Становище

за дисертационен труд на тема:

Теоретичен и числен анализ на диференчни схеми за уравнения на Бусинеск

на

на Веселина Иванова Вучева

за присъждане на образователна и научна степен "Доктор"
в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика,
професионално направление 4.5 Математика,
докторска програма "Математическо моделиране и приложение на математиката"

от

проф. дмн Гено Николов, Факултет по математика и информатика
на Софийския университет "Св. Климент Охридски"

Със Заповед №34/31.01.2020 г. на Директора на ИМИ-БАН акад. Веселин Дренски бях определен за член на научното жури за защитата на горепосочения дисертационен труд, а от решение на научното жури (Протокол № 1/06.02.2020 г.) следва да напиша становище за дисертационния труд на Веселина Вучева.

Общо описание на дисертационния труд:

Представеният дисертационен труд е в обем от 101 страници и е разпределен в четири глави. Цитираната в него литература включва 49 източника, а списъкът на публикациите на дисертанта се състои от 5 заглавия. Предмет на дисертационния труд е задачата на Коши за едномерните уравнения на Бусинеск (УБ), които изписвам и с цел улесняване на по-нататъшното описание на резултатите в дисертацията, ще наричам със съкратените им наименования, използвани от дисертанта

- Двойно дисперсно уравнение (ДДУ), наричано още парадигматично уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta\, u + \beta_1\, \Delta\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta_2\, \Delta^2 u + \Delta\, f(u)\,. \tag{1}$$

- Уравнение на Бусинеск от шести ред (УБШР)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta\, u + \beta_1\, \Delta\, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta_2\, \Delta^2 u + \beta_3\, \Delta^3 u - \Delta\, f(u)\,. \tag{2}$$

Решение $u = u(x,t)$ се търси в областта $\{(x,t)\ :\ x \in \mathbb{R},\ y \in (0,T)\}$, при начални условия

$$u(x,0) = u_0(x)\,, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = u_1(x)\,,$$

където за функциите u_0, u_1 са наложени подходящи условия за гладкост.

Уравненията на Бусинеск са хиперболични ЧДУ с един, два или три дисперсни члена и нелинейност от полиномиален тип, т.е. $f(u) = \alpha\, u^p$, $p \neq 1$. Тези уравнения се срещат в математически модели на надлъжните трептения в нелинейни атомни вериги, при двупосочното разпространение на малка амплитудна вълна на повърхността на плитка вода, в оптиката и дислокационната теория на кристалите, както и в някои микро-структурни задачи.

Глава 1 има уводен характер. В нея се дава представянето на ДДУ и УБШР като обобщени хамилтонови системи и характерното за тях свойство *симплектичност*, свойствата *запазване на енергията*, *запазване на масата* и *запазване на момента.* Направен е кратък, но съдържателен преглед на литературата посветена на тази тематика, и са формулирани основните задачи които се решават в дисертацията.

В *Глава 2* е даден явният вид солитонните решения на ДДУ и условията за съществуването им. Явни формули за решенията на УБШР във вид на бягаща вълна не съществуват, тези решения са решенията на ОДУ от четвърти ред, и тук е разгледан методът на Петвиашвили за численото му решаване. Посочени са условията за съществуване на солитонни решения и са намерени точните решения за конкретни стойности на дисперсионните параметри и квадратична или кубична нелинейност. Тези решения се използват по-късно за сравняване с числените резултати получени с използване на диференчните схеми, предложени от дисертанта. Пак в тази глава е изведено хамилтоновото представяне на УБ и показана еквивалентността на непрекъснатата енергия записана в термини само на решението и на непрекъснатия хамилтониан. За пълнота и с оглед на представянето на основните резултати тук са формулирани и доказани някои основни резултати от теорията на динамичните системи и на диференчните схеми.

Основните резултати в дисертацията са представени в глави 3 и 4 на дисертационния труд, и тях коментирам по-подробно по-долу.

