

## СТАНОВИЩЕ

от проф. д-р Галя Василева Накова  
Факултет "Математика и Информатика",  
ВТУ "Св. св. Кирил и Методий"

(член на научно жури, заповед № 191/02.07.2024 г. на Директора на ИМИ-БАН)

за дисертационен труд за присъждане на образователната и научна степен  
"доктор", в област на висше образование 4. Природни науки, математика и  
информатика, професионално направление  
4.5. Математика, докторска програма "Геометрия и топология"

**Автор:** Виктория Герасимова Бенчева-Петрова

**Тема:** Диференциална геометрия на времеподобни повърхнини в четиримерно пространство на Минковски

**Научни ръководители:**

проф. д-р Величка Василева Милушева – ИМИ-БАН

доц. д-р Милен Йорданов Христов – ВТУ "Св св. Кирил и Методий"

### 1 Данни и лични впечатления за докторанта

Виктория Бенчева-Петрова завършва средното си образование през 2010 г. в Природоматематическа гимназия "Васил Друмев" във Велико Търново, профил "Математика и немски език". През 2014 г. се дипломира във ВТУ "Св. св. Кирил и Методий" като бакалавър по специалността "Педагогика на обучението по математика и информатика", а през 2016 г. придобива ОКС магистър във ВТУ по специалността "Технологии на обучението по математика". В периода 2017– 2022 г. тя е докторант в задочна форма на обучение, докторска програма "Геометрия и топология" към ИМИ-БАН. От 2016 г. до 2017 г. Виктория Бенчева-Петрова е хоноруван асистент във ФМИ при ВТУ, а от 2017 г. до 2021 г. е асистент в катедра "Математически анализ и приложения" на ФМИ във ВТУ. Водила е упражнения по математически анализ, линейна алгебра, аналитична геометрия, статистика. От 2013 г. до сега тя работи и като програмист на Уеб сайтове.

Познавам Виктория Бенчева-Петрова от 2010 г. Преподавала съм ѝ различни геометрични дисциплини. Личните ми впечатления са, че тя има отлична математическа подготовка и голям творчески потенциал. В подкрепа на това мое мнение са успехите ѝ на следните математически състезания: НСОМ - 1 сребърен и 4 бронзови медала; Междууниверситетско състезание по математика, организирано от ФМИ на ВТУ - 2 златни и 1 бронзов медал; SEEMOUS - бронзов медал; първи места на очни и задочни кръгове на СОМ във ВТУ. Специално ще отбележа, че още като студент тя провежда научни изследвания в областта на диференциалната геометрия под ръководството

на доц. д-р Милен Христов, който е научен ръководител на дипломните ѝ работи за ОКС бакалавър и магистър. От времето на съвместната ни работа във ФМИ на ВТУ мога да кажа, че Виктория Бенчева-Петрова е отговорен и уважаван от студентите преподавател. Тя е коректен и отзивчив колега. Активно е участвала в различни инициативи на ФМИ във ВТУ като подготовката и провеждането на Математически турнир за ученици, подготовка на студенти за участие в НСОМ и НСОКМ. Била е член на научните колективи на 2 проекта към Фонд Научни изследвания и на 6 проекта към ФМИ на ВТУ.

## 2 Актуалност на тематиката, цели и задачи

Изучаването на повърхнини в псевдо-евклидови пространства е актуално направление в съвременната диференциална геометрия, което е обусловено от разнообразните им приложения в теоретичната и математическата физика. Известно е, че съществуват следните три типа повърхнини в псевдо-евклидово пространство в зависимост от рестрикцията на индефинитната метрика на обемъщото пространство върху допирателното пространство на повърхнината: пространственоподобни, времеподобни и светлинноподобни, когато индуцираната метрика е съответно Риманова, Лоренцова и изродена. Различни класове от трите типа повърхнини в 4-мерно пространство на Минковски  $\mathbb{R}_1^4$  се изследват интензивно от много автори в световен мащаб. Съществен принос за развитието на инвариантната теория на пространственоподобни повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$  имат Георги Ганчев и Величка Милушева.

