

# РЕЦЕНЗИЯ

от ПРОФ. Д.Н. МАНЧО ХРИСТОВ МАНЕВ

Факултет по математика и информатика

Пловдивски университет „Паисий Хилендарски“

относно дисертация за придобиване

на образователна и научна степен „ДОКТОР“

по област на висше образование: 4. Природни науки,

математика и информатика,

професионално направление: 4.5. Математика,

докторска програма: „Геометрия и топология“

Автор: ВИКТОРИЯ ГЕРАСИМОВА БЕНЧЕВА-ПЕТРОВА

Тема: **ДИФЕРЕНЦИАЛНА ГЕОМЕТРИЯ НА ВРЕМЕПОДОБНИ  
ПОВЪРХНИНИ В ЧЕТИРИМЕРНО ПРОСТРАНСТВО  
НА МИНКОВСКИ**

Научни ръководители: ПРОФ. Д-Р ВЕЛИЧКА МИЛУШЕВА (ИМИ-БАН),

доц. д-р МИЛЕН ХРИСТОВ (ВТУ)

Чрез Заповед №191/02.07.2024 г. на Директора на Института по математика и информатика при БАН (съкр. ИМИ), издадена на основание решение на Научния съвет на ИМИ (Протокол №9/28.06.2024 г.) и в съответствие с чл. 30 от Правилника за прилагане на Закона за развитие на академичния състав в Република България (съкр. Закона за РАСРБ), съм определен за член на Научното жури в процедурата за защита на споменатия дисертационен труд.

Съгласно решение на това жури (Протокол №1/03.07.2024) съм определен да напиша рецензия по дисертацията и документите за процедурата.

В ролята си на член на научното жури съм получил електронен достъп до всички документи, подадени за участие в процедурата.

## **1. Данни и лични впечатления за дисертанта**

Дисертантката Виктория Бенчева-Петрова е родена през 1991 г. и завършва бакалавърската специалност „Математика и информатика“ във Великотърновския университет „Св. св. Кирил и Методий“ (съкр. ВТУ) през 2014 г. Две години след това се дипломира като магистър по „Технологии за обучение по математика“ отново във ВТУ. На 5.07.2017 г. е започнала задочна докторантура в ИМИ по докторска програма „Геометрия и топология“. Виктория Бенчева е отчислена от докторантурата с право на защита на 5.07.2022 г. Била е хоноруван асистент по Висша математика във ВТУ през първия семестър на 2016/17 г. и веднага след това 4 години е асистент пак там, като води упражнения по няколко математически дисциплини. Освен това през последните повече от 10 г. е работила и като програмист на уеб сайтове във фирма.

Имам положителни макар и кратки впечатления за научната дейност на Виктория Бенчева от докладванията ѝ на International Colloquium on Differential Geometry and its Related Fields във Велико Търново през 2014 г. и 2016 г. Тогава тя представяше свои резултати по друга тема от диференциалната геометрия заедно с научния си ръководител доц. Милен Христов.

## **2. Характеристика на дисертационния труд и материалите по процедурата**

Запознах се с документите, които са подадени от дисертантката Виктория Бенчева в процедурата за защита на нейния дисертационен труд. Считаю, че те са в съответствие с изискванията на нормативната уредба, а именно Закона за РАСРБ, Правилника за прилагане на Закона за РАСРБ, и Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и за заемане на академични длъжности в ИМИ на БАН (съкр. Правилника за УРПНСЗАД в ИМИ) за процедури, открити преди 04.05.2018 г.

Авторефератът (36 страници) и авторската справка за приносите в дисертационния труд са изработени според изискванията и коректно отразяват резултатите и научните приноси в дисертационния труд.

Не съм забелязал каквато и да е форма на плагиатство в дисертацията и публикациите, представени за оценяване от дисертантката.

Темата на дисертацията е върху разработването на локалната диференциална геометрия на времеподобни повърхнини в четиримерно пространство на Минковски и прилагане на резултатите при изследването на такива повърхнини от ротационен тип. Тази дисертация продължава диференциално-геометричните изследвания на 4-мерните евклидови и псевдоевклидови пространства, започнати у нас от Георги Ганчев и Величка Милушева и продължени от Красимир Кънчев и Яна Алексиева.

Методите на изследване са аналогични на тези, които се използват при повърхнините в 4-мерното евклидово пространство и при пространственоподобните повърхнини в 4-мерното пространство на Минковски.

Представеният дисертационен труд на Виктория Бенчева е написан на български език и е изложен на 112 страници. Състои се от въведение (10 страници), две глави с общо 7 раздела (93 страници), библиография от 67 заглавия и съдържание. Тематиката и съдържанието на дисертацията съответстват напълно на докторската програма и научната специалност.

