

Българска академия на науките
Институт по математика и информатика

Йонко Динев Стойнов

Изследване на магнитоелектроеластични
композици с пукнатини чрез метода на граничните
интегрални уравнения

Автореферат

на дисертация за получаване на образователна и
научна степен “доктор”

Научна специалност 01.01.13

“Математическо моделиране и приложения на математиката”

Научен ръководител: проф. дмн Ц. Рангелов

Научен консултант: доц. д-р П. Динева

Жури:

проф. дмн Ц. Рангелов

проф. дмн А. Славова

проф. дмн Й. Иванова

доц. д-р М. Дачева

доц. д-р К. Георгиев

София, 2011

Дисертационният труд е обсъден и насочен за защита на научен семинар на секция “Диференциални уравнения и математическа физика” при Института по математика и информатика на БАН, състоял се на 19.05.2011 г.

Материалите по защитата са на разположение на интересующите се в библиотеката на Института по математика и информатика на БАН.

Автор: Йонко Динев Стойнов

Заглавие: Изследване на магнитоелектроеластични композити с пукнатини чрез метода на граничните интегрални уравнения

Научен ръководител: проф. дмн Ц. Рангелов

Научен консултант: доц. д-р П. Динева

Обща характеристика на дисертацията

1. Актуалност и мотивировка на темата

Магнитоелектроеластичните материали (МЕЕМ) са представители на съвременните мултифункционални материали. Те намират все по – голямо приложение в множество интелигентни системи и устройства като електромагнитни преобразуватели, сензори, акустични/ултразвукови устройства, хидрофони и други. Общото във всички тези устройства е способността на материалите, които ги изграждат, да превръщат механичната, електричната и магнитната енергия една в друга, (виж Zhou, Wang (2005), Wu, Huang (2000)). Основен недостатък на тези материали е, че са крехки, т.е. имат свойството да се разрушават при малки деформации. Когато МЕЕМ се намират в режим на производство или експлоатация, те са подложени на механично, електрично и магнитно натоварване. Наличието на фабрични дефекти, като пукнатини, пори, включения и друг тип хетерогенности, води до силно изменение на якостните им свойства, влошава тяхната надежност и качествени показатели. По време на експлоатация при допълнителен външен товар е възможно локалното поле на концентрация на напрежението в близост до тези пукнатини да достигне критични стойности и да доведе до разрушение на съответното инженерно съоръжение. При многофункционалните материали пукнатините могат да провокират разрушение не само при механичен товар, но и при наличие на електрични и магнитни полета, каквито присъстват в работния режим на интелигентните инженерни съоръжения. Ето защо е важно да бъде разработена методика за оценка на основните характеристики в механика на разрушенията, а именно коефициентите на интензивност на напрежението (КИН), за да се предскаже поведението на пукнатините при прилагане на външен механичен и/или електричен и/или магнитен статичен или динамичен товар. В случая на МЕЕ материал, принципите на линейната механика на разрушение се обобщават и се разглеждат коефициенти на интензивност на механичното напрежение, на интензитета на електричното поле и на напрежението на магнитното поле породени от статичен или динамичен товар. Много често в литературата се говори за обобщен коефициент на напрежение в тези материали. Може да се разглежда чисто механичен, чисто електричен, чисто магнитен или комбиниран електромеханичен, магнитомеханичен, магнитоелектричен или магнитоелектромеханичен товар, като във всички случаи

обобщеният коефициент на интензивност на напрежение дава важна информация за концентрацията на напрежение в материала. Тази информация е свързана с потенциалната възможност за движение на пукнатината, ново пукнатинообразуване и с оценка на една основна характеристика в механиката на разрушенията, а именно якост на материала при разрушение.

