

# БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Секция “Образование по математика и информатика”

Масаюки Ватанабе

Възможност за обучение по съвременна геометрия чрез арбелоси и Васан

## А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

на ДИСЕРТАЦИОНЕН ТРУД

за присъждане на образователната и научна степен “доктор”  
област на Висше образование 1. Педагогически науки  
професионално направление 1.3. Педагогика на обучението по ...  
научна специалност 05.07.03 “Методика на обучението по математика”

Научен консултант  
проф. дпн Сава Гроздев

Научно жури: проф. дпн Йордан Табов, проф. дпн Сава Гроздев, проф. д-р Асен Рахнев,  
проф. д-р Илия Гюдженев, проф. д-р Димитър Мекеров

Защитата е насрочена за 27 септември (вторник) 2011 г. от 11:00 ч. и ще се проведе  
в Заседателната зала на ИМИ-БАН, ул. Акад. Г. Бончев, бл. 8, 1113 София

София, 2011 г.

## СЪДЪРЖАНИЕ

<b>Въведение</b>	<b>4</b>
<b>1 Васан геометрия</b>	<b>5</b>
1.1 История на Васан	5
1.1.1 Зората на Васан	5
1.1.2 Развитието на Васан	6
1.1.3 Опит за пресмятане на $\pi$	10
1.1.4 Безкрайни редове: пресмятане на дъга	12
1.1.5 Упадъкът на Васан	14
1.2 Геометрията на Васан	15
1.2.1 Характеристики на Васан геометрията	15
1.2.2 Сангаку	17
1.2.1 Примери, свързани със западната математика	18
1.3 Васан задачи, отнасящи се до арбелоса	25
1.3.1 Примери, свързани с обичаен арбелос в кратни части	26
1.3.2 Примери, свързани с обобщен арбелос от пресекателен тип	28
1.3.3 Примери, свързани с обобщен арбелос от непресекателен тип	31
1.3.4 Примери, свързани със сандвич-окръжност	33
1.3.5 Пример за наклонен арбелос	35
<b>2 Обобщение на арбелос</b>	<b>36</b>
2.1 Обобщен арбелос в $n$ -кратни части	36
2.1.1 Коаксиална система с фиксирана точка	37
2.1.2 Вписани окръжности, ортогонални окръжности и описани окръжности	41
2.1.3 Обобщен арбелос от положителен тип	48
2.1.4 Обобщен арбелос от нулев тип	50
2.1.5 Обобщен арбелос от отрицателен тип	51
2.1.6 Вписани вериги в обобщен арбелос	55

2.1.7 Някои приложения	63
2.2 Нови архимедови окръжности	48
2.2.1 Непрекъснатата фамилия архимедови окръжности	66
2.2.2 Архимедови окръжности от типа на Шох	76
2.2.3 Архимедови окръжности от типа на Ву	80
2.2.4 Окръжности от типа на Повер	84
2.3 Наклонен арбелос и окръжности близнаци	87
2.3.1 Наклонен арбелос	87
2.3.2 Вериги тангенциални окръжности в наклонен арбелос	87
2.3.3 $n$ -и архимедови окръжности-близнаци (симетричен случай)	91
2.3.4 $n$ -и архимедови окръжности-близнаци (несиметричен случай)	96
2.3.5 Съотношение между два наклонени арбелоса	101
2.3.6 Още едно свойство на окръжности-близнаци	105
<b>3 Обобщеният арбелос в образованието</b>	<b>36</b>
3.1 Нова методика на основата на обобщения арбелос	113
3.1.1 Обобщението в математиката	113
3.1.2 Обобщението в математическото образование	114
3.1.3 Нов метод, ползващ обобщения арбелос	115
3.1.4 Една лекция за арбелоса и архимедовите окръжности	116
3.2 Педагогически експеримент I: арбелос в кратни части	121
3.3 Педагогически експеримент II: обобщен арбелос	131
3.4 Изводи	141

<b>4 Арбелос и информатика</b>	<b>143</b>
4.1 Анимация на обобщена окръжност на Шох .....	143
4.2 Анимация на обобщена окръжност на Повер .....	143
4.3 Анимация на архимедова окръжност, минаваща през фиксирана точка .....	150
4.4 Анимация на окръжности-близнаци в арбелос .....	153
4.5 Анимация на вписана верига окръжности .....	155
4.6 Анимация на поверови двойки окръжности .....	157
4.7 Анимация на обичайни архимедови окръжности ...	162
4.8 Анимация на подвижни архимедови окръжности в обобщен арбелос .....	164
4.9 Анимация на неархимедови окръжности-близнаци .....	167
4.10 Изводи .....	171

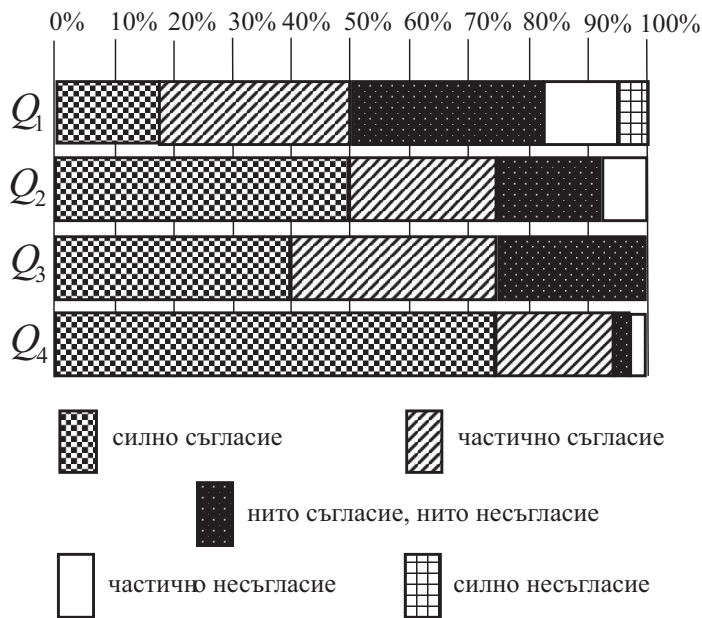
„Обобщение“ на теория или даже само на понятие играе важна роля в развитието на математиката. „Цялостното развитие на математиката следва пътя на непрекъснатите обобщения“ ([5]). Едно обобщение предоставя нови стартови позиции за по-нататъшни обобщения, а последователните обобщения ускоряват развитието на математиката. Обобщенията са много важна част от математическите изследвания.

От гледна точка на математическото образование особено важно е да се създава среда, в която учениците, следвайки обобщение на едно понятие, в рамките на техните възможности да конструират нова теория. Едно добре организирано обобщение разширява кръгозора на учениците за обхващане на понятията от различни страни и подпомага по-задълбоченото им усвояване. От тази позиция предлагаме нова методология в математическото образование, в основата на която е новосъздадената теория на обобщения арбелос. Разработването на теорията на обобщения арбелос в  $n$ -кратни части е един първичен модел в абстрактната математика, но разглежданите в него обекти са конкретни, например прави и окръжности. В абстрактния модел като конкретен пример за *трансформация* е взета инверсията, а с коаксиална система се илюстрира понятието *семејство (фамилия)*. Така методологията има целева група, включваща ученици от горния курс с ориентация към професия от изследователските профили в природните науки и математиката, както и студенти от природонаучните профили.

Авторът е провел кратка лекция за ученици, на основата на разработената теория, както и четири цикъла лекции за студенти. Поради обема си, лекцията за ученици е ограничена до въвеждаща част и обяснение на рамката на теорията, като са приведени примери. Независимо от това, някои от идеите и трактовките се оказаха интересни за учениците и много от тях се мотивираха за по-нататъшни занимания с математика. Това беше установено от споделените впечатления на учениците в

проведените след лекциите анкети. Важна задача, преследвана с лекциите, беше повишаването на интереса към геометрията и мотивирането на учениците за допълнително изучаване на геометрията по начин, различен от изградените им вече стереотипи.

Резултати от анкетите  
(докладвани през 2008 на ССХ, Гимназията в Такаши)



Целите на втория и третия цикъл лекции бяха:

- студентите да осмислят понятието трансформация на фигури, особено *инверсия* и да се прилага в решаването на задачи;
- студентите да осмислят обобщението на арбелоса с архимедови двойки до арбелос в кратни части;
- студентите да получат нови резултати.

Ето и съдържанието на лекциите.

**Лекция 1. Кратък тест, въведение и предварителни сведения.**

Включени са: исторически сведения за задачата за арбелоса, включително теоремата на Пап; откритите наскоро архимедови окръжности; основни свойства на инверсията.

**Лекция 2. Упражнения върху инверсия и доказателство на теоремата на Пап.**

Студентите се упражняват да чертаят образа на фигура при инверсия. Като приложение доказват теоремата на Пап.

**Лекция 3. Пресмятане на параметрите на образите на права и окръжност при инверсия.**

Решават се задачи за изразяване на параметрите на образите на права и окръжност при инверсия. Като приложение студентите доказват теоремата на Банков за третата окръжност.

**Лекция 4. Пресмятане на радиусите на двойката архимедови окръжности-близнаци.**

Решават се задачи за пресмятане на радиусите на двете архимедови окръжности-близнаци, като първа стъпка в обобщения арбелос; пресмятането на двукратни части се дава като приложение на инверсията. Студентите установяват еднаквост на двете архимедови окръжности-близнаци.

**Лекция 5. Приложение на инверсията в задачи сангаку.**

Решават се задачи сангаку, където инверсията дава съществени предимства.

**Лекция 6. Обобщена теорема на Шох.**

В лекцията последователно се върви към доказателството на обобщение на теоремата на Шох, където арбелосът е от тангенциален тип (обикновен арбелос). Първо се разглеждат задачи от [17] за окръжност на Шох и архимедова окръжност. След това се поставя задача за обобщаване на резултатите.

**Лекция 7. Трикратен арбелос.**

Целта на лекцията е да се намерят условия за разделяне на

обичайния арбелос на трикратен и да се пресметнат радиусите на архимедовите окръжности в трикратния арбелос. Вместо да решават задачата както в предната лекция, на студентите се подсказва да използват геометрична прогресия.

### **Лекция 8. $n$ -кратен арбелос.**

Целта на лекцията е да се обобщят резултатите от лекция 7. Методът от лекция 7 е достатъчно общ, което улеснява обобщенията. Всички студенти се справят.

След цикъла лекции студентите намериха ново семейство архимедови окръжности, описано в следната теорема, в доказателството на която се използва инверсия([4]).

*Теорема.* Нека  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  са окръжности съответно с радиуси  $a$ ,  $b$  и  $g$ , формиращи (обичаен) арбелос. Нека  $\alpha'$  и  $\beta'$  са окръжности, съответно с радиуси  $a'$  и  $b'$ , външно допиращи се в точката на допиране на  $\alpha$  и  $\beta$ . Тогава сандвич-окръжността в  $\alpha'$  и  $\beta'$ , която е ортогонална на  $\gamma$ , е архимедова окръжност тогава и само тогава, когато

$$\frac{3a + b}{2a'} + \frac{a + 3b}{2b'} = 1$$

и сандвич-окръжността, вписана в  $\gamma$ , е архимедова окръжност, точно когато

$$\frac{2a + b}{a'} + \frac{a + 2b}{b'} = 1.$$

Целта на четвъртия цикъл лекции беше

- да се осмисли понятието коаксиална система;
- да се вникне в процеса на обобщение на арбелоса до обобщен арбелос и да се открият инварианти при този процес;
- да се формулират нови задачи.

