# РЕЦЕНЗИЯ

от чл. кор. проф. дмн Стефан Петров Иванов

по конкурс за заемане на академичната длъжност „професор“

към ИМИ – БАН по професионално направление 4.5 Математика,

научна специалност „Геометрия и Топология“ (Диференциална Геометрия)

обявен в ДВ брой 18 от 27.02.2018

Със заповед № 116 от 26.04.2018 г. на Директора на Института по математика и информатика при БАН съм определен за член на научното жури по конкурс за професор за нуждите на ИМИ-БАН по професионално направление 4.5 Математика, научна специалност „Геометрия и Топология“ (Диференциална Геометрия) обявен в ДВ брой 18 от 27.02.2018. С решение на научното жури по процедурата (Протокол № 1, 03.05.2018) съм избран да изготвя рецензия. Документи за участие в конкурса е подала доц. д-р Величка Василева Милушева от ИМИ- БАН.

1. **Общо описание на представените материали.**

За участие в обявения конкурс е подала документи единствен кандидат доц. д-р Величка Василева Милушева от ИМИ-БАН. Представеният от доц. Милушева комплект материали е в съответствие с Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и заемане на академични длъжности за развитие на академичния състав на ИМИ-БАН и включва следните документи:

- Молба за допускане до участие в конкурса;
- Европейски формат на автобиография;
- Диплома за висше образование с приложение (копие) – №122558;
- Диплома за образователна и научна степен „доктор” (копие) – №30839/28.08.2006;
- Свидетелство за научно звание „доцент” (копие) – №26780/20.01.2011;
- Удостоверение за трудов стаж от ИМИ-БАН, 194/11/04.2018;
- Удостоверение за идентичност на лица с различни имена;
- Препис-извлечение от протокола на НС на ИМИ-БАН;
- Общ списък на научните публикации;
- Списък на научните публикации, представени за участие в конкурса;
- Авторска справка за научните приносите в трудовете, представени за участие в конкурса;
- Държавен вестник с обявата на конкурса (копие);
- Документи за учебна работа:

- Справка за учебно-преподавателска работа;
- Списък на учебници и учебни помагала;
- Удостоверение за ръководство на докторанти;
- Справка за участие в научноизследователски проекти;
- Научни публикации, представени за участие в конкурса;
- Списък на цитирания на научни трудове.

Кандидатката доц. Милушева е приложила общо 22 научни статии (2 самостоятелни, 17 с един съавтор, от които 1 е в съавторство с успешно защитилата й докторантка, и 3 са с двама съавтори, от които 2 са в съавторство с докторантката й), съавтор е на 6 учебници и учебни пособия за студенти и 9 учебни пособия за ученици. Приемат се за рецензиране всички 22 научни статии, тъй като са след придобиване на научното звание доцент. От научните трудове 16 са в списания с IF като сумарният IF = 9.331.

Бележки и коментар по документите нямам.

**2. Кратки биографични данни за кандидатката:**

Доц. д-р Величка Милушева е родена през 1969 г. През периода 1988 – 1993 г. е студентка в СУ „Св. Климент Охридски", ФМИ, специалност „Математика", специализация „Геометрия" и получава магистърска степен. През 2006 г. защитава дисертация към ИМИ-БАН и придобива научната степен „доктор" по научна специалност 01.01.06 Геометрия и топология. От 1993 до 1997 г. е хоноруван асистент към ФМИ при СУ, а от 1996 до 2010 г. е последователно асистент, старши асистент, главен асистент към ВСУ „Любен Каравелов". През периода 2010 – 2017 г. е доцент към ВСУ „Любен Каравелов". През периода 2006 – 2011 е същевременно и научен сътрудник към ИМИ-БАН, а от 2011 е доцент към ИМИ-БАН, където работи и досега. Била е член на ФС на Строителен факултет, ВСУ „Л. Каравелов", Научен секретар на секция „Геометрия и топология" в ИМИ-БАН, Член на Научния съвет на ИМИ-БАН от 2016 г. досега, Научен секретар на ИМИ-БАН, 2017 – досега.