МЕЕМ обикновено са многофазни и имат пиезоелектрична и пиезомагнитна фаза, (виж Nan et al. (2008), Liu, Huang (2005), Chue, Hsu (2008)). Материалите, които ние изследваме са композити, които имат за матрица пиезомагнитен материал $CoFe_2O_4$ и включения от пиезоелектричен материал $BaTiO_3$. Освен тях широк клас от кристали (виж Sirotin, Shaskolskaya(1982)) също могат да бъдат класифицирани като МЕЕМ. Тези материали, известни още като мултифероични (виж Erenstein et al. (2006)) притежават прав и обратен магнитоелектричен (МЕ) ефект, съобщен за пръв път от Suchtelen (1972). МЕ ефект е резултат от еластичното взаимодействие между двете фази. Съществуват естествени мултифероични материали, но техният МЕ ефект е или сравнително слаб или се появява при много ниски температури. Точно обратно, синтетичните мултифероични композити обикновено имат голям МЕ ефект, който се появява при температура над стайната. Възможно е той да бъде сто пъти по – голям от този в еднофазен магнитоелектричен материал (виж Zhou, Wang (2005)). Именно свързаните им физични свойства прави МЕЕМ особено привлекателни в hi-tech индустрията. Същевременно тяхното широко приложение в модерните технологии днес, налага разработката на методика, която да може да оценява концентрацията на вътрешни напрежения в механичен, електричен или магнитен контекст, което е пряко свързано с експлоатационния живот на една конструкция със съществуващи вече дефекти от типа на пукнатините.

2. Цел, предмет, задачи и структура на дисертацията

Цел на дисертационния труд е да бъде разработен, валидиран и приложен в интензивни симулации метод на гранични интегрални уравнения (МГИУ) за оценка на концентрацията на механично напрежение, концентрацията на интензитет на електричното поле и концентрацията на напрежение на магнитното поле в близост до пукнатина, разположена в равнина от МЕЕ материал, подложен на статичен или динамичен електричен и/или магнитен и/или механичен товар.

Отчетени са следните специфични свойства на материала: (а) анизотропност; (б) вътрешната съгласуваност на електрично, магнитно и механично полета и свързаните с тях материални характеристики; (в) физична и геометрична линейност, т.е. конститутивните уравнения са линейни и нелинейни ефекти не се отчитат. Допустими са малки премествания и деформации; (г) разгледани са два вида материал-хомогенен и нехомогенен или познат в литературата под термина функционално подреден материал (ФПМ). В първия случай, свързаните МЕЕ материални характеристики не зависят от координатите на точка от континуума, докато във втория случай те са непрекъсната функция от тези координати. Разгледан е специален клас от такива материали, в който материалните характеристики се изменят в експоненциална зависимост от пространствените координати.

Приложените натоварвания са статични или динамични, като динамичните са с хармонична зависимост във времето, т.е. честотно зависими със зададена честота. Разглежда се разпространението на плоски хармонични във времето хоризонтално поляризирани SH вълни в равнина от МЕЕ композит с пукнатина. Падащата вълна се разпространява в разглежданата равнина в произволна посока, но самата вълна има хоризонтална поляризация, т.е. трептенията на частиците от средата стават в посока перпендикулярна на посоката на разпространение на вълната и са извън тази равнина. Това е причината този вид равнинна задача в литературата да се нарича „antiplane”, т.е. антиплейн.

Предмет на изследване в дисертацията е именно този антиплейн проблем, където механичното преместване има само една компонента перпендикулярна на разглежданата равнина, а векторите на интензитета на електричното поле $E_i, i = 1, 2$, респективно вектора на електрическата индукция $D_i, i = 1, 2$ и вектора на напрежение на магнитното поле $H_i, i = 1, 2$, респективно вектора на магнитната индукция $B_i, i = 1, 2$, лежат в изследваната МЕЕ равнина. Механичните напрежения в този случай са само от срязващ вид. Разглежданата в дисертацията пукнатина е електромагнитно непрониклива, което означава че пукнатината е свободна както от механични усилия така и от повърхностни електрични и магнитни товари.

