РЕЦЕНЗИЯ

на дисертацията на Яна Алексиева Алексиева
"Лоренцови повърхнини в четиримерно псевдо-Евклидово
пространство с неутрална метрика"
за присъждане на образователната и научна степен "доктор"
Област на висшето образование 4. Природни науки, математика и информатика
Професионално направление 4.5. Математика

Рецензент: проф. д-р Огнян Касабов

1. Анализ на научните и научно-приложните постижения.

Дисертацията е посветена на някои важни и актуални въпроси от теорията на повърхнините в Евклидовите и псевдо-Евклидовите пространства: инварианти на повърхнините, теореми, определящи повърхнината с точност до движение (теореми от типа "на Боне"), характеризиране на класове повърхнини с геометричните им инварианти, както и изучаване на някои специални класове повърхнини, особено интересни между които са минималните и ротационните.

В класическата диференциална геометрия на повърхнините в тримерно Евклидово пространство тези въпроси са добре изучени и въпреки това и в наши дни се получават нови, важни резултати. В този контекст могат да се посочат имената на такива големи съвременни геометри като R. Bryant, B.-Y. Chen, K. Kenmotsu, Fr. Morgan, K. Ogiue. Тук трябва да споменем приноса на български геометри - наскоро Г. Ганчев и В. Михова показаха, че всяка повърхнина от определен (Вайнгартенов) клас се характеризира до положение в пространството с една единствена инвариантна функция, зададена в специални („геометрични“) параметри. Това е аналог на известния факт от класическата диференциална геометрия, че всяка равнинна крива се определя до положение от кривината си, зададена спрямо естествен параметър.

От друга страна днес се интересуваме все повече и от повърхнини в пространства с по-голяма размерност и особено в пространства с индефинитна метрика. Това направление търпи голямо развитие в последните години. В него се оформи един много продуктивен кръг около Георги Ганчев, където в последните 2-3 години работи и Яна Алексиева, ето защо тук са съсредоточени изследванията в представената дисертация. По-точно разглеждат се въпроси, свързани с повърхнини в четиримерно Евклидово пространство $\mathbb{E}^4_2$ с неутрална метрика, т.е. метрика, зададена в локални координати с

$$dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 - dx_4^2 \ .$$

Разглежданията в дисертацията целят пренасяне за $\mathbb{E}^4_2$ на известни по-рано резултати, получени за $\mathbb{E}^4$ и $\mathbb{E}^4_1$, както и изследване на случаи, специфични за $\mathbb{E}^4_2$.

Дисертацията е разделена на три глави.

Глава 1 е посветена на общата теория на Лоренцовите повърхнини (т.е. повърхнини с индефинитна метрика) в $\mathbb{E}^4_2$.

В параграф 1.1 са дадени основните дефиниции, които ще бъдат използвани в дисертацията. Като се използва идеята на Ганчев и Милушева за дефиниране на втора основна форма и изображение на Вайнгартен за повърхнини в $\mathbb{E}^4$ и в $\mathbb{E}^4_1$, в параграф 1.2 се дефинират аналогичните понятия за Лоренцова повърхнина в $\mathbb{E}^4_2$. С детерминантата и следата на изображението на Вайнгартен се дефинират две инвариантни функции k и $\varkappa$, които ще играят съществена роля в цялото изложение. Доказано е, че функцията $\varkappa$ се явява кривина на нормалната свързаност на повърхнината.

В параграф 1.3 първо е доказано необходимо и достатъчно условие една Лоренцова повърхнина без инфлексни точки в $\mathbb{E}^4$ да е минимална. След това за Лоренцови повърхнини от *общ тип* (това са повърхнини, за които векторното поле H на средната кривина е навсякъде пространственоподобво или времеподобно) са получени осем *геометрични* функции, определени от главните направления на повърхнината и H. Най-важният резултат в Глава 1 е Теорема 1.3.3 (от тип теорема на Боне). Тя показва, че всяка Лоренцова повърхнина от общ тип е определена с точност до положение в пространството от тези осем функции. В параграф 1.4 със същите функции са характеризирани някои основни класове Лоренцови повърхнини.