Съдържанието на лекциите от този цикъл беше следното.

**Лекция 1. Кратък тест, въведение и придварителни сведения.**



Въвеждане на обобщения арбелос, като се използват фигури сангаку; основни свойства на коаксиална система.

### **Лекция 2. Изучаване на коаксиална система.**

Канонична форма на коаксиална система и класификация на тази основа на коаксиалните системи. Една от целите е студентите да усвоят каноничната форма чрез упражнения.

### **Лекция 3. Обобщения на архимедови окръжности-близнаци в пресекателен тип.**

Целта на лекцията е да се изразят радиусите на архимедовите окръжности в 2-кратни части в обобщен арбелос от пресекателен тип с 2 инварианти. Първата инварианта е радиусът на външната окръжност; ключовият въпрос е да се намери втората инварианта.

### **Лекция 4. Обобщения на архимедови окръжности-близнаци в непресекателен тип.**

Целта на лекцията е да се изразят радиусите на архимедовите окръжности в 2-кратни части в обобщен арбелос от непресекателен тип с 2 инварианти. Ключовият въпрос в този случай е да се осмисли втората инварианта. Появява се понятието „радикална окръжност“, което е централно за тази теория.

### **Лекция 5. Архимедова окръжност в 1-кратна част в обобщен арбелос.**

Целта на лекцията е да се изрази радиусът на архимедова окръжност в 1-кратна част със същите инварианти, както в предната лекция. Важно е да се отбележи, че във всеки от случаите изразите са подобни.

### **Лекция 6. Архимедова окръжност в 4-кратни части в обобщен арбелос.**

Целта на лекцията е да се изрази радиусът на архимедова окръжност в 4-кратна част със същите инварианти. Резултатите, получени в лекции 3-6, се обединяват с използването на радиуса на външната окръжност и на радикалната окръжност. Решавайки задачите в тези лекции, студентите осъзнават важ-

ността на радикалната окръжност.

**Лекция 7. Приложение на обобщен арбелос от пресекателен тип в задачи сангаку.**

На студентите са дадени задачи сангаку, отнасящи се до обобщен арбелос от пресекателен тип, включващи примери 1.3.6 и 1.3.9.

**Лекция 8. Приложение на обобщен арбелос от непресекателен тип в задачи сангаку.**

Като упражнение са дадени задачи сангаку, отнасящи се до обобщен арбелос от непресекателен тип, включен пример 1.3.12.

**Лекция 9. Верига на Щайнер; едно приложение на инверсия и коаксиална система.**

Тема на лекцията е доказателство на теоремата на Щайнер. То се прави като приложение на инверсия и коаксиална система. Студентите се справят с доказателството, независимо, че не е свързано с теорията на обобщения арбелос.

По време на лекциите студентите откриват следния факт.

*Съотношението между  $a$  и  $d$  на фигурата от пример 1.3.6 е същото, както в пример 1.3.9. Това означава, че трите окръжности  $C_j$  в пример 1.3.6 са еднакви, точно когато шестте окръжности  $C_j$  в пример 1.3.9 са еднакви.*

Нещо повече, студентите съставят нови задачи за обобщен арбелос от непресекателен тип в 1-кратна част. Обобщеният арбелос, който се появява в една от тях, е същият, както в пример 1.3.12.

Първият цикъл лекции беше комбиниране на лекциите от дадените по-горе три цикъла.

Във втория и третия цикъл лекции студентите се научиха да разширяват понятието архимедови окръжности-близнаци до архимедови окръжности в  $n$ -кратни части по алгебричен

път, използвайки геометрична прогресия. Като резултат студентите сами откриваха нови архимедови окръжности.

В третия цикъл лекции студентите се запознаха с процеса на обобщаване на понятието арбелос в обобщен арбелос от гледна точка на „радикална окръжност“. По време на лекциите те откриха интересно свойство, свързвайки две фигури, появяващи се отделно в задачи сангаку. Нещо повече, те успяха да съставят нови задачи за пакетиране на окръжности по аналог на задачи сангаку.

Основен инструмент при конструиране на теорията в лекциите беше „инверсия“, а основно понятие, на което се изграждаше теорията, беше „коаксиална система“. По време на лекциите студентите станаха доста сръчни в боравенето с инверсия като средство за доказателства; тази дейност разви тяхната интуиция при работата с геометрични обекти. Те се запознаха отблизо с понятието „коаксиална система“, като едно от многото математически понятия, позволяващи разглеждането на един обект не като изолиран, а във взаимовръзката му с други обекти.

Лекциите бяха организирани като на студентите се даваха основни обяснения, след което те трябваше да решават задачи. В различен контекст, като упражнения бяха включвани задачи от Васан геометрията. Голяма част от Васан задачите подпомагат студентите в усвояване на теорията и ефективното използване на математическия инструментариум.

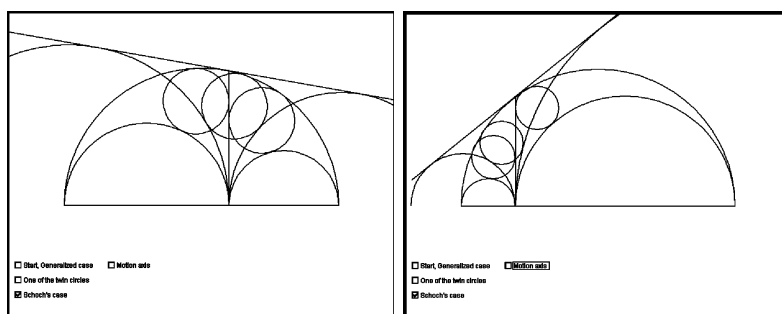
Нашето убеждение е, че един ефективен метод в математическото образование е преподаване, при което се обобщава подходяща теория или понятие, като това става стъпка по стъпка. Така се развива интуицията на студентите, подобряват се възможностите им да се изразяват, да формират тяхна гледна точка и се мотивират да учат повече. Считаме, че един добър методически материал за такова преподаване е теорията за обобщаване на арбелоса до обобщен арбелос в  $n$ -кратни час-

ти.

Фигурите, открити в теорията на обобщения арбелос, могат да се прилагат също и в обучението по информатика. Теоретичните резултати предоставят много материал за програмиране. Ще покажем някои примери на анимация, програмирани на Java, където са използвани тези материали. Те се основават на теоремите от теорията, а варирайки условията, се илюстрира и смисълът на теоремите. Всяко от заданията за програмиране е възлагано на студенти от Технологичния институт в Маебаши като тема на дипломна работа.

### 1. Анимация на обобщена окръжност на Шох.

Примерът се основава на теорема 2.2.3. Окръжността  $C(m, n)$  се движи непрекъснато по външната полуокръжност, при което реалните числа  $m$  и  $n$  удовлетворяват условието  $1/m + 1/n = 1$ .



### 2. Анимация на обобщени окръжности на Повер.

Примерът се основава на теорема 2.2.10.

3. Анимация на архимедова окръжност, минаваща през фиксирана точка.

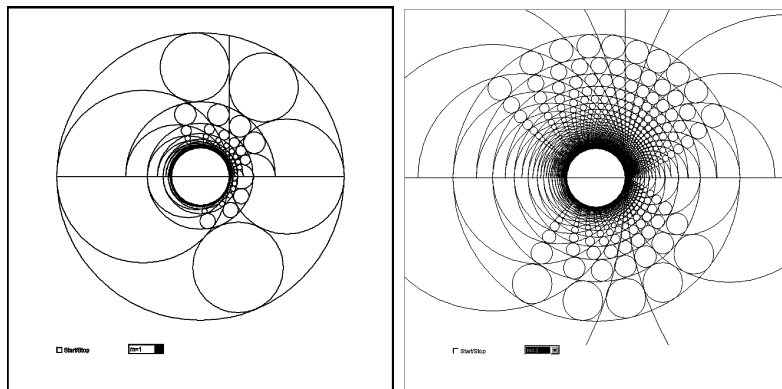
Примерът се основава на теорема 2.2.9.

4. Анимация на архимедови окръжности-близнаци в арбелос.

Примерът се основава на теореми 2.3.4 и 2.3.6.

### 5. Анимация на вписани вериги от окръжности.

Примерът се основава на теорема 2.1.9. Двете вериги са показани едновременно на един прозорец, отразени от диаметър на външната окръжност. Така е визуализирано следствие 2.1.5.



### 6. Анимация на двойка окръжности на Повер.

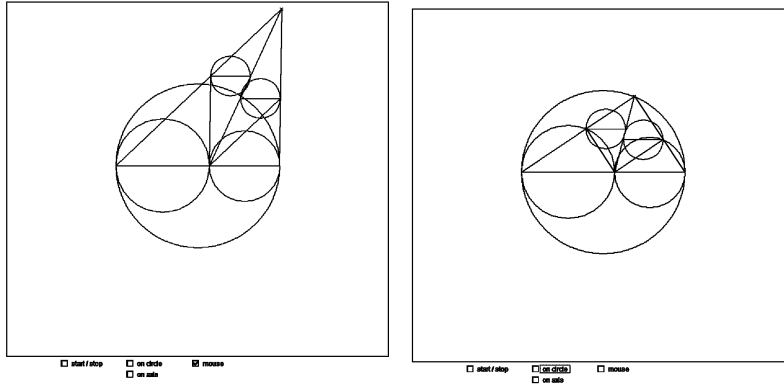
Примерът се основава на теорема 2.2.11.

### 7. Анимация на обикновена архимедова окръжност.

Примерът се основава на следната теорема.

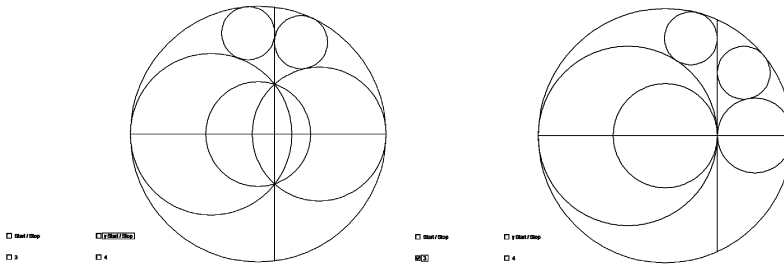
**Теорема 4.6.1.** Нека трите окръжности  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  образуват обикновен арбелос. За произволна точка  $D$ , нележаща на правата  $AB$ , разглеждаме точки  $P$  и  $Q$ , лежащи съответно на отсечките  $AD$  и  $BD$ , така че точките  $O$ ,  $P$ ,  $D$  и  $Q$  са върхове на успоредник. Нека  $P'$  и  $Q'$  са точки от отсечката  $OD$ , такива че правите  $PP'$  и  $QQ'$  са успоредни на  $AB$ . Тогава окръжностите с диаметри  $PP'$  и  $QQ'$  са архимедови окръжности. Ако точката  $D$  лежи на  $\gamma$ , то  $P$  лежи на  $\alpha$ ,  $Q$  лежи на  $\beta$  и точките  $O$ ,  $P$ ,  $D$  и  $Q$  са върхове на правоъгълник.