За постигане на поставената цел, в дисертацията са решени следните задачи, включени в съответните глави на дисертационния труд:

1. Представен е механичен модел описващ задачата за динамично поведение на линейна, трансверзалноизотропна, хомогенна или нехомогенна МЕЕ равнина с наличие на непропусклива по отношение на електрическото и магнитно поле линейна пукнатина, подложена на хармоничен във времето магнитоелектромеханичен товар. Изведени са вълновите уравнения, управляващи процеса на разпространение на вълни в МЕЕ равнина, както е и дефинирана граничната задача за оценка на вълновото поле в такава среда, като се отчита и наличие на пукнатина в нея. Формулировката на граничната задача съвместно с критичен преглед на получените в литературата резултати са представени в глава първа на дисертацията.
2. В глава 2 е предложен и дискутиран нехиперсингулярен метод на гранични интегрални уравнения в усилия. Формулираната в глава 1 гранична задача е описана чрез система от гранични интегродиференциални уравнения по линията на пукнатината, прилагайки предложения метод. Това става възможно благодарение на използването на обобщен J-интеграл за случая на еластодинамика, формулата на Гаус-Остроградски и наличието на фундаментално решение на вълновото уравнение за МЕЕ среда.
3. Основна компонента на МГИУ е фундаменталното решение на системата уравнения управляващи изследвания процес. Намирането на фундаментално решение за свързани задачи, каквато е задачата за динамично поведение на МЕЕ среда, е сериозно предизвикателство в повечето случаи. Една от причините, МГИУ да е с ограничено приложение при решаване на задачите за нехомогенни материали със свързани свойства е липсата в повечето случаи на фундаментално решение, което лесно да бъде използвано в разработен на базата на МГИУ софтуер. Глава 3 се занимава с извода на фундаменталното решение на вълновото уравнение за МЕЕМ, като се използва права и обратна трансформация на Радон.
4. Предложената обща методика в глави 2 и 3 се валидира и прилага за оценка на динамичното поведение на МЕЕ равнина с пукнатина в следните интересни за практиката случаи: (а) хомогенен материал подложен на статичен магнитоелектромеханичен статичен товар (глава 4); (б) хомогенен материал подложен на динамичен магнитоелектромеханичен статичен товар (глава 5); (в)

експоненциално нехомогенен МЕЕ материал под въздействие на динамичен товар (глава 6); (z) поведение на експоненциално нехомогенен МЕЕМ при критически честоти, управляващи състоянието на средата-състояние на покой, на разпространение на бягащи вълни или на вибрационно движение (глава 7).

Структурата на дисертацията се състои от уводна част, 7 глави, заключителна част, списък на цитираните литературни източници и списък на публикациите на автора. Текстът е в обем от 149 страници, в това число 26 фигури и 1 таблица. Списъкът на литературата обхваща 81 заглавия. Номерата на уравненията, таблиците и фигурите съвпадат с тези от дисертацията.

3. Ползност и приложимост на получените резултати в дисертацията

- ❖ Изведените фундаментални решения в глави 3-7 плюс разработената и валидирана изчислителна методика и софтуер могат да бъдат използвани и разширен обхватът им на действие за решаване на следните инженерни проблеми: (а) оценка на влиянието на геометричната форма на пукнатината върху интензитета на локалните полета на концентрация на механично, електрично и магнитно напрежение; (б) отчитане на статичното и динамично взаимодействие между пукнатините, когато те са повече от една; (в) оценка на влиянието на друг тип (освен експоненциален) материална нехомогенност върху напрегнато-деформираното състояние на МЕЕ тяло с пукнатини; (г) отчитане на взаимодействие между външната граница на МЕЕ тяло с крайни размери и пукнатината; (д) влияние на различни по характер и тип динамични товари, освен разглежданите в дисертацията хармонични във времето въздействия.
- ❖ Получените резултати представени чрез механични модели, изчислителна методика, валидиран софтуер, симулации разкриващи някои непознати и полезни за практиката ефекти в поведението на МЕЕ материали с пукнатини, намират приложение в следните области: (а) Изчисляването на КИН в МЕЕМ е с пряко приложение в механика на разрушение за прогнозиране на надеждността и качеството на съоръженията изградени от тези нови материали; (б) Възможността да се намери вълновото поле в коя да е точка от разглежданото тяло е с приложение в научната област-динамика на интелигентните системи, в които основните компоненти са направени от МЕЕМ; (в) в теория на

разпространение на вълни в свързани полета; (г) в ултразвуков безразрушителен контрол на МЕЕМ и на техни елементи; (д) в решаване на обратни задачи за идентификация на геометрията на пукнатината, нейното разположение, форма, размер, както и на оценка на КИН и състоянието на разрушение и повреда в елементи и съоръжения изградени от МЕЕМ.