В параграф 1.5 се разглеждат Лоренцови повърхнини от общ тип, за които полето $H/\|H\|$ е паралелно. Доказано е, че за такава повърхнина в $\mathbb{E}^4$ могат да се въведат специални параметри, наречени тук *канонични*, както и че нормалната свързаност е плоска. Получени са връзки между геометричните функции. В резултат е показано, че за разглежданите в параграфа повърхнини основната Теорема 1.3.3 може да се формулира само с три от въведените по-рано геометрични функции.

В Глава 2 са разгледани различните типове ротационни повърхнини в $\mathbb{E}^4_2$, както и техни обобщения. Тук ще отбележим, че тъй като в пространство с индефинитна метрика има подпространства, върху които индуцираната метрика има различна сигнатура, естествено възникват и различни типове ротационни повърхнини.

В параграф 2.1 са приведени стандартните дефиниции на ротационни повърхнини от елиптичен, хиперболичен и параболичен тип в $\mathbb{E}^4_2$. При тях ротацията запазва съответно пространственоподобна, времеподобна и изотропна равнина. За всеки от тези типове е доказана теорема, даваща локално конструкцията на повърхнината чрез нейна меридианна крива, при условие, че средната кривина е постоянна.

В параграф 2.2 са дадени дефиниции на обобщени ротационни повърхнини от елиптичен и хиперболичен тип. Именно, обобщена ротационна повърхнина от елиптичен тип е дефинирана със следните координатни функции:

$$\begin{aligned}
X^1(u,v) &= x^1(u)\cos\alpha v - x^2(u)\sin\alpha v\ ;\\
X^2(u,v) &= x^1(u)\sin\alpha v + x^2(u)\cos\alpha v\ ;\\
X^3(u,v) &= x^3(u)\cos\beta v - x^4(u)\sin\beta v\ ;\\
X^4(u,v) &= x^3(u)\sin\beta v + x^4(u)\cos\beta v\ ,
\end{aligned}$$

където α и β са константи. За ротационна повърхнина от хиперболичен тип кръговите функции синус и косинус са заменени с хиперболични.

Нататък се разглежда случаят, когато $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $x^2 = x^4 = 0$, а функциите $x^1(u)$ и $x^3(u)$ изпълняват някои допълнителни условия, гарантиращи напр. че повърхнината е Лоренцова. Намерени са втората основна форма, Гаусовата кривина, полето на средна кривина, функциите k и $\varkappa$, както и геометричните функции, дефинирани в Глава 1. Доказано е, че такава повърхнина е Chen-повърхнина и не може да има изотропно поле на средната кривина. След това при условие, че повърхнината е от някой от следните видове:

- с паралелно поле $H/\|H\|$,
- с функция $k = 0$,
- минимална,
- плоска,
- с плоска нормална свързаност

е получена нейна меридианна крива. Считам тези резултати за особено полезни, защото благодарение на тях знаем не само че въпросните видове повърхнини съществуват, но имаме и конкретни примери за тях.

В Глава 3 се изучават минимални Лоренцови повърхнини в $\mathbb{E}^4_2$.

В параграф 3.1 на фокус са минималните Лоренцови повърхнини в $\mathbb{E}^4_2$, за които във всяка точка първото нормално пространство е едномерно. Доказано е, че в околност на своя неизродена точка всяка такава повърхнина е неплоска и лежи в неизродена хиперравнина на $\mathbb{E}^4_2$.

В параграф 3.2 вниманието е насочено към минимални Лоренцови повърхнини в $\mathbb{E}^4_2$ с двумерно нормално пространство, за които Гаусовата кривина K и кривината на нормалната свързаност $\varkappa$ изпълняват неравенството $K^2 - \varkappa^2 > 0$. Първо е доказано, че за такава повърхнина може да се въведе ортонормиран репер от специален вид. Този репер определя и две функции, наречени *геометрични функции* на разглежданата минимална повърхнина. Показано е, че тези функции изпълняват две частни диференциални уравнения. Основният резултат в Глава 3 е Теорема 3.2.2, съгласно която всеки две гладки функции, които не се анулират никъде, никъде не съвпадат до знак и изпълняват системата от въпросните диференциални уравнения, определят единствена (с точност до положение) минимална повърхнина, за която тези функции са съответните геометрични функции. Доказателството на теоремата показва и алгоритъм за получаване на минимална Лоренцова повърхнина при известно решение на системата частни диференциални уравнения. В края на параграфа тази теорема е формулирана в термините на Гаусовата кривина и кривината на нормалната свързаност.