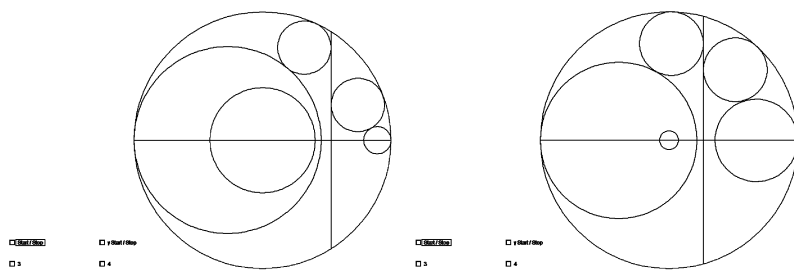
Точката  $D$  може да се избере произволно с цъкане с мишката и да се влачи свободно. Архимедовите окръжности могат да бъдат разположени в произволно положение.



8. Анимация на архимедови окръжности в обобщен арбелос.

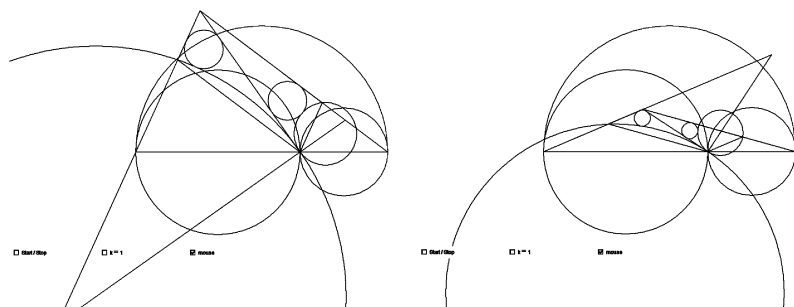
Примерът се основава на теорема 2.2.1. Окръжностите-близнаци се движат непрекъснато по външната окръжност, докато радикалната ос се движи по абсцисната ос. Необходимите данни се получават от две концентрични окръжности (външната окръжност на един арбелос и радикалната окръжност).





### 9. Анимация на неархимедови окръжности-близнаци.

Примерът се основава на теореми 2.3.9, 2.3.10 и 2.3.11. Точката  $J$  се мести свободно с мишката. Окръжностите-близнаци се движат непрекъснато, когато  $J$  се мести. В зависимост от положението на  $J$  се използват различни пресмятания.



Както беше отбелязано, във всеки от примерите, базиращ се на теорията на обобщения арбелос, от студентите, които правеха съответната програма, се изискваха различни нови идеи и похвати. За да менят радиуса на вътрешната окръжност на един арбелос при фиксирана външна окръжност, студентите трябваше да съставят нови функции за чертане на права и да построяват окръжности в относителни координати. Те трябваше да въведат различни параметри, за да движат с постоянна скорост архимедова окръжност по дадена окръжност, разрешавайки положението на окръжностите стъпка по стъпка.

Една от целите, които им се поставяха, беше да онагледят значението на съответните теореми и свойствата на фигурите с подходяща анимация. За тази цел се изискват идеи. В процеса на осъзнаването на тези идеи студентите подобриха значително уменията си в програмирането. Това показват програмите от приведените примери. Програмирането помагаше на студентите да вникват по-дълбоко в математическата теория. Те имаха основни познания по Java, но не бяха специалисти по математика. Почти всички започнаха да изучават основите на теорията на арбелоса, когато подхващаха дипломните си работи. За кратко време всеки студент трябваше да ги усвои, а също да се задълбочи в специалния въпрос, който му беше даден за програмиране. Покрай това, във всяко задание имахме и много детайли, изискващи отделни пресмятания, например, построяване на фигурата на подходящо място на екрана и плавното ѝ придвижване. Такива пресмятания не се появяваха непосредствено в теорията, но можеха да бъдат направени след по-задълбочено вникване в нея. Някои стойности, необходими за програмите, бяха изключително трудни за непосредствено пресмятане, затова студентите трябваше да търсят други пътища за пресмятането им, така че да се съгласуват с дизайна на съответната програма. По време на този процес с подходящи съвети студентите достигаха до по-дълбоко разбиране на теорията. За студенти с начални познания в програмирането това беше ефективен начин за обучение едновременно в програмирането и геометрията: да се направи компютърна програма, като се изучи нова геометрична теория и се третират нови обекти, появяващи се в теорията. Теорията на обобщения арбелос предоставя добър материал в тази насока.



По-долу ще очертаем контура на теорията на обобщения арбелос, която е в основата на изложените методи.

За дадена коаксиална система  $\Phi$  и точка  $E$  върху права, минаваща през центровете на окръжностите от  $\Phi$ , двойката  $(\Phi, E)$  ще наричаме коаксиална система с фиксирана точка. Ще означаваме с  $L$  и  $L'$  пресечните точки на окръжностите, ако  $\Phi$  е от пресекателен тип, граничните точки на  $\Phi$ , ако е от непресекателен тип и допирната им точка, ако  $\Phi$  е от тангенциален тип (в последния случай  $L = L'$ ).

Окръжността  $\varepsilon$  от  $\Phi$  с център  $E$  ще наричаме радикална окръжност на коаксиалната система с фиксирана точка  $(\Phi, E)$ . Тя може да е също точка или мнима окръжност. Ще казваме, че  $(\Phi, E)$  е от положителен, нулев или отрицателен тип, ако  $\varepsilon$  е съответно действителна окръжност, точка или мнима окръжност. Нека  $f$  е положително число, за което  $f^2 = |EL| \cdot |EL'|$ . Тогава радиусът на  $\varepsilon$  е:  $f$ , когато  $(\Phi, E)$  е от положителен тип;  $0$ , ако е от нулев тип;  $fi$ , ако е от отрицателен тип.

По-нататък ще разглеждаме координатна система, на която правата през центровете на окръжностите от  $\Phi$  е абсцисна ос и радикалната ос на  $\Phi$  е ординатна ос. Тогава всяка окръжност от коаксиалната система  $\Phi$  има уравнение  $x^2 - 2kx + y^2 + c = 0$ , където реалното число  $k$  се определя еднозначно от всяка окръжност от  $\Phi$ , а реалното число  $c$  се определя еднозначно от коаксиалната система  $\Phi$ . Ще означаваме с  $\Phi_c$  коаксиалната система, съответна на реалното число  $c$ . Нека  $e$  е абсцисата на точката  $E$ . Тогава коаксиалната система с фиксирана точка  $(\Phi_c, E)$  е от положителен, нулев или отрицателен тип, ако  $e^2 - c > 0$ ,  $e^2 - c = 0$  или  $e^2 - c < 0$  съответно.

**Определение 2.1.1** За  $\alpha \in \Phi_c$  дефинираме  $\mu_E(\alpha)$ , както следва:

за  $e^2 - c = 0$ ,

$$\mu_E(\alpha) := \begin{cases} \frac{1}{e-a} & \text{ако } \alpha \text{ е окръжност} \\ 0 & \text{ако } \alpha \text{ е радикалната ос,} \end{cases}$$

за  $e^2 - c > 0$ ,

$$\mu_E(\alpha) := \begin{cases} \frac{a-e-\sqrt{e^2-c}}{a-e+\sqrt{e^2-c}} & \text{ако } \alpha \text{ е окръжност} \\ 1 & \text{ако } \alpha \text{ е радикалната ос,} \end{cases}$$

за  $e^2 - c < 0$ ,

$$\mu_E(\alpha) := \begin{cases} \frac{a-e-\sqrt{c-e^2}i}{a-e+\sqrt{c-e^2}i} & \text{ако } \alpha \text{ е окръжност} \\ 1 & \text{ако } \alpha \text{ е радикалната ос,} \end{cases}$$

Стойността на  $a$  се определя по следния начин:

- ако  $\Phi_c$  е от пресекателен тип, то  $a$  е абсцисата на пресечната точка на  $\alpha$  с абсцисната ос, възниква за  $\varepsilon$ ;
- ако  $\Phi_c$  е от непресекателен тип, то  $a$  е абсцисата на пресечната точка на  $\alpha$  с абсцисната ос, лежаща извън отсечката с краища граничните точки;
- ако  $\Phi_c$  е от тангенциален тип, то  $a$  е абсцисата на пресечната точка на  $\alpha$  с абсцисната ос, различна от началото.

**Определение 2.1.3.** Нека  $\alpha$  и  $\beta$  са окръжности от  $\Phi_c$ .

$$\alpha < \beta \stackrel{def}{\iff} \begin{cases} \mu_E(\alpha) < \mu_E(\beta) & \text{ако } e^2 - c \geq 0 \\ b' < a' & \text{ако } e^2 - c < 0, \end{cases}$$

където  $a'$  (съответно  $b'$ ) е пресечната точка на  $\alpha$  (съответно  $\beta$ ) с абсцисната ос, която лежи между граничните точки.

Нека  $\alpha, \beta \in \Phi_c$  и  $\alpha < \beta$ . Областта  $(\bigcup_{\alpha \leq \delta \leq \beta} \delta) \cap \mathcal{A}_\varepsilon$ , където  $\mathcal{A}_\varepsilon$  е отвореното множество външно за  $\varepsilon$ , ще означаваме с  $\mathcal{S}(\alpha; \beta)$  и ще я наричаме *сандвич-област* в  $\alpha$  и  $\beta$ . Нека освен това  $\alpha, \beta \notin \mathbf{R}^2 \setminus \mathcal{A}_\varepsilon$ , окръжността  $\mathcal{C}$  ще наричаме *сандвич-окръжност* в  $\alpha$  и  $\beta$ , ако се допира едновременно до  $\alpha$  и  $\beta$  и вътрешността на кръга ѝ се съдържа в  $\mathcal{S}(\alpha; \beta)$ .

**Теорема 2.1.1** ([13],[18],[19]) *Нека  $\mathcal{C}$  е сандвич-окръжност в  $\alpha$  и  $\beta$  и нека  $\gamma$  е окръжност с център  $E$  и радиус  $g$ , съдържаща се в  $\mathcal{A}_\varepsilon$ . Тогава:*

*когато  $\mathcal{C}$  се допира вътрешно до  $\gamma$ , радиусът на  $\mathcal{C}$  е*

$$\begin{cases} \frac{(g^2 - e^2 + c)(\mu_E(\beta) - \mu_E(\alpha))}{2((g + \sqrt{e^2 - c})\mu_E(\beta) - (g - \sqrt{e^2 - c})\mu_E(\alpha))}, & \text{ако } e^2 \neq c, \\ \frac{g^2(\mu_E(\beta) - \mu_E(\alpha))}{2(1 + g(\mu_E(\beta) - \mu_E(\alpha)))}, & \text{ако } e^2 = c; \end{cases}$$

*когато  $\mathcal{C}$  пресича ортогонално  $\gamma$ , радиусът на  $\mathcal{C}$  е*

$$\begin{cases} \frac{(g^2 - e^2 + c)(\mu_E(\beta) - \mu_E(\alpha))}{2\sqrt{e^2 - c}(\mu_E(\beta) + \mu_E(\alpha))}, & \text{ако } e^2 \neq c, \\ \frac{1}{2}g^2(\mu_E(\beta) - \mu_E(\alpha)), & \text{ако } e^2 = c; \end{cases}$$

*когато  $\mathcal{C}$  се допира външно до  $\gamma$ , радиусът на  $\mathcal{C}$  е*

$$\begin{cases} \frac{(g^2 - e^2 + c)(\mu_E(\beta) - \mu_E(\alpha))}{2(-(g - \sqrt{e^2 - c})\mu_E(\beta) + (g + \sqrt{e^2 - c})\mu_E(\alpha))}, & \text{ако } e^2 \neq c, \\ \frac{g^2(\mu_E(\beta) - \mu_E(\alpha))}{2(1 - g(\mu_E(\beta) - \mu_E(\alpha)))}, & \text{ако } e^2 = c. \end{cases}$$

Сега да разгледаме три окръжности  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ , такива че центровете им са колинеарни,  $\alpha$  и  $\beta$  лежат вътре в  $\gamma$  и се допират до  $\gamma$  в различни точки. Такава конфигурация ще наричаме *обобщен арбелос*, образуван от  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ . По-нататък с  $\Phi_c$  ще отбелязваме коаксиална система, породена от  $\alpha$  и  $\beta$ , а с  $E$  – центъра на  $\gamma$ .