- ❖ Създаденият софтуер може да бъде надграждан и доразвиван за решаване на по-сложни задачи, свързани не само с този вид материали, но и въобще с друг вид многофункционални хомогенни и функционално подредени нови композитни материали. Изграденият софтуер е на базата на програми на Фортран и Математика, създадени съвместно с доц. д-р Петя Динева от ИМех, БАН и проф. дмн Цвятко Рангелов от ИМИ, БАН на базата на програми за анизотропен еластичен и пиезоелектричен материал.

4. Аprobация на дисертацията

Основните резултати на дисертацията са публикувани в *Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci.*; *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*; *American Institute of Physics, Conference Proceedings* и са докладвани на 11th National Congress on Theoretical and Applied Mechanics, 2–5 Sept. 2009, Borovets, Bulgaria; 35th and 36th Conference on Applications of Mathematics in Engineering and Economics, June 2009, June 2010, Sozopol, Bulgaria; Mathematics in Industry Conference, July 2010, Sofia, Bulgaria; BGSIAM'10, December 2010, Sofia, Bulgaria.

Също така резултатите са докладвани на Семинара по диференциални уравнения и приложения в ИМИ, БАН, през 2008 г. и на Отчетните сесии на секция Математическа физика на ИМИ, БАН през 2008 г., 2009 г.

Част от резултатите са получени в изпълнение на договор ДИД 02/15, финансиран от Националния Фонд Научни Изследвания на тема “Комбиниран подход с метод на гранични интегрални уравнения и клетъчно невронни мрежи за анализ на пиезоелектрични материали с пукнатини” и на договор № 102ни218-11 на тема “Математическо моделиране на някои задачи от механиката и мрежовото оптимизиране”, с възложител НИС при ТУ-София.

Съдържание на дисертацията

Глава 1. Описание на задачата

1.1. Конститутивни и управляващи уравнения, характеризиращи магнитоелектроеластичната среда.

Разглеждаме линейно МЕЕ тяло, подложено на външно електрично и магнитно поле. В този случай, както е упоменато в Li (2005), поради специфичния характер на МЕЕ материал и свързаните материални характеристики под въздействието на електромагнитно поле се индуцира освен електрическа и магнитна индукция, и механична деформация. Обратно, ако е приложен механичен товар може да се създаде електрично и магнитно поле, в допълнение към механичната деформация. Връзката между механичното, електричното и магнитното поле се дава от следните конститутивни уравнения, виж Li (2005), Benveniste (1995):

$$\begin{aligned}\sigma &= \mathbf{C}\mathbf{s} - \mathbf{e}\mathbf{E} - \mathbf{q}\mathbf{H}, \\ \mathbf{D} &= \mathbf{e}^t\mathbf{s} + \varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{d}\mathbf{H}, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{q}^t\mathbf{s} + \mathbf{d}\mathbf{E} + \mu\mathbf{H},\end{aligned}\tag{1.1}$$

където σ , \mathbf{D} и \mathbf{B} са съответно тензор на напрежение, вектор на електрическа индукция и вектор на магнитна индукция; \mathbf{s} , \mathbf{E} и \mathbf{H} са съответно тензор на деформация, вектор на интензитета на електричното поле и вектор на напрежение на магнитното поле; \mathbf{C} , ε и μ са съответно тензор на еластичността, тензор на диелектричните константи и тензор на коефициентите на магнитната пропускливост; \mathbf{e} , \mathbf{q} и \mathbf{d} са съответно тензор на пиезоелектричните, пиезомагнитните и магнитоелектричните коефициенти.