Обект на изучаване в представения дисертационен труд са времеподобни повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ . Целта на изследването е да се разработи локалната теория на тези повърхнини. За постигане на поставената цел докторантът творчески е приложил подхода за изучаване на повърхнините в 4-мерно евклидово пространство  $\mathbb{R}^4$  и на пространственоподобните повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ . Той се базира на въвеждане на геометрично определен придружаващ репер във всяка точка на повърхнината, спрямо който са получени съвкупност от геометрични функции и система от частни диференциални уравнения, които определят повърхнината с точност до движение в  $\mathbb{R}_1^4$ .

## 3 Характеристика на дисертационния труд и оценка на основните резултати и научни приноси в него

Дисертационният труд е в обем от 112 страници. Той е структуриран в 25 параграфа, оформени в 2 глави, въведение и библиография от 67 заглавия. Авторефератът се състои от 36 страници и отразява основните резултати, постигнати в дисертацията.

В началото на първа глава са дадени накратко основни дефиниции и формули за подмногобразия, отнасящи се до повърхнини. По-нататък подробно са разгледани въпросите за инвариантността на двете основни форми на времеподобна повърхнина  $M^2$  в  $\mathbb{R}_1^4$  при смяна на параметрите, както и за инвариантността на втората основна форма при смяна на базиса на нормалното пространство  $N_p M^2$ ,  $p \in M^2$ . Аналогично както за повърхнини в  $\mathbb{R}^4$  и пространственоподобни повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ , е въведено

линейно изображение  $\gamma$  от тип изображение на Вайнгартен, както и породените от  $\gamma$  функции  $k = \det \gamma$ ,  $\varkappa = -\frac{1}{2}\text{tr} \gamma$ . Доказано е, че  $\varkappa$  съвпада с кривината на нормалната свързаност на  $M^2$ .

Известно е, че за повърхнини в  $\mathbb{R}^4$  и пространственоподобни повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$  матрицата на изображението на Вайнгартен винаги може да се диагонализира, т.е. във всяка точка на тези повърхнини съществуват главни линии и те може да се параметризират спрямо главните линии. В настоящия дисертационен труд е установено, че за времеподобните повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$  диагонализирането на матрицата на изображението на Вайнгартен зависи от знака на функцията  $\varkappa^2 - k$  в точките на повърхнината. Всеки от случаите  $\varkappa^2 - k = 0$ ,  $\varkappa^2 - k > 0$  и  $\varkappa^2 - k < 0$  е разгледан отделно и е интерпретиран геометрично. Например,  $\varkappa^2 - k = 0$  в точка на повърхнината е необходимо условие точката да е омбилична. Доказано е, че времеподобна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$  без инфлексни точки е минимална тогава и само тогава, когато тя се състои от омбилични точки. Подробно са изучени двата вида повърхнини без омбилични точки.

Когато  $\varkappa^2 - k > 0$  във всяка точка на повърхнината, изображението на Вайнгартен е диагонализируемо. В този случай повърхнината е изследвана аналогично както пространственоподобна повърхнина в  $\mathbb{R}_1^4$  - тя е параметризирана спрямо главните линии и е дефиниран геометричен репер, определен от главните направления и векторното поле на средната кривина. Относно този репер са получени деривационните формули от тип формули на Френе, в които участват 8 функции. Чрез тези функции е направено геометрично характеризиране на разглежданата повърхнина като са дадени необходими и достатъчни условия тя да е плоска, с постоянна ненулева средна кривина, с постоянна ненулева Гаусова кривина, с плоска нормална свързаност, с постоянна ненулева нормална кривина. Доказана е теорема от типа на теоремата на Боне в класическата диференциална геометрия.

