

РЕЦЕНЗИЯ

от доц. д-р Иван Минчев,
ФМИ на СУ „Св. Климент Охридски“

на дисертация за присъждане на образователна и научна степен „доктор“ в област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика, професионално направление: 4.5. Математика, докторска програма: „Геометрия и Топология“.

Автор на дисертационния труд: Яна Алексиева Алексиева

Тема: „Лоренцови повърхнини в четиримерното псевдо-Евклидово пространство с неутрална метрика“

Научен консултант: доц. д-р Величка Милушева

Настоящата рецензия е съставена на основание на решение на Научното жури от 23.11.2017 г., определено със заповед № 544 от 20.11.2017 г. на Директора на Института по математика и информатика – БАН, издадена на основание на решение на НС на ИМИ (Протокол 13 от 17.11.2017 г.).

Общо описание на дисертацията и на приложените материали

Представеният комплект материали (на хартиен носител и в електронен вид) е в съответствие с правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и за заемане на академични длъжности в ИМИ на БАН и съдържа всички предвидени там трудове и документи.

Дисертационният труд съдържа 95 страници и е разделен на увод, три глави и библиография, съдържаща общо 61 заглавия. Авторефератът се състои от 34 страници. Приложен е списък от три статии на автора, свързани с темата на дисертацията. С това всички представени трудове по процедурата отговарят на изискванията по обем и форма.

Преглед на основните резултати и приноси в дисертацията

Предмет на дисертацията са изследвания свързани с локалните свойства на вложени двумерни Лоренцови повърхнини в плоското четиримерно псевдо-Евклидово пространство E_2^4 . Това е една тема от

класическата диференциалната геометрия с ред приложения за проблеми възникващи в областта на теоретичната физика. В последните години се наблюдава завишен интерес към изследванията в тази област и появата на редица нови и интересни резултати.

Основен метод при изследванията в дисертацията е конструирането на определени, геометрично мотивирани, локални функции върху зададена вложена Лоренцова повърхнина M в E_2^4 определящи нейното влагане с точност до движение. Самото влагане на повърхнината дефинира нормално разслоение NM над M , такова че за всяка точка $p \in M$ имаме разлагане на E_2^4 в ортогонална сума на допирателно и нормално подпространство $E_2^4 = T_p M + N_p M$. Следвайки класическата схема, плоската свързаност в E_2^4 се проектира до свързаности в TM и NM , чийто кривини са функции K и k върху M , наречени съответно Гаусова и нормална кривина на повърхнината. Тъй като тук се разглеждат само влагания с ко-размерност две, естествено възникващият втори фундаментален тензор на влагането σ представлява симетричен дву-тензор върху допирателното пространство TM на повърхнината, приемащ стойности в съответното двумерно нормално разслоение NM . Добре известен факт е, че чисто алгебрично, вторият тензор на влагането σ е инвариантно свързан (спрямо групата на Лоренцовите трансформации в размерност две) с три други по-прости тензорни полета върху повърхнината. Това са: нормалното векторно поле $H \in NM$ на средната кривина, което представлява просто следата на σ ; изображението на Вайнгартен $\gamma \in End(TM)$, представляващо определен симетричен ендоморфизъм на тангенциалното разслоение на повърхнината; както и един ендоморфизъм $a \in End(NM)$ на нормалното разслоение на повърхнината, който съпоставя на всяко нормално векторно поле ξ неговото така наречено присъединено векторно поле $a(\xi)$. Конструкцията и свойствата на тези три тензорни полета са подробно развити в Първа глава на представената дисертацията. Чрез разглеждане на допълнителни алгебрични ограничения върху тези тензори се получават различни класове от частни случаи на вложени Лоренцови повърхнини в E_2^4 , като например: класа на минималните повърхнини - това е случая на нулиращо се векторно поле на средна кривина; класа на квази-минималните повърхнини - това е случая на изотропно векторно поле на средна кривина; класа на Chen-повърхнините - това е случая на нулиращо се присъединено векторно поле на средна кривина, т.е. $a(H) = 0$ и други.

Точките в които изображението на Вайнгартен $\gamma \in End(TM)$ се анулира се наричат инфлексни точки на повърхнината. Известно е, че една повърхнина се състои само от инфлексни точки точно тогава, когато е развиваема или

когато се съдържа в тримерно подпространство на E_2^4 . Доколкото по дефиниция първата основна форма на всяка Лоренцова повърхнината е симетричен дву-тензор със сигнатура (1,1), изображението на Вайнгартен, макар и бидейки симетричен ендоморфизъм, не е винаги диагонализируемо над реалните числа. Както е показано в дисертацията, собствените стойности на γ са реални точно тогава, когато детерминантата k на γ е по-малка от квадрата на нормалната кривина κ на повърхнината, т.е. $k \leq \kappa^2$. Случая на равенство, $k = \kappa^2$, отговаря на класа на минималните Лорнцови повърхнини (Твърдение 1.3.1 в дисертацията). За повечето резултати в дисертацията се използва предположението $k < \kappa^2$, т.е. че изображението на Вайнгартен притежава две различни реални собствени стойности v_1 и v_2 . Този тип повърхнини са наречени Лоренцови повърхнини от общ тип. Основен резултат в Първа глава на дисертацията е Теорема 1.3.3, в която се показва, че всяка Лоренцова повърхнина от общ тип е определена с точност до движение в E_2^4 от осем инвариантни функции, удовлетворяващи дадена система от диференциални условия.