Тензорите участващи в конститутивните уравнения за трансверзално изотропни МЕЕ среди могат да се намерят в Hou et al. (2005), Li (2005).

1.1.1. Хомогенен МЕЕ материал.

Разглеждаме случая, когато МЕЕ тяло е подложено на антиплейн механично натоварване и инплейн електрично и магнитно натоварвания по отношение на равнината $x_1 O x_2$. В този случай е изпълнено:

$$u_1 = u_2 = 0, E_3 = 0, H_3 = 0, \quad (1.2)$$

където u_i е компонентата на еластичното преместване, $i = 1, 2, 3$. В нашия модел тези величини са едни и същи във всички равнини перпендикулярни на оста на симетрия и затова не зависят от x_3 . Различни от нула са единствено антиплейн еластичното преместване $u_3 = w(x_1, x_2, t)$, инплейн интензитета на електрическото поле $E_i(x_1, x_2, t)$ и инплейн напрежение на магнитното поле $H_i(x_1, x_2, t)$, $i = 1, 2$. Тук, както и по-нататък, с t ще означаваме променливата за време. Връзките между компонентите на интензитета на електрическото поле и електричния потенциал и напрежението на магнитното поле и магнитния потенциал са следните $E_i = -\varphi_{,i}$ и $H_i = -\psi_{,i}$, $i = 1, 2$. Тук „ i ” като долен индекс означава диференциране по променливата x_i . Тези връзки са верни само ако приемем квазиелектростатично приближение в уравненията на Максвел за електромагнитното поле (виж Sladek et al. (2008), Parton, Kudryavtzev (1988)). В матричен вид тензорът на деформация, векторът на интензитет на електричното поле, тензорът на напрежение и векторът на напрежение на магнитното поле имат следния вид:

$$s = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{22} \\ s_{33} \\ 2s_{23} \\ 2s_{13} \\ 2s_{12} \end{pmatrix} E = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Както е известно при малки деформации е изпълнено: $s_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ (виж Aliabadi,

Rooke(1991)). Като използваме (1.2) намираме, че: $s_{11} = 0$, $s_{12} = 0$, $s_{22} = 0$,

$$s_{13} = \frac{1}{2}(u_{1,3} + u_{3,1}) = \frac{1}{2}u_{3,1}, \quad s_{23} = \frac{1}{2}(u_{2,3} + u_{3,2}) = \frac{1}{2}u_{3,2}. \quad \text{Ясно е също така, че}$$

$$s_{33} = u_{3,3} = \frac{\partial}{\partial x_3}(u_3(x_1, x_2, t)) = 0 \quad \text{и като заместим в (1.3) и (1.1) получаваме следните}$$

равенства:

$$\sigma_{13} = c_{44}u_{3,1} + e_{15}\varphi_{,1} + q_{15}\psi_{,1}, \quad \sigma_{23} = c_{44}u_{3,2} + e_{15}\varphi_{,2} + q_{15}\psi_{,2} \quad (1.8)$$

$$D_1 = e_{15}u_{3,1} - \varepsilon_{11}\varphi_{,1} - d_{11}\psi_{,1}, \quad D_2 = e_{15}u_{3,2} - \varepsilon_{11}\varphi_{,2} - d_{11}\psi_{,2}, \quad D_3 = 0 \quad (1.9)$$

$$B_1 = q_{15}u_{3,1} - d_{11}\varphi_{,1} - \mu_{11}\psi_{,1}, \quad B_2 = q_{15}u_{3,2} - d_{11}\varphi_{,2} - \mu_{11}\psi_{,2}, \quad B_3 = 0. \quad (1.10)$$

Уравнения (1.8), (1.9), (1.10) са конститутивните уравнения за трансверзално изотропно тяло при антиплейн механична деформация и инплейн електромагнитно натоварване. Уравнението на движение има следния вид (Върбанов Х. (1965)):

$$\sigma_{ij,i} + f_j = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \quad (1.11)$$

