Ser. 21 (1919), no. 2, 81–93]. Дефиниция от типа на C. Moore на пространственоподобни обобщени ротационни повърхнини в пространството на Минковски $\mathbb{E}^4_1$ е дадена в статия [20]. Изучаването на пространственоподобни обобщени ротационни повърхнини в $\mathbb{E}^4_1$ продължава в статия [12], където са намерени в явен вид всички минимални обобщени ротационни повърхнини. Описани са всички плоски обобщени ротационни повърхнини и обобщените ротационни повърхнини с плоска нормална свързаност.

По аналогия с обобщените ротационни повърхнини в Евклидовото пространство $\mathbb{E}^4$ и в пространството на Минковски $\mathbb{E}^4_1$, в статия [4] са дефинирани Лоренцови обобщени ротационни повърхнини от елиптичен и хиперболичен тип в псевдо-Евклидовото пространство $\mathbb{E}^4_2$. Доказано е, че всяка обобщена ротационна повърхнина от елиптичен или хиперболичен тип е Chen-повърхнина (т.е. присъединеното векторно поле на средна кривина е нула). Намерени са в явен вид всички обобщени ротационни повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина. Описани са още три геометрични класа - класа на минималните обобщени ротационни повърхнини, класа на обобщените ротационни повърхнини с плоска нормална свързаност, както и класа на плоските обобщени ротационни повърхнини.

Повърхнини, лежащи върху ротационни хиперповърхнини (меридианни повърхнини)

Освен ротационните и обобщените ротационни повърхнини, друг геометрично конструиран клас повърхнини в 4-мерното Евклидово пространство $\mathbb{E}^4$ са т.н. меридианни повърхнини, дефинирани в [22]. Те са 1-параметрични системи от меридиани на ротационна хиперповърхнина. В статия [11] се изучават меридианни повърхнини в $\mathbb{E}^4$, като на базата на въведена параметризация спрямо главните линии са получени инвариантните им функции γ_1, γ_2, ν_1, ν_2, λ, μ, β_1, β_2. Описани са два класа меридианни повърхнини, зададени с условия върху техните инварианти, а именно: меридианните Chen-повърхнини, които се характеризират с условието $\lambda = 0$, и меридианните повърхнини с паралелен нормиран вектор на средната кривина, които се задават с равенствата $\beta_1 = \beta_2 = 0$.

В статия [14] се разглеждат меридианни повърхнини в $\mathbb{E}^4$, за които Гаусовото изображение е поточково от тип 1. Доказано е, че една меридианна повърхнина има хармонично Гаусово изображение, тогава и само тогава когато е част от равнина. В три теореми е дадена пълна класификация на меридианните повърхнини, за които Гаусовото изображение е поточково от тип 1.

В статии [7] и [10] се разглеждат пространственоподобни повърхнини в $\mathbb{E}^4_1$, които са 1-параметрични системи от меридиани на ротационна хиперповърхнина (наречени меридианни повърхнини). В $\mathbb{E}^4_1$ има три типа ротационни хиперповърхнини – с времеподобна, с пространственоподобна и с изотропна ос, които пораждат съответно меридианни повърхнини от елиптичен, хиперболичен и параболичен тип. Статия [7] е посветена на меридианните повърхнини от елиптичен и хиперболичен тип. За произволна меридианна повърхнина от елиптичен или хиперболичен тип е намерен геометричния придружаващ репер (в смисъла на статия [20]) и са получени инвариантните функции γ_1, γ_2, ν_1, ν_2, λ, μ, β_1, β_2. На базата на намерените инвариантни функции е получена класификация на следните класове меридианни повърхнини от елиптичен и хиперболичен тип: с постоянна Гаусова кривина, с постоянна средна кривина, Chen-повърхнините и повърхнините с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина.

В статия [10] се изучават меридианни повърхнини от параболичен тип като на базата на въведения геометричен придружаващ репер са намерени инвариантните им функции. Получена е класификация на меридианните повърхнини от параболичен тип от следните класове: с постоянна Гаусова кривина, с постоянна средна кривина, Chen-повърхнините и повърхнините с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина.

В статия [5] се изследва Гаусовото изображение на меридианни повърхнини от елиптичен и хиперболичен тип в $\mathbb{E}^4_1$. Намерени са всички меридианни повърхнини от елиптичен и хиперболичен тип с хармонично Гаусово изображение. Докато в Евклидовото пространство $\mathbb{E}^4$ всяка меридианна повърхнина с хармонично Гаусово изображение е част от равнина, то в пространството на Минковски $\mathbb{E}^4_1$ съществуват меридианни повърхнини (от хиперболичен тип), които имат хармонично Гаусово изображение и не са равнини. Получена е пълна класификация на меридианните повърхнини от елиптичен и хиперболичен тип, за които Гаусовото изображение е поточково от тип 1.

Идеята за изучаване на 1-параметрични системи от меридиани на ротационна хиперповърхнина е продължена и в 4-мерното псевдо-Евклидово пространство с неутрална метрика в статии [1], [2] и [3]. В $\mathbb{E}^4_2$ съществуват три типа ротационни хиперповърхнини, а именно: с времеподобна ос, с пространственоподобна ос и с изотропна ос. Върху всеки от тези три типа хиперповърхнини са конструирани Лоренцови повърхнини, които са 1-параметрични фамилии от меридиани на съответната ротационна хиперповърхнина и са наречени меридианни повърхнини в $\mathbb{E}^4_2$.

В статия [1] са описани всички минимални меридианни повърхнини (с нулев вектор на средната кривина) и е доказано, че те лежат в хиперравнини на $\mathbb{E}^4_2$. Получена е класификация на квази-минималните меридианни повърхнини (с изотропен вектор на средната кривина) и на меридианните повърхнини с ненулева постоянна средна кривина.

В статия [2] са разгледани меридианни повърхнини, лежащи върху ротационни хиперповърхнини с времеподобна или пространственоподобна ос. Получена е класификация на меридианните повърхнини с паралелен вектор на средната кривина, както и на меридианните повърхнини с паралелен нормиран вектор на средната кривина. Доказано е, че всяка меридианна повърхнина с паралелен вектор на средната кривина има постоянна средна кривина и лежи в хиперравнина на $\mathbb{E}^4_2$. В класа на меридианните повърхнини са намерени примери на Лоренцови повърхнини в $\mathbb{E}^4_2$, които имат паралелен нормиран вектор на средната кривина, но не и паралелен вектор на средната кривина.

В статия [3] са разгледани меридианни повърхнини, лежащи върху ротационна хиперповърхнина с изотропна ос, като е доказано, че всички такива повърхнини имат плоска нормална свързаност. Дадена е класификация на меридианните повърхнини с постоянна Гаусова кривина, на меридианните повърхнини с паралелен вектор на средната кривина, както и на меридианните повърхнини с паралелен нормиран вектор на средната кривина.

25 април 2018 г. Подпис: ....

/В. Милушева/