Нека  $n$  е естествено число и нека  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$  са окръжности от коаксиалната система  $\Phi_c$  с  $\alpha < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n-1} < \beta$  във  $(\Phi_c, E)$ . Конфигурацията  $\{\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n = \beta, \gamma\}$  ще наричаме *обобщен арбелос в  $n$ -кратни части* в следните случаи:

- ако коаксиалната система с фиксирана точка  $(\Phi_c, E)$  е от положителен или отрицателен тип и редицата  $\mu_E(\alpha_0), \mu_E(\alpha_1), \dots, \mu_E(\alpha_n)$  е геометрична прогресия;
- ако коаксиалната система с фиксирана точка е от нулев тип и редицата е аритметична прогресия.

По теорема 2.1.1 тези условия са еквивалентни на условието сандвич-окръжностите  $\alpha_{j-1}$  и  $\alpha_j$  вписани в  $\gamma$  да са еднакви. Всяка от тези окръжности ще наричаме *архимедова окръжност в  $n$ -кратни части*. Сандвич-окръжностите в  $\alpha_{j-1}$  и  $\alpha_j$ , които са ортогонални (съответно вписани) в  $\gamma$ , са също еднакви; ще ги наричаме *ортогонални* (съответно *вписани*) *архимедови окръжности в  $n$ -кратни части*.

Нека  $\{\alpha = \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n = \beta, \gamma\}$  е обобщен арбелос в  $n$ -кратни части и нека  $g$  е радиусът на  $\gamma$ .

**Теорема 2.1.3.** ([13],[18],[19]) Нека  $e^2 - c > 0$ . Тогава радиусите на архимедовите окръжности в  $n$ -кратни части са

$$\frac{(g^2 - f^2) \left( (g + f)^{\frac{2}{n}} - (g - f)^{\frac{2}{n}} \right)}{2 \left( (g + f)(g + f)^{\frac{2}{n}} - (g - f)(g - f)^{\frac{2}{n}} \right)}.$$

Радиусите на ортогоналните архимедови окръжности в  $n$ -кратни части са

$$\frac{(g^2 - f^2) \left( (g + f)^{\frac{2}{n}} - (g - f)^{\frac{2}{n}} \right)}{2f \left( (g + f)^{\frac{2}{n}} + (g - f)^{\frac{2}{n}} \right)}.$$

Радиусите на вписанните архимедови окръжности в  $n$ -кратни части са

$$\frac{(g^2 - f^2) \left( (g + f)^{\frac{2}{n}} - (g - f)^{\frac{2}{n}} \right)}{2 \left( -(g - f)(g + f)^{\frac{2}{n}} + (g + f)(g - f)^{\frac{2}{n}} \right)}.$$

$\{\mu_E(\alpha_j)\}_{0 \leq j \leq n}$  е  $((g + f)/(g - f))^{2/n}$ . Сега резултатът следва от теорема 2.1.1.  $\square$

**Теорема 2.1.5.** ([13],[19]) Нека  $e^2 - c = 0$ . Тогава радиусите на архимедовите окръжности в  $n$ -кратни части са  $\frac{g}{n+2}$ .

Радиусите на ортогоналните (съответно вписаните) архимедови окръжности в  $n$ -кратни части са  $\frac{g}{n}$  (съответно  $\frac{g}{n-2}$ ).

**Теорема 2.1.7** ([19]) Нека  $e^2 - c < 0$ . За  $\eta = \text{Arg}(g + fi)$  имаме  $0 < \eta \leq \frac{\pi}{4}$ . Тогава радиусите на архимедовите окръжности в  $n$ -кратни части са

$$\frac{(g^2 + f^2) \left( \exp\left(\frac{2\eta}{n}i\right) - \exp\left(-\frac{2\eta}{n}i\right) \right)}{2 \left( (g + fi) \exp\left(\frac{2\eta}{n}i\right) - (g - fi) \exp\left(-\frac{2\eta}{n}i\right) \right)}.$$

Радиусите на ортогоналните архимедови окръжности в  $n$ -кратни части са

$$\frac{(g^2 + f^2) \left( \exp\left(\frac{2\eta}{n}i\right) - \exp\left(-\frac{2\eta}{n}i\right) \right)}{2f \left( \exp\left(\frac{2\eta}{n}i\right) + \exp\left(-\frac{2\eta}{n}i\right) \right) i}.$$

Радиусите на вписаните архимедови окръжности в  $n$ -кратни части са

$$\frac{(g^2 + f^2) \left( \exp\left(\frac{2\eta}{n}i\right) - \exp\left(-\frac{2\eta}{n}i\right) \right)}{2 \left( -(g - fi) \exp\left(\frac{2\eta}{n}i\right) + (g + fi) \exp\left(-\frac{2\eta}{n}i\right) \right)}.$$

Нека  $\alpha_j, \beta_j \in \Phi_c$ , като

$$\dots < \alpha_{-n} < \dots < \alpha_{-1} < \alpha_1 < \dots < \alpha_n < \dots$$

и

$$\dots < \beta_{-n} < \dots < \beta_{-1} < \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_n < \dots.$$

Конфигурацията от окръжности

$$\{\dots, \alpha_{-n}, \dots, \alpha_{-1}, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots, \gamma_1, \gamma_3, \dots, \gamma_{2n-1}, \dots\}$$

ще наричаме *вписана верига от нечетен тип* в обобщения арбелос, ако  $\alpha_{-1} = \alpha, \alpha_1 = \beta, \gamma_1 = \gamma$  и окръжностите

$\alpha_{-n}, \dots, \alpha_{-1}, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \gamma_{2n-1}$  образуват обобщен арбелос в  $(2n - 1)$ -кратни части за всяко естествено число  $n$ .

Аналогично се дефинира *вписаната верига от четен тип*

$$\{\dots, \beta_{-n}, \dots, \beta_{-1}, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n, \dots, \gamma_2, \gamma_4, \dots, \gamma_{2n}, \dots\},$$

където  $\beta_{-1} = \alpha$ ,  $\beta_0$  е радикална ос,  $\beta_1 = \beta$  and  $\gamma_2 = \gamma$ .

**Теорема 2.1.9.** ([13],[18]) *Ако обобщеният арбелос е от пресекателен или тангенциален тип, то в него съществуват вписани вериги от двата типа.*

**Следствие 2.1.5.** ([13],[18])  $\gamma_{2(2n-1)} = \gamma_{2n-1}$ ,  $\alpha_{-n} = \beta_{-(2n-1)}$  и  $\alpha_n = \beta_{2n-1}$ .

Вписани вериги в смисъла на горното определение не съществуват в случая на непресекателен тип, доколкото външната окръжност  $\gamma_n$  за големи  $n$  не съдържа гранична точка на коаксиалната система. Вместо това съществува ограничена верига с краен брой външни окръжности.

**Теорема 2.1.10.** ([19]) *Даден е обобщен арбелос от непресекателен тип. Нека  $m$  е броят на външните окръжности в ограничена вписана верига, съдържащи двете гранични точки. Тогава:*

– ако обобщеният арбелос е от положителен тип, то

$$2m - 1 \leq \frac{\log(|e| + f) - \log(|e| - f)}{2(\log(g + f) - \log(g - f))} \quad (\text{нечетен тип})$$

$$2m \leq \frac{\log(|e| + f) - \log(|e| - f)}{\log(g + f) - \log(g - f)} \quad (\text{четен тип});$$

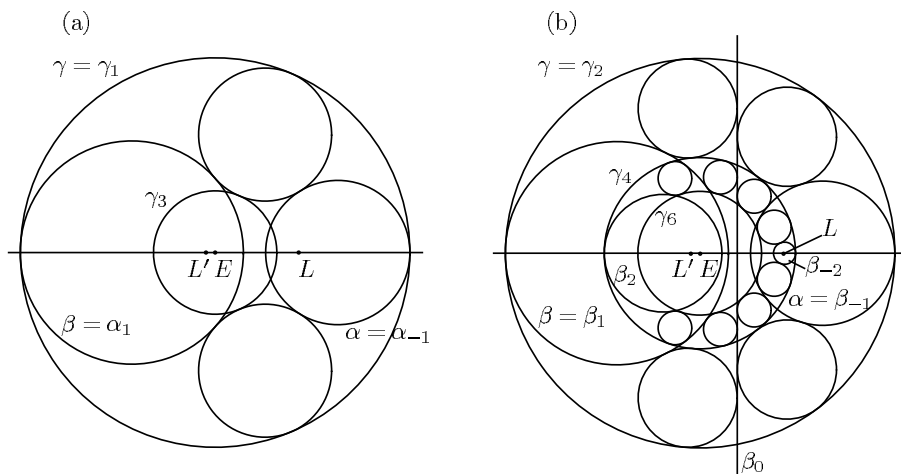
– ако обобщеният арбелос е от нулев тип, то

$$2m - 1 \leq \frac{g}{2|e|} \quad (\text{нечетен тип}) \quad 2m \leq \frac{g}{|e|} \quad (\text{четен тип});$$

– ако обобщеният арбелос е от отрицателен тип, то

$$2m - 1 \leq \frac{\log(|e| + fi) - \log(|e| - fi)}{2(\log(g + fi) - \log(g - fi))} \quad (\text{нечетен тип})$$

$$2m \leq \frac{\log(|e| + fi) - \log(|e| - fi)}{\log(g + fi) - \log(g - fi)} \quad (\text{четен тип}).$$



**Фиг. 1** Ограничени вписани вериги от двата типа в обобщен арбелос от непресекателен тип.

**Следствие 2.1.6.** ([19])  $\gamma_{2(2n-1)} = \gamma_{2n-1}$ ,  $\alpha_{-n} = \beta_{-(2n-1)}$  и  $\alpha_n = \beta_{2n-1}$ .

Следващите две теореми се отнасят за обичайния арбелос.

**Теорема 2.1.11.** ([13]) *Във вписана верига от четен тип за всяко естествено  $n$  общата възнища допирателна към двете окръжности  $\beta_n$  и  $\beta_{-n}$  се допира до окръжността  $\gamma_{4n}$ .*

**Теорема 2.1.12** ([13]) *Нека  $\delta_{2n-1}$  е вписаната окръжност в криволинейния триъгълник, образуван от окръжностите  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma_{2n-1}$  и нека окръжността  $ВК_n$  е ортогонална за  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\delta_{2n-1}$ . Нека  $AR_n$  е вписаната окръжност в криволинейния*

триъгълник, образуван от окръжностите  $\beta_n$ ,  $\beta_0$  и  $\gamma_{2n}$ . Тогава за всяко естествено  $n$  двете окръжности  $BK_n$  и  $AR_n$  са еднакви.