Въведението информира обстойно читателя за състоянието на локалната диференциална геометрия на специални повърхнини в 4-мерни пространства, снабдени с различни по сигнатура метрики, като се посочват свързани с тази тема публикации. Този обзор на свързаните с темата проблеми и известните резултати за тях показва добро познаване на проблематиката от страна на дисертантката.

Формулира се ясно целта на дисертацията, а именно: Изучаване на времеподобни повърхнини в 4-мерното пространство на Минковски  $\mathbb{R}_1^4$  и разработване на локалната им теория по аналогия с локалната теория на повърхнините в 4-мерното евклидово пространство  $\mathbb{R}^4$  и на теорията на пространственоподобните повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ .

Дисертантката се справя с поставената задача като използва геометрично определен придружаващ репер във всяка точка на повърхнината, спрямо който се

получават геометрични функции и система от частни диференциални уравнения (съкр. ЧДУ), определящи повърхнината с точност до движение в  $\mathbb{R}_1^4$ .

Поставена е и задачата да се въведат специални параметри върху други класове времеподобни повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$  освен минималните, които да позволят минимизиране на броя на функциите и броя на уравненията, споменати по-горе. Проблемът е решен за класа на времеподобните повърхнини с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина чрез въвеждане на специални изотропни параметри, които наричат канонични. В този случай са получени 3 функции и 3 уравнения.

След това във въведението се описват синтезирано направените изследвания и получените резултати във всеки раздел и подраздел на дисертационния труд.

Накрая на въведението, освен благодарности към научните ръководители и семейството, е даден списък на публикуваните 3 статии с резултати от дисертацията. Прави впечатление, че и трите статии са излезли през последните 2 години в списания с импакт фактор: Turkish Journal of Mathematics, Filomat и Доклади на БАН. Като се вземат предвид най-новите показатели за 2023 г., има 2 статии в списания от 2-ри кваartil и една – от 4-ти кваartil на Web of Science. Автори на тези статии са дисертантката и проф. Милушева, като неин научен ръководител. Приемам, че участието на двете съавторки е равноправно.

В Глава 1 на дисертацията се формулират и доказват фундаментални теореми за времеподобни повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ , т.е. теореми за съществуване и единственост с точност до движение на повърхнина от изучавания вид. Главата започва с §1.1, където се дават необходимите основни сведения и понятия за двумерни повърхнини  $M^2$  в  $\mathbb{R}_1^4$ . В §1.2 се разглеждат времеподобни повърхнини  $M^2$  без инфлексни точки, т.е. първото нормално пространство на  $M^2$  в  $\mathbb{R}_1^4$  е двумерно. Дефинира се втора основна форма  $\Pi$  на  $M^2$  и се намират формулите за коефициентите им при произволна смяна на параметрите на повърхнината. Изучава се инвариантността на  $\Pi$  при смяна на базите съответно на нормалното и допирателното пространство на  $M^2$ . Чрез  $\Pi$  се разглежда аналог на изображението на Вайнгартен  $\gamma$  и

се изучават неговите инварианти  $k = \det \gamma$  и  $\varkappa = -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \gamma$ . Дефинират се асимптотични и главни линии, след което се намира условието  $\varkappa^2 - k > 0$ , при което съществува локална параметризация спрямо главните линии. В случая  $\varkappa^2 - k < 0$  се предлага използване на изотропна параметрична мрежа.

В §1.3 се доказва, че  $M^2$  е минимална времеподобна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$  тогава и само тогава, когато  $M^2$  е омбилична.

В §1.4 се разглеждат времеподобни повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$  без омбилични точки. В случая на съществуване на локална параметризация относно главните линии, се използва геометричен репер на  $M^2$ , определен от главните направления и векторното поле на средната кривина  $H$ , за да се докаже фундаментална теорема (Теорема 1.4.6.) за този клас повърхнини чрез осем геометрично определени функции, удовлетворяващи система от осем ЧДУ. Показан е геометричният смисъл на някои от тези функции. В алтернативния случай  $M^2$  се изучава спрямо двойка изотропни параметри и са получени аналогични геометрични тълкувания на използваните характеристични функции, свързани с гаусовата кривина  $K$  и  $H$ . В следващата част на раздела се доказват фундаментални теореми за времеподобни повърхнини от общ тип, т.е. които не са с паралелно нормирано  $H$ . Използват се изотропни параметри и съответния геометричен псевдо-ортонормиран репер. Разглеждат се три типа повърхнини от общ тип, за всеки от които се доказва фундаментална теорема: Теореми 1.4.15–1.4.17.