Доцент Милушева има богата и плодотворна педагогическа дейност във ФМИ към СУ и ВСУ „Любен Каравелов". Богатата й педагогическа дейност е подкрепена и с издадени (в съавторство) 4 учебника и 2 учебни помагала за студенти. Ръководила е един докторант, който успешно е защитил дисертация по научната специалност Геометрия и топология през януари 2018 г. и в момента е научен ръководител на още една докторантка в първа година от докторантурата й.

**3. Обща характеристика на дейността на кандидатката.**

Доц. Величка Милушева работи в областта на съвременната диференциална геометрия на гладките повърхнини в 4-мерно Евклидово и псевдо Евклидово пространство, т.е. 4-мерно пространство с плоска метрика със сигнатури съответно (4,0), (3,1) и (2,2) – класически проблем в математиката и математическата физика. Основен въпрос в теорията на повърхнините е намирането на диференциални инварианти и съответни връзки (ЧДУ), характеризиращи повърхнината с точност до (съответно) движение (уравнения на Гаус и Кодаци и теорема на Боне), като централна нетривиална тема е въвеждането/намирането на „правилните“ координати, например нормалните координати, координатите на Ферми, в чиито термини геометричните инварианти имат възможно най-проста и естествена форма.

Основна тема в работите на кандидатката е разработка на локалната диференциална геометрия на двумерните повърхнини в описаните по-горе 4-мерни пространства (уравнения от тип на Гаус и Кодаци и теорема от тип на Боне), [6], [18], [20], [22] и задълбочено изследване на геометрично определени класове повърхнини като:

- повърхнини с нулев или изотропен вектор на средната кривина (минимални повърхнини в Евклидово пространство и нетривиални аналози за псевдо Евклидови пространства), [9],[15], [16], [17] и [19];
- повърхнини от ротационен тип [4], [8], [12], [13] и [21];
- меридианни повърхнини, т.е. повърхнини лежащи върху ротационни 3-мерни хиперповърхнини [1]- [3], [5], [7], [10], [11] и [14].

**4. Научни приноси, цитирания.**

Ще се спра по-подробно само на някои от основните научни приноси на доц. Милушева.

За двумерна повърхнина $M^2$ в 4-мерно Евклидово пространство $E^4$ е дефинирано от Г.Ганчев и В.Милушева линейно изображение в допирателното пространство на повърхнината, аналог на класическото изображение на Вайнгартен за повърхнина в $E^3$, пораждащо две инвариантни функции $k$ и $\varkappa$, аналози на Гаусовата и средната кривина. Ще отбележа, че тук няма теорема Egregium, т.е. аналога на Гаусовата кривина $k$ и тензорът на кривина (Гаусовата кривина К) на индуцираната метрика не са свързани само с коефициентите на индуцираната метрика и поради това тук се появява като инварианта и самата Гаусова кривина К.

Един от основните резултати на кандидатката е установената в работата [22] теорема от тип на Боне за двумерна повърхнина без минимални точки в 4-мерно Евклидово пространство, т.е. удовлетворяваща условието $\varkappa^2 - k > 0$. За такава повърхнина са дефинирани 8 функции, определени геометрично от вектора на средната кривина и главните направления (собствените вектори на линейното изображение от тип на Вайнгартен) като е показано, че тези функции са инвариантни при смяна на параметрите запазваща главните направления. Изведени са съответните (необходими) условия, ЧДУ, които тези 8 функции удовлетворяват, т.е. аналози на уравненията на Гаус и Вайнгартен в този случай, това са условията (10) и (11) от [22] и е доказано, че тези 8 функции заедно с условията (10) и (11) определят локално повърхнината еднозначно с точност до движение в $E^4$ (Теорема 4.1 от [22]). Основни специални класове повърхнини, като минималните повърхнини и др., са характеризирани с условия върху тези функции. Дадени са също така и експлицитни примери на повърхнини с плоска нормална свързаност.