В параграф 3.3 се вземат две конкретни функции, които са решение на гореспоменатата система ЧДУ и като се следва изграденият вече алгоритъм, се намира параметрично уравнение на съответна минимална Лоренцова повърхнина. Разбира се, интересно би било да имаме алгоритъм за намиране на решения на въпросната система (такъв алгоритъм е показан напр. от Г. Ганчев за минимални повърхнини в $\mathbb{E}^3$) и може би това ще е предмет на следващи изследвания на дисертантката. В случая решението изглежда е получено с използване на резултатите от параграф 2.2, по-точно Теорема 2.2.6.

2. Анализ на публикациите.

Резултатите от дисертацията са докладвани на няколко научни форума и са публикувани в три статии, по една в J. Korean Math. Soc. (**IF:** 0.441), Bull. Mal. Math. Sci. Soc. (**IF:** 0.720) и Доклади на Пролетната конференция на СМБ, 2016 г. Първата от тези статии е съвместна с Георги Ганчев и Величка Милушева, научен ръководител на докторантката, втората - с Величка Милушева и N. Turgay, а третата - само с Величка Милушева. Няма данни за приноса на всеки от съавторите. Приемам, че докторантката има равностоен принос в тези публикации. Сериозният импакт фактор на две от статиите не само надвишава изискванията, но и сам по себе си показва качеството на резултатите.

3. Отражение на резултатите на дисертацията в трудове на други автори.

Посочено е едно цитиране. Считам това за добър показател, предвид малкото време от излизане на статиите по дисертацията.

4. Критични бележки по дисертацията.

1) Дефиницията на кривина на нормалната свързаност, дадена на стр. 9, е неточна.

2) Кривината на нормалната свързаност не е трябвало да се означава $\varkappa$ преди да се покаже, че тя съвпада с функцията $\varkappa$ от стр. 14. Така се е получила колизия, която особено ясно личи в доказателството на Твърдение 1.2.1.

3) Във формулировката на Теорема 2.1.1 не е отбелязано, че твърдението се отнася за ротационни повърхнини, за които $x_1'x_2'' - x_1''x_2' \neq 0$ във всяка точка. Подобен е случаят с Теореми 2.1.2 и 2.1.3. Аналогичен пропуск има в параграф 2.2: дефиницията на обобщена ротационна повърхнина не отговаря на повърхнините от твърденията в този параграф, които са от частния случай $x_2 = x_4 = 0$ с някои допълнителни условия (по-горе в текста на параграфа е казано например, че ще се предполага $x_2 = x_4 = 0$, но считам, че това трябва да е отбелязано и в условията на твърденията, иначе предвид дефинициите тези твърдения имат друг смисъл).

4) Твърдението в Теорема 3.1.1 трябва да е от вида: „В околност на неизродена точка повърхнината е неплоска и лежи в неизродена хиперравнина на $\mathbb{E}_2^4$“.

Считам тези бележки за редакционни.

5. Качества на автореферата.

Авторефератът и авторската справка ясно и правилно отразяват приносите в дисертацията.

Заключение. От казаното по-горе е видно, че рецензираната дисертация изпълнява всички изисквания за присъждане на образователната и научна степен „доктор“ в ЗРАСРБ, Правилника за неговото приложение и съответния Правилник на Института по математика и информатика на БАН. **Поради това давам положителна оценка на дисертационния труд и убедено препоръчвам на членовете на уважаемото Научно жури да гласуват за присъждане на образователната и научна степен „доктор“ на Яна Алексиева Алексиева.**

02.01.2018 г. Рецензент:

(проф. д-р Огнян Касабов)