Анализ на научните и научноприложните постижения в дисертационния труд

В *Глава 3* са конструирани четири диференчни схеми за численото намиране на решението на УБШР. Първата от тях е консервативна схема с локална грешка на апроксимация $O(h^2 + \tau^2)$, и за нея в Теорема 27 е доказано условие за устойчивост по начални данни $\tau = O(h^2)$. Рестриктивният характер на това условие е накарал дисертанта да разгледа втора схема, наречена *Факторизирана диференчна схема* (ФДС), която използва три времеви слоя на решението (и включва предходната схема в частния случай $\sigma = 0$). Условия за устойчивост на ФДС са доказани в Теорема 29. По-нататък дисертантът доказва, че ФДС е консервативна, т.е. запазва дискретната енергия на всеки слой (в Теорема 30), и доказва сходимост на ФДС в $W^2_{2,h}$-норма и в C_h-норма (Теореми 31 и 32), като и в двата случая редът на сходимост е $O(h^2 + \tau^2)$. Приложени са резултати от числени експерименти и сравнение с намерените в Глава 2 точни частни решения на УБШР. Тези резултати потвърждават преимуществата на ФДС пред диференчната схема с тегло $\sigma = 0$ както по отношение на грешката, така и по изчислителното време и запазването на дискретната енергия за дълъг период от време.

За построяване на другите две диференчни схеми Веселина Вучева използва представянето на УБШР като обобщена хамилтонова система.

В Раздел 3.4 е получена диференчната схема (3.33). За нея в Теорема 33 е доказано условие за устойчивост по начални данни и дясна част $\tau = O(h^2)$, в Теорема 34 е доказан дискретен закон за запазване на енергията, и в Теорема 35 закон за запазване на дискретната маса. Тъй като апроксимацията на нелинейния член зависи от решението върху следващия слой по времето, се използва итерционен метод Приложени са резултатите от числени експерименти с тази схема и е направено сравнение с резултатите от първите две диференчни схеми (консервативната схема с тегло $\sigma = 0$ и ФДС) за известните точни решения с квадратична и кубична нелинейност.

Построената в раздел 3.5 диференчна схема (3.43) за УБШР е с локална апроксимация $O(h^2 + \tau^2)$. За нея Веселина Вучева доказва, че е условно устойчива по начални данни и дясна част (Теорема 36), че е симплектична (Теорема 37), че запазва приближено дискретния хамилтониан (дискретната енергия) с грешка $O(\tau^2)$ (Теорема 38), и че запазва дискретната маса във всеки слой по времето (Теорема 39). Представени са резултати от числените експерименти за симплектичната схема върху две задачи: разпространение на солитонна вълна и взаимодействие на два солитона в случаите на квадратична и на кубична нелинейност. Резултатите потвърждават втори ред на сходимост, много добро запазване на дискретната маса и, въпреки че схемата не запазва дискретната енергия, близки до точната ѝ стойности. Сравнението със схемата от Раздел 3.4 показва идентични резултати по отношение на дискретата маса и дискретната енергия. Разликата в изчислителното време обаче е в полза на симплектичната схема.

Глава 4 е посветена на разработването на ефективни числени методи за намиране на решението на двойно дисперсното уравнение (ДДУ). Предложени са три диференчни схеми, за характеризацията на които дисертантът въвежда понятията *дискретен момент*, *дискретен хамилтониан* и *дискретна маса*.

В Раздел 4.2.2 е предложена диференчната схема (4.14) (или, след изключване на помощната функция w, трислойното диференчно уравнение (4.15)). За нея Веселина Вучева доказва, че е симплектична (Теорема 42). Доказва също връзка между дискретните моменти на различните слоеве и запазване с грешка $O(h^2)$ на началния дискретен момент (Теорема 43). Подобна връзка е установена между дискретните хамилтониани, както и че решението запазва приближено началния дискретен хамилтониан с грешка $O(\tau^2)$ (Теорема 44). И в двете оценки, грешката е пропорционална на големината T на времевия интервал. Приложените резултати от числени експерименти със симплектичната схема за две задачи (разпространение на солитонна вълна и взаимодействие на два солитона) потвърждават изводите на Теореми 42–44.