Тук, както и по-нататък ще подразбираме сумиране при повтарящи се индекси. В (1.11) f_j са компонентите на обемните сили. Ще предположим, че те са 0. С ρ сме означили плътността на МЕЕ среда. За $j=1,2$ двете страни на (1.11) са нули. Ако $j=3$, като използваме, че $\sigma_{33} = 0$ и (1.8) получаваме:

$$\begin{aligned} \sigma_{i3,i} &= \sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} + \sigma_{33,3} = c_{44}u_{3,11} + e_{15}\varphi_{,11} + q_{15}\psi_{,11} + c_{44}u_{3,22} + e_{15}\varphi_{,22} + q_{15}\psi_{,22} = \\ &= c_{44}\Delta u_3 + e_{15}\Delta\varphi + q_{15}\Delta\psi. \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{aligned}$$

е двумерният оператор на Лаплас. Като

заместим в (1.11) стигаме до следното равенство:

$$c_{44}\Delta u_3 + e_{15}\Delta\varphi + q_{15}\Delta\psi = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \quad (1.12)$$

За следващите две равенства ще използваме уравненията на Максвел:

$$D_{i,i} - f_e = 0, \quad B_{i,i} - f_m = 0, \quad (1.13)$$

където f_e е плътността на електричните заряди, f_m е плътността на електричния ток.

Ще предположим, че $f_e = 0$ и $f_m = 0$. Като използваме (1.9), (1.10) и (1.13) получаваме равенствата:

$$e_{15}\Delta u_3 - \varepsilon_{11}\Delta\varphi - d_{11}\Delta\psi = 0 \quad (1.14)$$

$$q_{15}\Delta u_3 - d_{11}\Delta\varphi - \mu_{11}\Delta\psi = 0 \quad (1.15)$$

Уравнения (1.12), (1.14) и (1.15) са уравненията на движение за МЕЕ тяло в състояние на антиплейн деформация и инплейн електричен и магнитен товар.

В случая, когато зависимостта на приложения динамичен товар от времето е хармонична със зададена честота ω , търсим решения на (1.12), (1.14) и (1.15) във вида:

$$\tilde{w}(x,t) = w(x)e^{it\omega}, \quad \tilde{\varphi}(x,t) = \varphi(x)e^{it\omega}, \quad \tilde{\psi}(x,t) = \psi(x)e^{it\omega}$$

където $x = (x_1, x_2)$ и за w, φ, ψ получаваме следната система от уравнения за движение:

$$\begin{cases} c_{44}\Delta w + e_{15}\Delta\varphi + q_{15}\Delta\psi + \rho\omega^2 w = 0 \\ e_{15}\Delta w - \varepsilon_{11}\Delta\varphi - d_{11}\Delta\psi = 0 \\ q_{15}\Delta w - d_{11}\Delta\varphi - \mu_{11}\Delta\psi = 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

1.1.2. Нехомогенност на МЕЕ материал.

В нехомогенния случай предполагаме, че всички материални параметри зависят по един и същи начин от радиус вектор x чрез функция на нехомогенност $h(x)$, $h \in C^1(K)$, $h > 0$, където K е изпъкнала, ограничена област в R^2 и $\partial K \in C^1$. Аналитично това можем да запишем така:

$$\begin{aligned} e_{15}(x) &= h(x)e_{15}, \quad c_{44}(x) = h(x)c_{44}, \quad q_{15}(x) = h(x)q_{15}, \\ \varepsilon_{11}(x) &= h(x)\varepsilon_{11}, \quad d_{11}(x) = h(x)d_{11}, \quad \mu_{11}(x) = h(x)\mu_{11}, \quad \rho(x) = h(x)\rho. \end{aligned} \quad (1.17)$$