Теорема 2.1.12 обобщава резултата за окръжността на Банков ([1]). Третата окръжност на Банков е окръжността  $BK_1$  от тази теорема.

Като приложение на тези резултати могат да се построяват различни семейства архимедови окръжности. Да предположим, че окръжностите  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  образуват арбелос от тангенциален тип (обичаен арбелос). Нека  $a$  и  $b$  са радиусите на  $\alpha$  и  $\beta$  съответно. Радиусът на архимедовите окръжности-близнаци е  $r_A = ab/(a+b)$ . Окръжност с радиус  $r_A$  наричаме архимедова окръжност.

За  $j \in \mathbf{Z}$  разглеждаме следната конструкция. Окръжностите  $\gamma_j$  и  $\varepsilon_j$  са концентрични съответно с радиуси  $g$  и  $f$ ,  $\gamma_{j-1}$  и  $\gamma_j$  се допират външно и центровете им са колинеарни. Означаваме допирната точка на  $\gamma_{j-1}$  и  $\gamma_j$  с  $P_{2j-1}$ , а центърът на  $\gamma_j$  с  $P_{2j}$ . Нека  $\gamma_0 = \gamma$ ,  $P_1$  е допирната точка на  $\gamma$  и  $\alpha$ ,  $P_{-1}$  е допирната точка на  $\gamma$  и  $\beta$ . Разглеждаме координатна система с абсцисна ос правата през точките  $P_j$  и начало в  $P_0 (= E)$ . Означаваме с  $\Phi^{j,p}$  коаксиалната система, породена от  $\varepsilon_j$  и правата  $x = p$ . Нека  $\alpha_{j,p}$  (съответно  $\beta_{j,p}$ ) е окръжност от  $\Phi^{j,p}$ , вътрешна за  $\gamma_j$  и допираща я в  $P_{2j+1}$  (съответно в  $P_{2j-1}$ ); нека  $C_{j,p}^r$  (съответно  $C_{j,p}^l$ ) са сандвич-окръжности в  $\alpha_{j,p}$  и правата  $x = p$  (съответно правата  $x = p$  и  $\beta_{j,p}$ ) вписана в  $\gamma_j$ . Аналогично, използвайки окръжността  $\alpha_{j,p}^c$  (съответно  $\beta_{j,p}^c$ ) от  $\Phi^{j,p}$ , минаваща през точката  $P_{2j+3}$  (съответно  $P_{2j-3}$ ) вместо  $\alpha_{j,p}$  (съответно  $\beta_{j,p}$ ), определяме сандвич-окръжност  $C_{j,p}^{r,c}$  (съответно  $C_{j,p}^{l,c}$ ), вписана в  $\gamma_j$ . Също така определяме сандвич-окръжност  $C_{j,p}^{r,o}$  (съответно  $C_{j,p}^{l,o}$ ), ортогонална на  $\gamma_j$ , използвайки окръжността  $\alpha_{j,p}^o$  (съответно  $\beta_{j,p}^o$ ) от  $\Phi^{j,p}$ , минаваща през точката  $P_{2j+2}$  (съответно  $P_{2j-2}$ ). По този начин за всяко реално  $p$  определяме шест окръжности, както следва.



$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_A^r(p) &= \begin{cases} \mathcal{C}_{j,p}^r & : j \text{ е четно и } (2j-1)g \leq p \leq (2j+1)g - 2r_A, \\ \mathcal{C}_{j,p}^{r,c} & : j \text{ е нечетно и } (2j-1)g - 2r_A \leq p \leq (2j+1)g. \end{cases} \\
\mathcal{C}_B^r(p) &= \begin{cases} \mathcal{C}_{j,p}^{r,c} & : j \text{ е четно и } (2j-1)g - 2r_A \leq p \leq (2j+1)g, \\ \mathcal{C}_{j,p}^r & : j \text{ е нечетно и } (2j-1)g \leq p \leq (2j+1)g - 2r_A. \end{cases} \\
\mathcal{C}_A^l(p) &= \begin{cases} \mathcal{C}_{j,p}^l & : j \text{ е четно и } (2j-1)g + 2r_A \leq p \leq (2j+1)g, \\ \mathcal{C}_{j,p}^{l,c} & : j \text{ е нечетно и } (2j-1)g \leq p \leq (2j+1)g + 2r_A. \end{cases} \\
\mathcal{C}_B^l(p) &= \begin{cases} \mathcal{C}_{j,p}^{l,c} & : j \text{ е четно и } (2j-1)g \leq p \leq (2j+1)g + 2r_A, \\ \mathcal{C}_{j,p}^l & : j \text{ е нечетно и } (2j-1)g + 2r_A \leq p \leq (2j+1)g. \end{cases} \\
\mathcal{C}_O^r(p) &= \mathcal{C}_{j,p}^{r,o} : (2j-1)g - r_A \leq p \leq (2j+1)g - r_A. \\
\mathcal{C}_O^l(p) &= \mathcal{C}_{j,p}^{l,o} : (2j-1)g + r_A \leq p \leq (2j+1)g + r_A.
\end{aligned}$$

**Теорема 2.2.1.** ([37]) *Окръжностите  $\mathcal{C}_A^r(p)$ ,  $\mathcal{C}_A^l(p)$ ,  $\mathcal{C}_B^r(p)$ ,  $\mathcal{C}_B^l(p)$ ,  $\mathcal{C}_O^r(p)$  и  $\mathcal{C}_O^l(p)$  са архимедови окръжности за всяко реално  $p$ . Те се изменят непрекъснато, когато  $p$  пробягва реалната ос.*

Отново разглеждаме координатна система, съответна на коаксиалната система  $\Phi_c$ . За реалното число  $t$  означаваме: с  $\alpha(t)$  окръжността от  $\Phi_c$ , минаваща през точката  $(2ta, 0)$ ; с  $\beta(t)$  окръжността от  $\Phi_c$ , минаваща през  $(2tb, 0)$ . Нека  $\alpha(t) < \beta(n)$  и нека  $\mathcal{C}(t, n)$  е сандвич-окръжност в  $\alpha(t)$  и  $\beta(n)$ , вписана в  $\gamma$ . Нека  $P(t)$  е външният (съответно вътрешният) център на хомотетия на окръжностите  $\gamma$  и  $\alpha(t)$ , когато  $t > 0$  (съответно  $t < 0$ ), и нека  $Q(t)$  е външният (съответно вътрешният) център на хомотетия на окръжностите  $\gamma$  и  $\beta(n)$ , когато  $n > 0$  (съответно  $n < 0$ ).

**Теорема 2.2.3.** ([11]) *Следните три условия са еквивалентни:*

- (1)  $\mathcal{C}(t, n)$  е архимедова окръжност.
- (2)  $1/t + 1/n = 1$ .
- (3)  $P(t)$  съвпада с  $Q(n)$ .

Това е обобщение на теоремата на Шох ([2]), която се получава при  $m = n = 2$ .

Нека горното условие се удовлетворява и  $n > 0$ . Означаваме с  $\mathcal{L}_s$  перпендикулярната права на абсцисната ос, минаваща през центъра на  $\mathcal{C}(m, n)$  и с  $\mathcal{L}_w$  перпендикулярната права на абсцисната ос, минаваща през пресечна точка на  $\gamma$  и  $\alpha(m)$ .

**Теорема 2.2.6.** ([11]) *Нека  $Q$  е произволна точка от правата  $\mathcal{L}_w$  и  $\mathcal{W}_Q$  е окръжност с център върху правата  $\mathcal{L}_s$  и допираща се до двете допирателни прави към окръжността  $\beta$ , прекарани през точката  $Q$ . Тогава  $\mathcal{W}_Q$  е архимедова окръжност.*

Окръжността  $\mathcal{W}_Q$  обобщава окръжността на Ву ([2]), която се получава при  $m = n = 2$  и ордината на центъра на  $\mathcal{W}_Q$ , по-голяма от  $2r_A \sqrt{a/b}$ .

Когато точката  $Q$  е от окръжността  $\alpha$ , окръжността  $\mathcal{W}_Q$  минава през началото. Тези окръжности са от безкрайното семейство архимедови окръжности, описано в следната

**Теорема 2.2.9.** ([16]) *Нека  $\mathcal{C}$  е окръжност, минаваща през началото  $O$ , която не се допира вътрешно до  $\beta$ . Тя е архимедова окръжност тогава и само тогава, когато общите външни допирателни на  $\mathcal{C}$  и  $\beta$  се пресичат в точка от  $\alpha$ , различна от началото.*

Нека  $O_\alpha$  и  $O_\beta$  са центровете на окръжностите  $\alpha$  и  $\beta$ .

**Следствие 2.2.3.** ([16]) *Нека  $\mathcal{C}$  е архимедова окръжност с диаметър  $OT$  и нека  $T_\alpha$  (съответно  $T_\beta$ ) е пресечната точка на общите външни допирателни на  $\mathcal{C}$  и  $\beta$  (съответно на  $\mathcal{C}$  и  $\alpha$ ).*

(i) *Векторите  $\overrightarrow{OT}$ ,  $\overrightarrow{O_\alpha T_\alpha}$  и  $\overrightarrow{O_\beta T_\beta}$  са успоредни и еднопосочни.*

(ii) *Точката  $T$  разделя вътрешно отсечката  $T_\alpha T_\beta$  в отношение  $a : b$ .*

Теорема 2.2.9 обобщава теоремата на Банков за третата окръжност ([1]) – тя се получава, когато  $T_\alpha$  е най-високата точка от  $\alpha$ .

Нека  $I$  е пресечна точка на  $\gamma$  и ординатната ос,  $\delta$  е окръжност, разположена вътре в  $\gamma$  и допираща я в  $I$ ; нека  $k$  е отношението на радиуса на  $\delta$  към този на  $\gamma$ . Нека още  $\mathcal{L}_a$  (съответно  $\mathcal{L}_b$ ) е допирателна права към  $\delta$ , перпендикулярна на абсцисната ос и пресичаща окръжността  $\alpha$  (съответно  $\beta$ ). Означаваме с  $Q_1$  (съответно  $Q_2$ ) пресечната точка на  $\mathcal{L}_a$  и  $\alpha$  (съответно  $\mathcal{L}_b$  и  $\beta$ ) в областта  $y > 0$ . Нека  $\mathcal{C}_1$  и  $\mathcal{C}_2$  са окръжностите, допиращи се вътрешно до  $\gamma$  и допиращи се до правата  $EQ_1$  в  $Q_1$ . Нека  $\mathcal{C}_3$  и  $\mathcal{C}_4$  са окръжностите, допиращи се вътрешно до  $\gamma$  и допиращи се до правата  $EQ_2$  в  $Q_2$ . Нека  $\mathcal{D}_1$  (съответно  $\mathcal{D}_2$ ) е окръжността, допираща се вътрешно до  $\gamma$  и външно до  $\alpha$  (съответно  $\beta$ ) и допираща се до  $\mathcal{L}_a$  (съответно  $\mathcal{L}_b$ ) в противоположната страна спрямо началото  $O$ .