Във Втора глава на дисертационния труд се изследват различни класове ротационни и обобщени ротационни повърхнини в E_2^4 , като основно внимание се обръща на условието за постоянност на средната кривина. Повърхнините с постоянна средна кривина в псевдо-Евклидово пространство са важен обект за изучаване поради специалната роля, която играят в Общата теория на относителността. Основният резултат тук (Параграф 2.1.4) дава локално описание на всички ротационни Лоренцови повърхнини в E_2^4 с постоянна средна кривина.

Освен ротационните повърхнини с двумерна ос на завъртане в E_2^4 , във Втора глава са разгледани и така наречените обобщени ротационни повърхнини, които се получават чрез едновременното завъртане на крива около две ортогонални равнини. Това е понятие въведено най-напред от К. Мур за четиримерното евклидово пространство. Получените резултати тук дават пълно локално описание на всички обобщени ротационни повърхнини в E_2^4 с паралелно нормирано векторно поле на средна кривина. Дадено е също и локално описание на обобщените ротационни повърхнини, удовлетворяващи някое от следните допълнителни условия: детерминантата на изображението на Вайнгартен да се анулира; вконтното поле на средната кривина да се анулира – това е случая на минималните Лоренцови повърхнини; Гаусовата кривина да се анулира – т.е. случая на плските Лоренцови повърхнини; или нормалната свързаност да е плоска.

Трета глава на дисертационния труд е посветена на изследвания свързани с минималните Лоренцови повърхнини в псевдо-Евклидовото

пространство E_2^4 . Тези повърхнини се разделят по естествен начин на три основни класа в зависимост от знака на разликата на модулите на Гаусовата и нормалната кривина. Методите използвани в дисертацията са приложими основно за случая когато модула на Гаусовата кривина е по-голям от модула на нормалната кривина на повърхнината. Повърхнините с това свойство са наречени минимални повърхнини от общ тип и за тях е разработена теория в дисертацията, аналогична с теорията на минималните повърхнини в E^4 и E_1^4 . Основният резултат тук е теорема за съществуване и единственост на минимални Лоренцови повърхнини от общ тип, определени от две геометрични функции, удовлетворяващи дадена система от две частни диференциални уравнения – това е Теорема 3.2.2. Както правилно е отбелязано в дисертацията, тази теорема е версия на вече известен предходен резултат, получен от М. Сасаки през 2011 г.

Публикации

Резултатите от дисертацията са публикувани в три статии. Първата от тях е в съавторство с В. Милушева и Г. Ганчев и е публикувана през 2016 година в *Journal of the Korean mathematical society*, списание с имакт фактор 0.441. Втората статия е в съавторство с В. Милушева и Н. Тургай и е публикувана в *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, списание с импакт фактор 0.720. Третата статия е в съавторство с научния ръководител В. Милушева и е публикувана в докладите на четиридесет и петата пролетна конференция на СМБ.

Приемам, че приносът на съавторите в съвместните статии е равностоен.

Получените резултати са докладвани на 5 международни конференции, две от които са извън страната.

Критични бележки и препоръки

Както вече беше отбелязано по-горе, за методите използвани в дисертацията е ключово предположението, че се разглеждат основно Лоренцови повърхнини, за които изображението на Вайнгартен притежава две различни реални собствени стойности. Доколкото първата основна форма на повърхнината не е положително дефинитна, това представлява едно много силно ограничение, което на практика оставя извън обсега на дисертацията един много широк клас от Лоренцови повърхнини в E_2^4 , за които собствените стойности на изображението на Вайнгартен са комплексни числа. Намирам за подвеждащ използвания за случая термин „повърхнини от общ тип“ - макар

че тази терминология е наложена от други автори и не е отговорност на кандидата - тъй като няма никакви аргументи относно това каква част от повърхнините всъщност удовлетворяват въпросното ограничение. Същата забележка се отнася и до термина „минимални повърхнини от общ тип“, използван в Трета глава на дисертацията за обозначение на един частен случай на минимални Лоренцови повърхнини, за които модула на Гаусовата кривина е по-голям от модула на нормалната кривина. Отново липсват аргументи защо този тип минимални повърхнини следва да се счита за „общ“ и каква част от минималните повърхнини всъщност удовлетворяват това ограничение.

Автореферат

Съдържанието на автореферата правилно и изчерпателно отразява основните резултати и научни приноси на дисертацията.

Заклучение

Представеният дисертационен труд на Яна Алексиева съдържа оригинални и съществени резултати, отразяващи задълбочените и целенасочени научни изследвания, проведени от кандидата. Цялостната ми оценка за дисертацията, автореферата, научните публикации и научните приноси на кандидата по темата на дисертацията е силно положителна.

Считам, че дисертацията отговаря напълно на изискванията на ЗРАСРБ, неговия Правилник и Правилниците за условията и реда за придобиване на научни степени и за заемане на академични длъжности в ИМИ на БАН. На това основание препоръчвам на членовете на уважаемото Научно жури да гласуват за присъждането на образователната и научна степен „доктор“ на Яна Алексиева Алексиева.

Дата: 02.01.2018 г.

Рецензент:

(доц. д-р И. Минчев)