В §1.5 се разглеждат времеподобни повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$  с паралелно нормирано  $H$ . За тях локално се въвеждат специални изотропни параметри, наречени канонични. Показва се въвеждането на канонични параметри поотделно за случаите, определени от знака на величината  $K - H^2$ . Накрая на раздела се доказват съответните фундаментални теореми, формулирани чрез канонични параметри: Теореми 1.5.6–1.5.7.

Глава 2 е посветена на изучаването на времеподобни ротационни повърхнини  $M^2$  в  $\mathbb{R}_1^4$  и започва с §2.1, където се изучават обобщени  $M^2$  от два типа – с времеподобна и с пространственоподобна меридианна крива. При тези повърхнини

се показва, че изображението на Вайнгартен  $\gamma$  е диагонализируемо и може да се използва параметризация спрямо главните направления на  $M^2$ , като се прилага теорията от §1.4.1. В резултат на това за двата типа на  $M^2$  се намират осемте функции от съответната фундаментална теорема. Освен това се доказва, че ако  $M^2$  няма минимални точки, е нетривиална Chen-повърхнина (Теорема 2.1.1). В останалата част на §2.1 се описват аналитично тези два типа повърхнини с различни условия за  $K$ ,  $H$ ,  $\varkappa$  и  $k$ .

В §2.2 се конструират т.нар. меридианни времеподобни повърхнини  $M^2$  в  $\mathbb{R}_1^4$ , които са 1-параметрични системи от меридиани на ротационна хиперповърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$  с времеподобна ос. В този случай  $\gamma$  не е диагонализируемо и  $M^2$  се изучава спрямо изотропни параметри, като се прилага теорията от §1.4.2 и §1.4.3. Разглеждат се различни класове такива повърхнини, лежащи върху ротационна хиперповърхнина с времеподобна ос. Получени са класификационни резултати в случаите на постоянна гаусова кривина, постоянна средна кривина и постоянна детерминанта на изображението на Вайнгартен.

### **3. Аprobация на резултатите от дисертационния труд**

Съгласно чл. 6, т. 3 на Правилника за УРПНСЗАД в ИМИ, освен дисертационен труд, трябва да бъдат представени публикации, отразяващи съществени части на труда, които да са поне 3 на брой в рецензирани издания, едно от които да е списание. От приложените статии в списания с импакт фактор се вижда, че това изискване е изпълнено точно в количествен аспект и е преизпълнено в качествено отношение.

Няма данни за цитирания на публикациите. В автобиографията са съобщени два доклада по резултатите в дисертацията, единият е изнесен на Общия семинар на секция „Анализ, геометрия и топология“, ИМИ, 2021 г., а другият – на International Conference “Mathematics Days in Sofia”, 2023.

### **4. Критични бележки и препоръки**

Прави впечатление, че изложението и оформлението на дисертацията е на

много добро ниво. Въпреки това ще направя някои забележки с цел още по-добро оформяне на разработката, която може да се използва в бъдеще за обучение на други докторанти.

– Прилагателните „евклидова“, „риманова“, „лоренцова“, „гаусова“ и др. под. трябва да се пишат с малки букви на български. Правилото е формулирано в т. 42.7. от *Официалния правописен речник на българския език* (2012 г., стр. 47).

– Добре е да се формулират изводите като твърдения в §1.2.

– Стилът на дисертациите трябва да е като този на учебниците. Не е добре да има изречения без сказуемо, дори почти без думи, напр. това след (1.26).

– Стр. 37, ред 2 на доказателството е прекъснат.

– Трябва да се използват уточнени термини, напр. „меридианни времеподобни повърхнини“ или „времеподобни меридианни повърхнини“.

## 5. Заключение

Дисертационният труд на Виктория Бенчева съдържа актуални научни резултати, които представляват оригинален принос в диференциалната геометрия.

Представените документи отговарят напълно на всички изисквания на Закона за РАСРБ, Правилника за прилагане на Закона за РАСРБ и Правилника за УРПНСЗД в ИМИ.

Поради горното давам своята **положителна оценка** за научните изследвания, представени от дисертационния труд, автореферата, постигнатите резултати и приноси, представени по-горе, и предлагам на почитаемото научно жури да вземе решение **ВИКТОРИЯ ГЕРАСИМОВА БЕНЧЕВА-ПЕТРОВА** да придобие образователната и научна степен „**Доктор**“ по област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика; професионално направление: 4.5. Математика; докторска програма: „Геометрия и топология“.

20 август 2024 г.

Пловдив

Подпис:

(проф. д.н. Манчо Манев)