В Раздел 4.2.4 е предложена диференчната схема (4.29), чието основно свойство (запазване на дискретния момент) е доказано в Теорема 45. За тази схема Вучева доказва още (Теорема 46), че запазва началния дискретен хамилтониан с грешка $O(h^2+\tau^2)$, като грешката е пропорционална на големината T на времевия интервал. Отново, тези резултати намират потвърждение в приведените числени експерименти със схемата.

Раздел 4.2.6 на дисертационния труд е посветен на консервативната диференчна схема (4.38). Вучева доказва консервативността (запазване на дискретния хамилтониан) на схемата в Теорема 47, а в Теорема 48 е доказана връзка между дискретните моменти на съседни слоеве и в крайна сметка грешка $O(T(h^2+\tau^2))$ спрямо началния дискретен момент.

Трите схеми се различават само по апроксимацията на нелинейния член в уравнението, поради което имат едно и също достатъчно условие за устойчивост, $\tau = O(h)$. Друга обща тяхна характеристика е, че запазват дискретната маса. Приложените числени експерименти с трите схеми показват, че по отношение на енергията, масата и момента редът на сходимост и относителните грешки са от един и същ порядък. Различие се наблюдава при изчислителното време: консервативната схема изисква повече време, тъй като при нея се използва итерационен метод.

В последния раздел на Четвърта глава е илюстрирано, че когато дисперсният параметър β_3 клони към нула, приближеното решение на УБШР клони към точното решение на съответното ДДУ.

Познаване на състоянието на проблема

От прегледа на резултатите отнасящи се за численото решаване на уравненията на Бусинеск, направен от дисертанта в уводната част, изложените известни резултати в Глава 2 и списъка на цитираните източници добивам впечатлението, че Веселина Вучева познава много добре резултатите от областта на дисертацията. За това несъмнено са допринесли и знанията, опитът и педагогическите умения на научния ѝ ръководител проф. Наталия Кольковска, както и факта, че продължение на няколко години дисертантът работи в научно-изследователски проект по тази тема, финансиран от ФНИ. Дисертационния труд показва, че дисертантът умело прилага придобитите знания и техника за получаване на нови теоретични резултати в областта на числените методи, притежава практически умения за успешната им реализация и може компетентно да тълкува резултатите от числените експерименти.

Оценка на приносите

Формулираните от дисертанта приноси в дисертационния труд и в автореферата правилно отразяват постигнатите от него резултати.

Публикации върху резултатите от дисертацията

Резултатите от дисертацията са представени в 5 публикации. Една статия е публикувана в международно списание с импакт фактор (Advances in Difference Equation (2019), IF 1.510(2018)), и четири са в сборници с материали на международни конференции с SJR, като три са излезли от печат и една е приета за публикуване. Всичките публикации са съвместни с Наталия Кольковска. Дисертантът не е представил сведения за цитирания на тези публикации.

Оценка на автореферата

Авторефератът на дисертацията е с обем от 34 страници. Започва с уводна част, в която се представят уравненията на Бусинеск и тяхното присъствие в различни математически модели на реални процеси, преглед на литературата и целите, преследвани в дисертационния труд. Следва представяне на основните резултати, получени в дисертацията, апробацията на тези резултати изразена с доклади на дисертанта на международни конференции у нас и чужбина, списък на публикациите по дисертацията и самооценка на авторските приноси. Считам, че авторефератът отразява пълно и точно съдържанието на дисертацията и правилно разграничава резултатите на дисертанта и връзката им с резултати на други автори.

Заключение

Въз основа на всичко изложено до тук заключавам, че представеният дисертационен труд отговаря на всички изисквания на Закона за развитие на академичния състав в Република България (ЗРАСРБ), правилника за прилагането му и Правилниците за прилагане на ППЗРАСРБ на БАН и на ИМИ – БАН.

Убедено препоръчвам на уважаемото научно жури *да присъди на Веселина Иванова Вучева образователната и научна степен "Доктор"* в област на висше образование *4. Природни науки, математика и информатика*, професионално направление *4.5 Математика*, докторска програма *Математическо моделиране и приложение на математиката.*

29.04.2020 г. С уважение:

(Г. Николов)