Изображението на Вайнгартен не е диагонализируемо за времеподобни повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ , за които във всяка точка  $\varkappa^2 - k < 0$ . При изследването на такива повърхнини докторантът е приложил различен подход от този, когато  $\varkappa^2 - k > 0$ . Той се базира на известния факт, че за всяка времеподобна повърхнина  $M^2$  в псевдо-евклидово пространство може да се избере локална координатна система  $\{u, v\}$ , относно която метричният тензор  $g$  върху  $M^2 : z = z(u, v)$  е дефиниран така, че допирателните векторни полета  $z_u$  и  $z_v$  са изотропни (светлинноподобни). Параметрите  $(u, v)$  се наричат изотропни параметри на повърхнината, а направленията, определени от  $z_u$  и  $z_v$  - изотропни направления. По-нататък докторантът изучава времеподобните повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$  с недиагонализируемо изображение на Вайнгартен на езика на изотропни параметри и като използва изотропните направления конструира псевдо-ортонормиран геометричен репер, относно който са изведени деривационните формули. С помощта на деветте функции от тези формули са дадени геометрични характеристики на различни класове от разглежданите повърхнини. В зависимост от стойностите на някои от получените геометрични функции са обособени три типа повърхнини, за всеки от които е доказана фундаментална теорема за съществуване и единственост.

Последните 4 параграфа на първа глава са посветени на изследването на времеподобни повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$  с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина, параметризирани спрямо изотропни параметри. Тези повърхнини са разделени на

два основни класа. За повърхнините от двата класа е доказано, че локално могат да се параметризират спрямо специални изотропни параметри, наречени канонични параметри. По този начин е постигнато редуциране на броя на геометричните функции и на частните диференциални уравнения от условията за интегрируемост на разглежданите повърхнини. Доказани са фундаменталните теореми за съществуване и единственост за двата класа повърхнини.

Във втора глава са конструирани два основни класа времеподобни повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$ : класът на времеподобните обобщени ротационни повърхнини от първи и втори тип и класът на времеподобните меридианни повърхнини. Повърхнините от първия клас (съотв. от втория клас) са примери за времеподобни повърхнини в  $\mathbb{R}_1^4$  с диагонализируемо (съотв. недиагонализируемо) изображение на Вайнгартен. За изследването на повърхнините от всеки клас докторантът е приложил съответната локална теория, разработена в първа глава. Така, повърхнините от първия клас (съотв. от втория клас) са изучавани като са параметризирани спрямо главните линии (съотв. спрямо изотропни параметри). Аналитично са характеризирани много видове повърхнини с допълнителни условия за Гаусовата и средната кривина, за нормалната свързаност, за векторното поле на средната кривина, за инвариантата  $k$  на изображението на Вайнгартен. Експлицитно са дадени плоските меридианни повърхнини от елиптичен тип и тези с ненулева постоянна Гаусова кривина.

## 4 Преценка на публикациите по дисертационния труд

Виктория Бенчева-Петрова е представила 3 статии, в които са публикувани основните резултати на дисертационния труд. Всички статии са на английски език и са публикувани в рецензирани и индексирани в Web of Science научни списания, от които 2 в Q2 и 1 в Q4. Представените публикации надхвърлят съществено изискванията на Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и за заемане на академични длъжности в БАН и на съответния Правилник в ИМИ-БАН.

## 5 Бележки и препоръки

Настоящият дисертационен труд е оформен добре в структурно и техническо отношение. Изложението се отличава с логическа последователност и точен научен стил. Имам следните забележки, които не оказват съществено влияние върху резултатите в дисертацията: Твърденията (i) и (ii) от Теорема 2.1.4. би следвало да отпаднат, защото са в противоречие с условията за функциите  $f$  и  $g$  от дефинициите на обобщени ротационни повърхнини от първи и втори тип; Добре е да се уточни какво се разбира под движение в  $\mathbb{R}_1^4$ . Препоръката ми към докторанта е в бъдещите изследвания да илюстрира и подкрепя доказаните твърдения с повече експлицитни примери.

## 6 Заключение

Резултатите в дисертационния труд са нови, съдържателни и значими. Представеният дисертационен труд и научните публикации към него отговарят напълно на изискванията на Закона за развитие на академичния състав в Република България, Правилника за неговото прилагане, Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и за заемане на академични длъжности в БАН и на съответния Правилник в ИМИ-БАН.

Поради гореизложеното, убедено давам своята **положителна** оценка за проведеното изследване, постигнатите резултати и приноси и **предлагам** на почитаемото научно жури да присъди образователната и научна степен **”доктор”** на **Виктория Герасимова Бенчева-Петрова** в област на висше образование 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление 4.5. Математика, докторска програма **”Геометрия и топология”**.

26. 08. 2024

Член на научното жури:

В. Търново

(проф. д-р Галя Накова )