Друг основен принос на кандидатката е работата [20], където е изследвана локалната диференциална геометрия на двумерна пространственоподобна повърхнина в 4-мерното пространство на Минковски $E^4_1$, т.е. повърхнина, за която рестрикцията на метриката върху тангенциалното пространство е със сигнатура (2,0), а върху нормалното е неутрална със сигнатура (1,1). Прилагайки подхода от работата [22], е въведен аналог на втората основна форма за такава повърхнина, като е отчетено, че сигнатурата на метриката в нормалното пространство е (1,1) и е установена инвариантност (с точност до ориентация на допирателното или нормалното пространство) при смяна на параметрите. Съответният аналог на изображението на Вайнгартен индуцира главни направления (собствените вектори) както и две инвариантни функции, $k$ и $\varkappa$, аналози на Гаусовата и средната кривина, като е показано, че функцията $\varkappa$ е кривината на нормалната свързаност. Установено е, че векторът на средната кривина (mean curvature vector) е нула (минимална повърхнина) точно когато е изпълнено равенството $\varkappa^2 - k = 0$ за пространственоподобна повърхнина без точки, за които $k = \varkappa = 0$. За пространственоподобна повърхнина без минимални точки (с ненулев вектор на средната кривина) са дефинирани 8 функции, определени геометрично от главните направления и вектора на средната кривина. Изведени са съответните (необходими) условия, ЧДУ, които тези 8 функции удовлетворяват, т.е. аналози на уравненията на Гаус и Вайнгартен в този случай и е доказано, че тези 8 функции заедно с необходимите условия определят локално единствена пространственоподобна повърхнина с ненулев и неизотропен вектор на средната кривина (Теореми 5.1 и 6.1 от [20]), като това е фундаментален резултат от тип теорема на Боне за този случай. Като илюстрация на теорията, модифицирайки ротационните повърхнини на С.Мур в $E^4$ и отчитайки сигнатурата на нормалната метрика, са конструирани експлицитни примери на пространственоподобни повърхнини с плоска нормална свързаност и пространственоподобен/времеподобен вектор на средна кривина. Определени са специални класове от тези примери, които са хиперповърхнини съответно в пространството на де Ситтер и анти-де Ситтер и са пресметнати въведените инварианти с потенциални приложения в математическата физика.

Заслужава да се отбележи като съдържателен основен принос на кандидатката и работата [6], където е изследвана локалната диференциална геометрия на двумерна Лоренцова повърхнина в 4-мерното плоско пространство с метрика със сигнатура (2,2) $E^4_2$, т.е. повърхнина, за която рестрикцията на метриката върху тангенциалното пространство и нормалното пространство е със сигнатура (1,1). Прилагайки подхода от работата [22], е въведен аналог на втората основна форма за такава повърхнина, като е отчетено, че сигнатурата на метриката в нормалното пространство е (1,1) и е установена инвариантност при смяна на параметрите. Съответният аналог на изображението на Вайнгартен индуцира две инвариантни функции, $k$ и $\varkappa$, аналози на Гаусовата и средната кривина, като е показано, че функцията $\varkappa$ е кривината на нормалната свързаност. Съществена разлика в този случай е, че дефинираното изображение на Вайнгартен не винаги е диагонализируемо. Показано е, че това изображение е диагонализируемо, т.е. съществуват две главни направления (два линейно независими собствените вектори) точно когато е изпълнено условието $\varkappa^2 - k > 0$, като тези Лоренцови повърхнини са наречени „повърхнини от общ тип“, което, по мое мнение не е много удачно, защото общият тип е с недиагонализируемо изображение, но това не е съществено тъй като е въпрос на терминология. За Лоренцови повърхнини от общ тип с ненулево и неизотропно векторно поле на средната кривина (mean curvature vector) са дефинирани 8 функции, определени геометрично от главните направления и вектора на средната кривина. Изведени са съответните (необходими) условия, ЧДУ, които тези 8 функции удовлетворяват, т.е. аналози на уравненията на Гаус и Вайнгартен в този случай и е доказано, че тези 8 функции заедно с необходимите условия (ЧДУ) определят локално единствена Лоренцова повърхнина от общ тип с ненулев и неизотропен вектор на средната кривина (Теорема 4.3 от [6]), като това е фундаментален резултат от тип теорема на Боне за Лоренцови повърхнини от общ тип с ненулево и неизотропно векторно поле на средна кривина. За специалния клас, за които нормираният вектор на средна кривина е паралелен (относно нормалната свързаност) споменатата по горе теорема от тип на Боне е значително опростена като 8-те функции са редуцирани до 3 функции, удовлетворяващи 3 ЧДУ, Теорема 6.4 от [6].