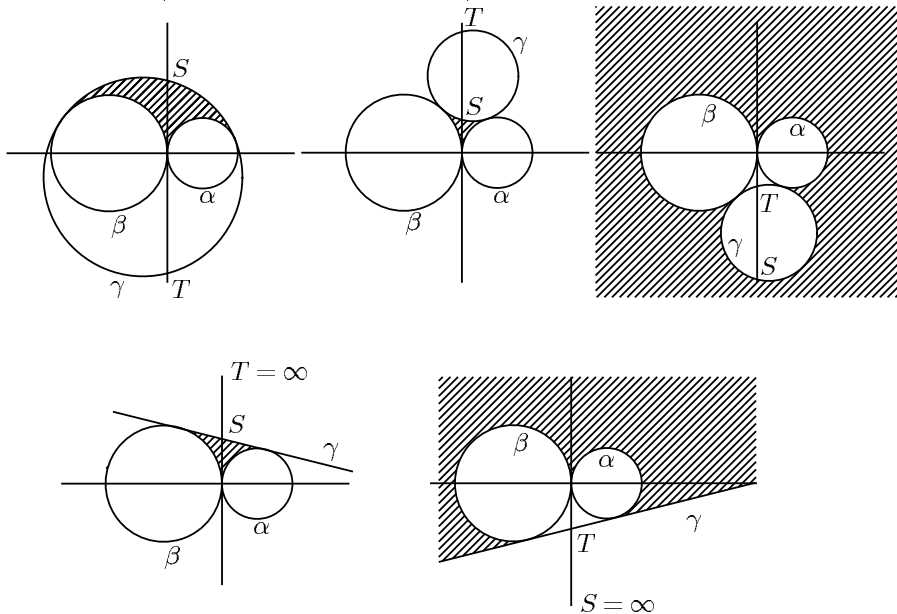
**Теорема 2.2.10.** ([15]) *Радиусът на  $\mathcal{C}_j$  ( $1 \leq j \leq 4$ ) е  $2(1-k)r_A$ . Радиусът на  $\mathcal{D}_j$  ( $j = 1, 2$ ) е  $(1-k)r_A$ .*

**Теорема 2.2.11.** *Нека  $D$  е точка от окръжността  $\gamma$ ,  $\rho$  е окръжност с диаметър  $OD$ ,  $P$  е центърът на  $\rho$  и  $R_1R_2$  е перпендикулярният на  $EP$  диаметър на  $\rho$ . Тогава окръжностите, допиращи се до правата  $ER_1$  в точката  $R_1$  и допиращи се вътрешно до  $\gamma$ , са архимедови окръжности; окръжностите, допиращи се до правата  $ER_2$  в точката  $R_2$  и допиращи се вътрешно до  $\gamma$ , са архимедови окръжности.*

Тези теореми обобщават окръжността на Повер ([33]), която се получава в теорема 2.1.10 при  $k = 1/2$  и в теорема 2.1.11, когато правата  $ED$  е перпендикулярна на абсцисната ос.

Сега ще разгледаме наклонен арбелос и свойството на окръжности-близнаци. Конфигурацията от три окръжности  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  наричаме *наклонен арбелос*, ако  $\alpha$  и  $\beta$  се допират външно

и  $\gamma$  се допират до всяка от тях в точка, различна от допирната точка на  $\alpha$  и  $\beta$ . Ще разглеждаме и случая, когато  $\gamma$  е права. Нека  $S$  и  $T$  са пресечните точки на  $\gamma$  с ординатната ос, за чиито ординати  $1/s$  и  $1/t$  е в сила  $t < s$ . Затворената фигура, ограничена от  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , съдържаща  $S$  (съответно  $T$ ), ще наричаме  $A^*$ -област (съответно  $A_*$ -област.)



**Фиг. 2**  $A^*$ -област в наклонен арбелос

Дефинираме четирите вериги от допирателни окръжности  $\{\dots, \alpha_{-2}^+, \alpha_{-1}^+, \alpha_0^+, \alpha_1^+, \alpha_2^+, \dots\}$   $\{\dots, \alpha_{-2}^-, \alpha_{-1}^-, \alpha_0^-, \alpha_1^-, \alpha_2^-, \dots\}$   
 $\{\dots, \beta_{-2}^+, \beta_{-1}^+, \beta_0^+, \beta_1^+, \beta_2^+, \dots\}$   $\{\dots, \beta_{-2}^-, \beta_{-1}^-, \beta_0^-, \beta_1^-, \beta_2^-, \dots\}$   
 по следния начин.

Означаваме с  $\alpha_0^+$  окръжността, лежаша в  $A^*$ -областта и допираща се до  $\alpha$ ,  $\gamma$  и ординатната ос. Има две окръжности, допиращи се до  $\alpha$ ,  $\alpha_0^+$  и ординатната ос: едната лежи в  $A^*$ -областта, другата не. Първата означаваме с  $\alpha_1^+$ , втората – с  $\alpha_{-1}^+$ . За всяко естествено  $n \geq 2$  определяме рекурсивно  $\alpha_n^+$  като окръжността,

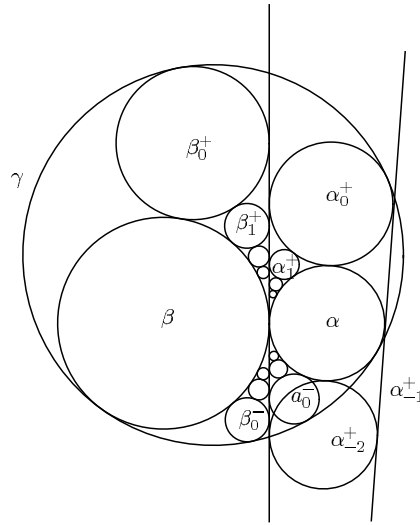
различна от  $\alpha_{n-2}^+$  и допираща се до  $\alpha$ ,  $\alpha_{n-1}^+$  и ординатната ос; също така  $\alpha_{-n}^+$  е окръжността, различна от  $\alpha_{-(n-2)}^+$  и допираща се до  $\alpha$ ,  $\alpha_{-(n-1)}^+$  и ординатната ос. Окръжностите  $\alpha_n^-$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ) и  $\beta_n^\pm$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ) се определят аналогично.

За реалното число  $z$ , с  $V_z$  отбелязваме точката  $(0, 2\sqrt{ab}/z)$ , с  $W_z^{++}$ ,  $W_z^{--}$ ,  $W_z^{+-}$ ,  $W_z^{-+}$  съответно точките

$$\left(0, \frac{-2\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{z(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + 2\sqrt{a+b}}\right),$$

$$\left(0, \frac{-2\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{z(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - 2\sqrt{a+b}}\right),$$

$$\left(0, \frac{-2\sqrt{ab}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{z(\sqrt{a} - \sqrt{b}) + 2\sqrt{a+b}}\right),$$

$$\left(0, \frac{-2\sqrt{ab}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{z(\sqrt{a} - \sqrt{b}) - 2\sqrt{a+b}}\right).$$


**Фиг. 3** Вериги допиращи се окръжности

- Теорема 2.3.2** ([12]) (i) Окръжностите  $\alpha_n^+$  и  $\beta_n^+$  са еднакви тогава и само тогава, когато  $\gamma$  минава през точките  $V_{n\pm 1}$  или  $W_{n\pm 1}^{++}$ .
- (ii) Окръжностите  $\alpha_{-n}^-$  и  $\beta_{-n}^-$  са еднакви тогава и само тогава, когато  $\gamma$  минава през точките  $V_{n\pm 1}$  или  $W_{n\pm 1}^{--}$ .
- (iii) Окръжностите  $\alpha_{-n}^+$  и  $\beta_n^-$  са еднакви тогава и само тогава, когато  $\gamma$  минава през точките  $V_{n\pm 1}$  или  $W_{n\pm 1}^{+-}$ .
- (iv) Окръжностите  $\alpha_n^-$  и  $\beta_{-n}^+$  са еднакви тогава и само тогава, когато  $\gamma$  минава през точките  $V_{n\pm 1}$  или  $W_{n\pm 1}^{-+}$ .

За реалното число  $n$  с  $(V_{n\pm 1})$  означаваме наклонения арбелос, образуван от  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , когато  $\gamma$  минава през точките  $V_{n\pm 1}$ . Аналогично се дефинират наклонените арбелоси  $(W_{n\pm 1}^{++})$ ,

$(W_{n\pm 1}^{--}), (W_{n\pm 1}^{+-})$  и  $(W_{n\pm 1}^{-+})$ . Сега ще използваме означението  $\alpha_{n,m}^{\pm}$  вместо  $\alpha_m^{\pm}$ , когато става въпрос за наклонения арбелос  $(V_{n\pm 1})$ ; също така ролята на  $\alpha_m^{\pm}$  се поема от  $\alpha_{n,m}^{\pm}$ , съответно за наклонения арбелос  $(W_{n\pm 1}^{\pm\pm})$ . Аналогичен е смисълът на  $\beta_{n,m}^{\pm}$  и  $\beta_{n,m}^{\pm\pm}$ .

**Теорема 2.3.4** ([12]) *За всеки две естествени числа  $n$  и  $m$ , окръжностите във всяка от изброените двойки са еднакви.*

$$\begin{aligned} & \{\alpha_{n,m}^+, \beta_{m,n}^+\}, \{\alpha_{n,-m}^-, \beta_{m,-n}^-\}, \{^{++}\alpha_{n,m}^+, \ ^{++}\beta_{m,n}^+\}, \\ & \{^{--}\alpha_{n,-m}^-, \ ^{--}\beta_{m,-n}^-\}, \{^{+-}\alpha_{n,-m}^+, \ ^{+-}\beta_{m,n}^-\}, \{^{-+}\alpha_{n,m}^-, \ ^{-+}\beta_{m,-n}^+\}, \\ & \{^{--}\alpha_{n,m}^-, \ ^{++}\beta_{m,-n}^+\}, \{^{++}\alpha_{m,-n}^+, \ ^{--}\beta_{n,m}^-\}, \{^{+-}\alpha_{n,m}^+, \ ^{-+}\beta_{m,n}^+\}, \\ & \{^{-+}\alpha_{m,-n}^-, \ ^{+-}\beta_{n,-m}^-\}. \end{aligned}$$

Даден е обичайният арбелос  $(V_{0\pm 1})$ . Означаваме с  $\mathcal{C}^\beta$  вписаната окръжност в криволинейния триъгълник, образуван от  $\gamma_0, \beta_0^+$  и ординатната ос, който не съдържа  $\beta$ ; с  $\delta_{0,1}^\alpha$  – вписаната окръжност в криволинейния триъгълник, образуван от  $\gamma_0, \gamma_1$  и  $\alpha, \beta$ . Окръжностите  $\mathcal{C}^\alpha$  и  $\delta_{0,1}^\beta$  се определят аналогично.

**Теорема 2.3.6.** ([12]) *Двете окръжности  $\delta_{0,1}^\alpha$  и  $\mathcal{C}^\beta$  (съответно  $\delta_{0,1}^\beta$  и  $\mathcal{C}^\alpha$ ) са еднакви.*

Нека  $A$  (съответно  $B$ ) е допирната точка на  $\alpha$  (съответно  $\beta$ ) и  $\gamma_0$ . Нека  $D$  е пресечна точка на  $\gamma_0$  и ординатната ос.