Специално внимание е отделено на повърхнини с нулев вектор на средната кривина (минимални повърхнини). В работата [17] е доказан резултат от тип на Боне за времеподобна (рестрикцията на метриката върху допирателното пространство е от тип (1,1), а в нормалното от тип (2,0)) повърхнина с нулев вектор на средна кривина без „плоски“ (инфлексни) точки в 4-мерно пространство на Минковски, която гласи, че всяка такава повърхнина се определя еднозначно от две функции, удовлетворяващи система от две ЧДУ, като тези функции са гаусовата кривина и нормалната кривина на повърхнината (Теорема 3.5 от [17]). Намерени са и експлицитни решения, които дават примери на такива повърхнини.

Повърхнините с изотропен вектор на средната кривина представляват особен интерес и за математическата физика, теорията на черните дупки. В [19], [16] и [15] се изследват въведените от известният физик Р. Пенроуз тъй наречени marginally trapped повърхнини в 4-мерно пространство на Минковски, именно пространственоподобна повърхнина (рестрикцията на метриката върху допирателното пространство е от тип (2.0), а в нормалното от тип (1,1)) с изотропен (светлинноподобен) вектор на средната кривина. За marginally trapped повърхнина без инфлексни (плоски) точки са дефинирани 7 функции и са изведени съответните (необходими) условия, ЧДУ, които тези 7 функции удовлетворяват като е доказано, че тези 7 функции заедно с необходимите условия (ЧДУ) определят локално единствена marginally trapped повърхнина без инфлексни точки (Теорема 4.1 от [19]), като това е фундаментален резултат от тип теорема на Боне за marginally trapped повърхнини без инфлексни точки. Като илюстрация, са конструирани в явен вид (дадени са реексплоцитни решения на съответните ОДУ) нови marginally trapped повърхнини (Теореми 5.3 и 5.4 от [19]), които биха представлявали интерес в теорията на черните дупки.

Основните резултати са публикувани в широко известни международни научни списания, от които ще отбележа Israel J. Math., J. Geom. Phys., J. Math. Phys., Central Eur. J. Math., Int. J. Geom., Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., Bull. Korean Math. Soc., Turk. J. Math., Mediterr. J. Math., Bull. Malays. Math. Sci. Soc., Taiwanese J. Math. и др. със сумарен Импакт Фактор 9.331. Кандидатката е представила доказателства за 87 цитирания (без автоцитати).

**5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Документите и материалите, представени от доц. Величка Милушева отговарят на всички изисквания на Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), Правилника за прилагане на ЗРАСРБ и съответните Правилници на БАН и ИМИ.

Кандидатката в конкурса е представила достатъчен брой научни трудове, публикувани след материалите, използвани при защитата на ОНС „доктор“ и при хабилитирането ѝ за доцент. В работите на кандидатката има оригинални научни и научноприложни приноси, които са получили международно признание, като представителна част от тях са публикувани в известни научни списания и научни сборници, издадени от международни академични издателства. Научната и преподавателската квалификация на доц. Милушева е несъмнена.

Доц. д-р Величка Милушева работи в модерна област на диференциалната геометрия и резултатите ѝ в последните години биха могли да бъдат съществено използвани в диференциалната геометрия на повърхнините и математическата физика. Постигнатите от доц. д-р Величка Милушева резултати в учебната и научно-изследователската дейност, напълно съответстват на специфичните изисквания на БАН и ИМИ, приети във връзка с Правилника на БАН и ИМИ за приложение на ЗРАСРБ.

След запознаване с представените в конкурса материали и научни трудове, анализ на тяхната значимост и съдържащите се в тях научни приноси, намирам за основателно да дам своята положителна оценка и да препоръчам на Научното жури да изготви доклад-предложение до Научния Съвет на ИМИ-БАН за избор на доц. д-р Величка Василева Милушева на академичната длъжност „професор“ в ИМИ-БАН по професионално направление 4.5. Математика, научна специалност „Геометрия и Топология“.

3.06.2018 г. ..........................................................

Чл. кор. проф. дмн Стефан Иванов