**Теорема 2.3.9.** ([20],[21],[22]) *Нека  $J$  е точка от правата  $OD$ , различна от началото  $O$ . Означаваме с  $2d$  дължината на отсечката  $OJ$ . Нека  $E$  и  $F$  са точки съответно от правите  $AJ$  и  $BJ$ , такива че  $OEIF$  е успоредник. Нека  $\alpha_J$  (съответно  $\beta_J$ ) е окръжност, допираща се до правата  $OJ$  в  $O$  и минаваща през  $E$  (съответно  $F$ ); нека  $\mathcal{C}_\alpha$  (съответно  $\mathcal{C}_\beta$ ) вписаната окръжност в криволинейния триъгълник, образуван от  $OJ, EJ$  (съответно  $FJ$ ) и  $\alpha_J$  (съответно  $\beta_J$ ). Тогава окръжностите  $\mathcal{C}_\alpha$  и  $\mathcal{C}_\beta$  са еднакви; радиусът на всяка от тях е*

$$\frac{((\sqrt{a^2 + d^2} - d)(\sqrt{b^2 + d^2} - d) - ab)^2}{ab(a + b)}.$$

Сега ще се спрем на случая, когато  $\alpha$  и  $\beta$  се допират вътрешно или едната от тях е права линия.

Първо да разгледаме случая, когато  $\alpha$  и  $\beta$  се допират вътрешно. Означаваме с  $O$  допирната точка, с  $A$  и  $B$  – диаметрално противоположните точки на  $O$  съответно в  $\alpha$  и  $\beta$ . Нека  $J$  е точка от общата допирателна на  $\alpha$  и  $\beta$ , различна от  $O$ . Нека  $E, F, \alpha_J, \beta_J, C_\alpha$  и  $C_\beta$  са както в Теорема 2.3.9.

**Теорема 2.3.10.** ([21],[22]) *Окръжностите  $C_\alpha$  и  $C_\beta$  са еднакви. Радиусът на всяка от тях е:*

$$\frac{((\sqrt{a^2 + d^2} - d)(\sqrt{b^2 + d^2} + d) - ab)^2}{ab(b - a)}, \text{ когато } \alpha \text{ лежи в } \beta;$$

$$\frac{((\sqrt{a^2 + d^2} + d)(\sqrt{b^2 + d^2} - d) - ab)^2}{ab(a - b)}, \text{ когато } \beta \text{ лежи в } \alpha.$$

Сега разглеждаме случая, когато  $\beta$  (съответно  $\alpha$ ) е допирателна права към окръжността  $\alpha$  (съответно  $\beta$ ) в точка  $O$ . Както по-горе избираме точка  $A$  (съответно  $B$ ), но в този случай  $B$  (съответно  $A$ ) е точка в безкрайността. Нека  $J, E, F, \alpha_J, \beta_J, C_\alpha$  и  $C_\beta$  са като в Теорема 2.3.10, където  $BJ$  (съответно  $AJ$ ) е права през  $J$ , успоредна на  $OA$  (съответно  $OB$ ).

**Теорема 2.3.11.** ([21],[22]) *Окръжностите  $C_\alpha$  и  $C_\beta$  са еднакви. Радиусът на всяка от тях е:*

$$(\sqrt{a^2 + d^2} - a - d)^2/a, \text{ когато } \beta \text{ е права};$$

$$(\sqrt{b^2 + d^2} - b - d)^2/b, \text{ когато } \alpha \text{ е права}.$$

Горните три теореми са получени от теоремата за свойството на окръжности-близнаци в триъгълник.

Един от корените на изложената теория на обобщения арбелос е японската традиционна математика, наречена „Васан“. Някои от задачите, използвани в лекциите, са задачи от Васан. Сега ще очертаем контурите на Васан и връзката между теорията и задачите от Васан.

Васан се появява в края на XVI век. В първия период Васан се развива чрез система, наречена *idai-keishō*. При тази система някой предлага математически задачи, наречени *idai*, друг някой ги решава и предлага други *idai* и т.н. Системата става толкова популярна, че много хора от всички социални слоеве се мотивират да изучават математика и по-специално да решават и съставят задачи.

Един от най-големите „Васан“ математици е *Seki Kōwa* (или *Takakazu*). Той има значителен принос в различни области на Васан, например *Enzan-jutsu* (символна алгебра), покъсно наречена *Tenzan-jutsu*, *Enri* (изследвания, свързани с окръжности и сфери), геометрия и др. Той въвежда нова система на обозначения, наречена *bōsho-hō* в *Enzan-jutsu* и създава така нареченият *Zōyaku-jutsu* за приблизително пресмятане на  $\pi$  с точност до десетия десетичен знак. Най-изявеният ученик на *Seki* е *Takebe Katahiro*, който има голям принос в развитието на Васан наравно със *Seki*. Той създава метод, наречен *Tetsujutsu*, за да изрази дължината на дъга с безкраен ред. Изразяването е същото, както това на Леонард Ойлер, цитирано в писмо до Йохан Бернули петнайсет години по-късно. Пресмята и  $\pi$  с точност до четиридесетия десетичен знак.

Покрай тези големи математици, много други, като *Ajima Naonobu* и *Wada Nei* са развивали различни области на Васан. Някои от резултатите, получени от тях, по същество съвпадат с резултатите на математиците от онова време в западния свят. Има също и много аматьори. Една от характеристиките на Васан е, че много аматьори от различни социални слоеве се занимават с Васан от любовознателност. Периодът до края на XIX век (края на периода Едо) е период на разцвет на Васан.

С идването на власт на *Meiji* през 1868 Васан запада. Вместо Васан новите управници възприемат западната математика в системата на обучение. В периода Едо естествените науки прогресират слабо и Васан се развива самоцелно, което го пра-



ви затворен в себе си. За новите управници, които искат да обновят страната, обогатявайки и засилвайки я, Васан е твърде затворена система за индустриалните нужди. Освен това Васан е развиван интуитивно и без логически обосновки, докато западната математика ползва диалектичното наследство на Древна Елада. Васан математиците не се интересуват от обосноваване и демонстриране на резултатите си ([10]). Това може би е една от причините развитието на Васан да е прекъснато чак до днешно време.

Една от най-популярните области на Васан е геометрията. Както професионални математици, така и аматьори, се занимават с геометрия и произвеждат множество интересни резултати. Една от причините за такава популярност са дървените плочки сангаку, на които била изписвана математическа задача (най-вече геометрична), заедно с решението си, и тази плочка била посвещавана на боговете в храм или светилище. Даже онези, които нямали средства да публикуват резултатите си, посредством сангаку можели да представят своите постижения. Геометрията била изучавана от повечето хора за забавление, нежели за образование.

Васан геометрията има следните характерни черти:

- обектите на изследване са конкретни и познати, т.е. фигури от евклидовото двумерно и тримерно пространство;
- почти всички задачи се отнасят за измерване, а решаването им е с алгебрични средства (Tenzan-jutsu).
- интересът се свеждал до решаване и съставяне на задачи.

Тези характеристики позволяват много хора от всички социални слоеве да изучават геометрия, но ограничават систематичното развитие на теорията. Въпреки това някои от резултатите, като например тези от следните примери, са същите, постигнати в западната математика.

**Пример 1.2.1.** Архимедови окръжности-близнаци.  
Появяват се в задача сангаку. ([3], [9], [36]).

**Пример 1.2.2.** Теоремата на Декарт за окръжности.  
Появява се в *Shūki sanpō* от Arima и в други публикации

**Пример 1.2.3.** Задачата на Малфати.  
Появява се в *Nanzanshi sanen-jutsu* от Ajima.

**Пример 1.2.4.** Верига на Щайнер.  
Появява се в *Ennai yo-ruien-jutsu* и в *Ennai yo-ruien-jutsu kōhen* от Ajima.

**Пример 1.2.5.** Теоремата на Птолемей.  
Появява се в *Shūki sanpō* от Arima.

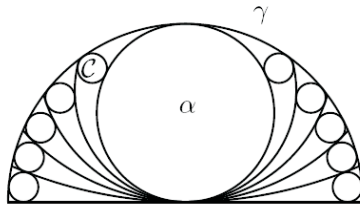
**Пример 1.2.6.** Теорема на Касей.  
Появява се в *Sūri mujinzō* от Ikeda.

**Пример 1.2.7.** Теорема на Соди.  
Появява се в *Kokon sankan* от Uchida и в *Sanpō-enri shinshin* от Saitō.

Всички примери, с изключение на **Пример 1.2.6**, се появяват като задачи, в които се търси конкретна стойност, например диаметър, както и алгоритъм за намирането на тази стойност в общия случай. Така резултатът по същество е еквивалентен на съответния резултат от западната математика, но третирането е различно.

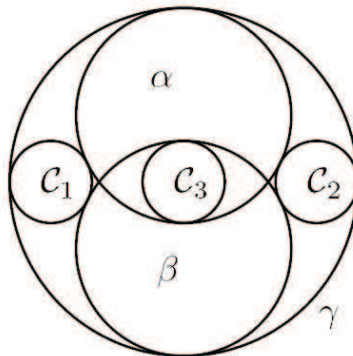
Някои от задачите на Васан геометрията са тясно свързани с теорията на обобщения арбелос в кратни части. Въпреки че всяка от тях е независима от останалите и се разглежда отделно, тук задачите са представени систематично от гледна точка на обобщения арбелос в кратни части.

**Пример 1.3.1.** Окръжността  $\alpha$  е най-голямата вписана в полукръга  $\gamma$ . През центъра на  $\gamma$  към  $\alpha$  са построени  $n - 1$  допирателни дъги, които разделят областта между  $\alpha$ ,  $\gamma$  и диаметъра на  $\gamma$  на криволинейни триъгълници, вписаните окръжности на които са еднакви. Да се изрази радиусът на вписаната окръжност  $C$  чрез радиуса на  $\gamma$ . [3]

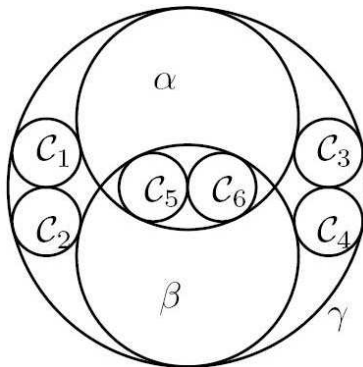


Този пример може да се представи от гледна точка на обичаен арбелос в  $2n$ -кратни части.

**Пример 1.3.6.** Пет окръжности са опаковани във външната окръжност  $\gamma$ , както е показано на чертежа. Окръжностите  $\alpha$  и  $\beta$  са еднакви. Трите окръжности  $C_j$  ( $1 \leq j \leq 3$ ) са еднакви. Да се изрази радиусът на  $C_i$  чрез радиуса на  $\gamma$ . [7]



**Пример 1.3.9.** Осем окръжности са опаковани във външната окръжност  $\gamma$ , както е показано на чертежа. Окръжностите  $\alpha$  и  $\beta$  са еднакви. Шестте окръжности  $C_j$  ( $1 \leq j \leq 6$ ) са еднакви. Да се изрази радиусът на  $\gamma$  чрез радиуса на  $C_i$ . [8]

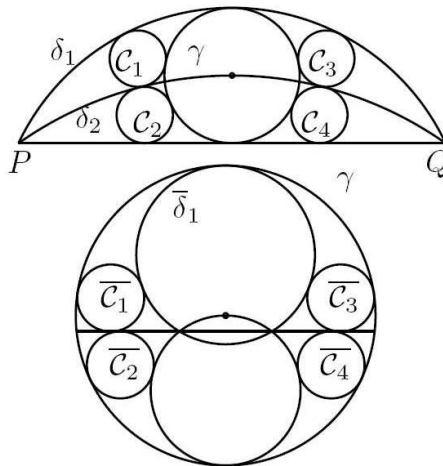


Тези примери могат да се представят от гледна точка на обобщен арбелос от пресекателен тип в 1-кратна част или в 2-кратни части.

**Пример 1.3.11** Окръжността  $\gamma$  е най-голямата измежду вписаните в луничката, ограничена от окръжността  $\delta_1$  и хордата  $PQ$ . Окръжността  $\delta_2$  минава през точките  $P$ ,  $Q$  и центърът на  $\gamma$ . Окръжностите  $C_1$  и  $C_3$  са вписани

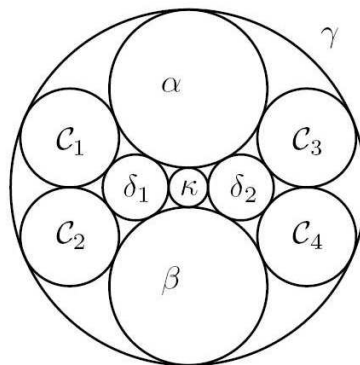
в криволинейните триъгълници, ограничени от  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  и  $\gamma$ . Окръжностите  $C_2$  и  $C_4$  са вписани в криволинейните триъгълници, ограничени от  $\delta_2$ , хордата  $PQ$  и  $\gamma$ . Да се покаже, че четирите окръжности  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  и  $C_4$  са еднакви. [38]

В този пример след инверсия се получава обобщен арбелос от пресекателен тип.

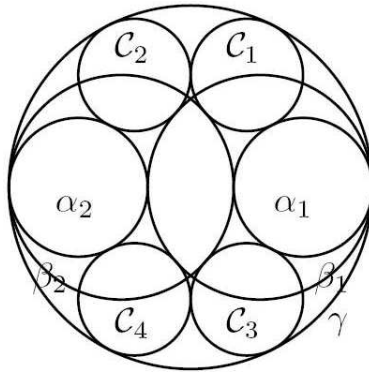


**Пример 1.3.12** Девет окръжности са опаковани във външната окръжност  $\gamma$ , както е показано на чертежа. Окръжностите  $\alpha$  и  $\beta$  са еднакви, двете окръжности  $\delta_1$  и  $\delta_2$  са еднакви и четирите окръжности  $C_j$  ( $1 \leq j \leq 4$ ) са еднакви. Да се изрази радиусът на  $C_i$  чрез радиуса на  $\alpha$ . [34]

Този пример може да се представи от гледна точка на обобщен арбелос от отрицателен тип в 2-кратни части.

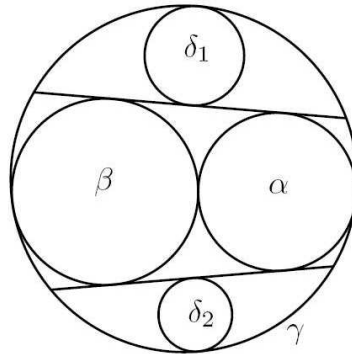


**Пример 1.3.15** Осем окръжности са опаковани във външната окръжност  $\gamma$ , както е показано на чертежа. Окръжностите  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  са еднакви. Окръжностите  $\beta_1$  и  $\beta_2$  са еднакви. Четирите окръжности  $C_j$  ( $1 \leq j \leq 4$ ) са еднакви. Да се изрази радиусът на  $\alpha_j$  чрез радиуса на  $\gamma$ . [34]



Този пример може да се представи от гледна точка на обобщен арбелос от отрицателен тип в 2-кратни части, а също от гледна точка на обичаен арбелос в 1-кратна част.

**Пример 1.3.19** Двете окръжности  $\alpha$  и  $\beta$  се допират външно и всяка от тях се допира вътрешно до окръжността  $\gamma$ . Окръжностите  $\delta_1$  и  $\delta_2$  са най-големите, вписани в двете лунички с контур  $\gamma$  и обща допирателна на  $\alpha$  and  $\beta$ . Да се изрази радиусът на  $\beta$  чрез радиусите на  $\alpha$ ,  $\delta_1$  и  $\delta_2$ . [35]



Този пример може да се представи от гледна точка на наклонен арбелос.

## АВТОРСКИ ПРИНОС

1. Понятията арбелос и архимедови окръжности-близнаци са обобщени в обобщен арбелос и архимедови окръжности в  $n$ -кратни части от гледна точка на нововъведеното понятие „коаксиална система с фиксирана точка“.
2. Определено е условие един обобщен арбелос да е в  $n$ -кратни части с нововъведената характеристика  $\mu$ ; из-

числени са радиусите на архимедовите окръжности в  $n$ -кратни части чрез радиуса на „радикална окръжност“, което е нововъведено понятие.

3. Някои задачи сангаку, отнасящи са до окръжности, са преразгледани от гледна точка на обобщения арбелос; представени са нови решения в рамките на систематичния метод, приложен в теорията на обобщения арбелос.
4. Открити са нови архимедови окръжности и нови семейства архимедови окръжности като приложение на разработената теория; те са използвани в обучението по геометрия и програмиране.
5. Създадена е нова образователна среда за геометричните понятия „инверсия“ и „коаксиална система“, в която формирането на нови абстрактни знания предхожда конкретно познание.
6. Инструментариум от два цикъла лекции за развиващо обучение е създаден на основата на авторското обобщено разглеждане на арбелоса чрез геометричните понятия „инверсия“ и „коаксиална система“.
7. Изработено е учебно съдържание, включващо предложения и задачи за обобщен арбелос, предназначено за обучение по програмиране на Java посредством създаване на анимации, което подпомага изучаването на геометрията от студенти в нематематически специалности.

Горните приноси са самостоятелно постигнати от автора.

## Литература

- [1] Bankoff, L. Are the twin circles of Archimedes really twins?, Mathematics Magazine (1974), 214-218.

- [2] Dodge, C.W., Schoch, T., Woo, P.Y., Yiu, P. Those ubiquitous Archimedean circles, *Math. Mag.* (1999), 202-213
- [3] Fukushima Wasan Study Association, *The sangaku in Fukushima*, Soju Shuppan, Fukushima, Japan, 1989 (in Japanese).
- [4] Fukaya, Y., Yoshikawa, Y., Watanabe, M. Orthogonal and circumscribed Archimedean circles in arbelos, *Bulletin of Maebashi Institute of Technology* 13(2010), 93-95.
- [5] Grozdev, S. *For High Achievements in Mathematics: The Bulgarian Experience (Theory and Practice)*, RUTA, 2007.
- [6] Grozdev, S., Watanabe, M. The Generalized Arbelos as an Example of Instrumentarium for Developing Education in Japan, *Proceedings of the Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians* (2011), 380-386 (in Bulgarian).
- [7] Gunma Wasan Study Association, *The sangaku in Gunma*, Gunma Wasan Study Association, Gunma, Japan, 1989 (in Japanese).
- [8] Hirayama, T., Yamaki, J., Ikoma, T. *The sangaku in Miyagi*. 1971 (in Japanese).
- [9] Hirayama, A., Matsuoka, M. *The sangaku in YAMAGATA*. ,1966 (in Japanese).
- [10] Murata, T. *Japanese Mathematics, Western Mathematics*, Chukoshinsho 611, 1981 (in Japanese).
- [11] Okumura, H. ,Watanabe, M. The Archimedean Circles of Schoch and Woo, *Forum Geom.* 4(2004), 27-34.
- [12] Okumura, H. ,Watanabe, M. The Twin Circles of Archimedes in a Skewed Arbelos, *Forum Geom.* 4(2004), 229-251.

- [13] Okumura, H. ,Watanabe, M. The Arbelos in  $n$ -Aliquot Parts, Forum Geom. 5(2005), 37-45.
- [14] Okumura, H. ,Watanabe, M. Non-Archimedean Twin Circles in the Arbelos, Mathematics Plus 13(2005), no.1, 60-62.
- [15] Okumura, H. ,Watanabe, M. A generalization of Power's Archimedean circles, Forum Geom. 6(2006), 103-105.
- [16] Okumura, H. ,Watanabe, M. Characterizations of infinite set of Archimedean circles, Forum Geom. 7(2007), 121-123.
- [17] Okumura, H. ,Watanabe, M. Remarks on Woo's Archimedean circles, Forum Geom. 7(2007), 125-128.
- [18] Okumura, H. ,Watanabe, M. Generalized Arbelos in Aliquot Parts:Intersecting case, J. Geometry Graphics 12(2008), no.1, 53-62.
- [19] Okumura, H. ,Watanabe, M. Generalized Arbelos in Aliquot Parts:Non-intersecting case, J. Geometry Graphics 13(2009), no.1, 41-57.
- [20] Okumura, H. ,Watanabe, M. Non-Archimedean Twin Circles of the Arbelos, Mathematics Plus 16(2008), no.3, 63-64.
- [21] Okumura, H. ,Watanabe, M. Twin Circles in a Triangle and its Application to an Arbelos, Proceedings of the Anniversary International Conference Celebrating Prof.Sava Grozdev's 60th anniversary(2010) 257-262.
- [22] Okumura, H. ,Watanabe, M. Tiwn Circle Property in a Triangle and Non-Archimedean Twin Circles of an Arbelos, Mathematics Plus, 19(2011), 64 - 69.
- [23] Okumura, H. ,Watanabe, M. A gift from Archimedes I, KAGAKU 75(2005), no.6, 746-749 (in Japanese).



- [24] Okumura, H. ,Watanabe, M. A gift from Archimedes II, KAGAKU 75(2005), no.11, 1314-1318 (in Japanese).
- [25] Okumura, H. ,Watanabe, M. A gift from Archimedes III, KAGAKU 76(2006), no.4, 406-409 (in Japanese).
- [26] Okumura, H. ,Watanabe, M. A gift from Archimedes IV, KAGAKU 76(2006), no.10, 1053-1055 (in Japanese).
- [27] Okumura, H. ,Watanabe, M. A gift from Archimedes V, KAGAKU 77(2007), no.9, 992-993 (in Japanese).
- [28] Okumura, H. ,Watanabe, M. A gift from Archimedes VI, KAGAKU 77(2007), no.12, 1247-1248 (in Japanese).
- [29] Okumura, H. ,Watanabe, M. A gift from Archimedes VII, KAGAKU 78(2008), no.2, 145-146 (in Japanese).
- [30] Okumura, H. ,Watanabe, M. A gift from Archimedes VIII, KAGAKU 79(2009), no.3, 261-263 (in Japanese).
- [31] Okumura, H. ,Watanabe, M. A gift from Archimedes IX, KAGAKU 80(2010), no.4, 404-405 (in Japanese).
- [32] Okumura, H. ,Watanabe, M. Arbelos:Geometric Cosmos formed by three Semicircles, Iwanami Science Library 174(2010) (in Japanese).
- [33] Power, F. Some More Archimedean Circles in the Arbelos, Forum Geom. 5 (2005), 133-134.
- [34] Saitama prefectural Library,*The sangaku in Saitama*. Saitama prefectural Library, Saitama Japan, 1969 (in Japanese).
- [35] Sato, K. *The sangaku in Tama*. Kenseisha, 1979 (in Japanese).
- [36] Takagi, S. *The sangaku in Gifu*. Takagi Shigeyuki, 1986 (in Japanese).

- [37] Watanabe, M. Circumscribed and orthogonal Archimedean Circles in generalized arbelos, Proceedings of the 6th Mediterranean Conference on Mathematics Education(2009) 229-238.
- [38] Yasutomi, Y. *The sangaku in Iwate*. Seijisha, Tokyo, 1987 (in Japanese).