В този случай, аналогично на 1.1.1 получаваме следната система за движение в честотната област:

$$\begin{cases} (c_{44}(x)u_{3,i})_{,i} + (e_{15}(x)u_{4,i})_{,i} + (q_{15}(x)u_{5,i})_{,i} + \rho\omega^2 u_3 = 0 \\ (e_{15}(x)u_{3,i})_{,i} - (\varepsilon_{11}(x)u_{4,i})_{,i} - (d_{11}(x)u_{5,i})_{,i} = 0 \\ (q_{15}(x)u_{3,i})_{,i} - (d_{11}(x)u_{4,i})_{,i} - (\mu_{11}(x)u_{5,i})_{,i} = 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

където сме означили $u_4 = \varphi$ и $u_5 = \psi$. С цел използване на по-компактен запис на уравненията, въвеждаме обобщен тензор на еластичността:

$$\begin{aligned} C_{iJKl}(x) &= 0, \text{ за } i \neq l, \quad C_{i33l}(x) = \begin{cases} c_{44}(x), i=l \\ 0, i \neq l \end{cases}, \quad C_{i34l}(x) = C_{i43l}(x) = \begin{cases} e_{15}(x), i=l \\ 0, i \neq l \end{cases}, \\ C_{i35l}(x) &= C_{i53l}(x) = \begin{cases} q_{15}(x), i=l \\ 0, i \neq l \end{cases}, \quad C_{i44l}(x) = \begin{cases} -\varepsilon_{11}(x), i=l \\ 0, i \neq l \end{cases}, \\ C_{i45l}(x) &= C_{i54l}(x) = \begin{cases} -d_{11}(x), i=l \\ 0, i \neq l \end{cases}, \quad C_{i55l}(x) = \begin{cases} -\mu_{11}(x), i=l \\ 0, i \neq l \end{cases} \end{aligned}$$

и обобщен вектор на преместване $u_J = (u_3, u_4, u_5)$. Тогава системата (1.18) ще се запише така:

$$(C_{iJKl}(x)u_{K,l})_{,l} + \rho_{JK}(x)\omega^2 u_K = 0, \quad (1.19)$$

$$\text{където } i, l = 1, 2; J, K = 3, 4, 5, \quad \sigma_{iJ} = C_{iJKl}(x)u_{K,l}, \quad \rho_{JK}(x) = h(x)\rho_{JK}, \quad \rho_{JK} = \begin{cases} \rho, J = K = 3 \\ 0, J \text{ или } K \neq 3 \end{cases}$$

По-нататък ще разглеждаме задачата за пукнатина в безкрайна МЕЕ среда. В средата се разпространява падаща SH-вълна, която след като достигне границата на две различни среди се отразява. Полето във всяка точка от средата пресмятаме като суперпозиция на полето на падащата и отразената вълна. Приемаме, че пукнатината, която по-нататък ще означаваме с Γ е непропусклива, т.е. през нея не преминава електрично и магнитно

поле и е свободна от механични усилия. Математически това може да се изрази, като наложим следните гранични условия върху Γ :

$$t_J = 0, \quad (1.20)$$

където $t_J = \sigma_{ij}n_i$ е пълното усилие, а $n = (n_1, n_2)$ е нормалния вектор на пукнатината.

Тъй като пукнатината е непрониклива е изпълнено условието $t_J|_{\Gamma} = (t_J^{in} + t_J^{sc})|_{\Gamma}$, където t_J^{in} и t_J^{sc} са полетата на усилията породени съответно от падащата и отразената вълна.

1.2 Изследване на проблема досега

В дисертацията се прави обзор на някои основни резултати в последните години върху МЕЕ среди с пукнатини, като са разграничени случаите в зависимост от външното натоварване – статично или динамично.

Глава 2. Нехиперсингулярен метод на граничните интегрални уравнения.

Разглеждаме следното уравнение описващо вълновото поле в безкрайна МЕЕ среда, подложена на хармоничен във времето товар, като се отчита и наличие на обемни сили, електрически заряди и тоци, което е като уравнение (1.15), Глава 1 с ненулева дясна част:

$$\sigma_{ij,i} + \rho_{JK}\omega^2 u_K = F_J. \quad (2.1)$$

Ще докажем, че ако $u_J(x_1, x_2, x_3)$ удовлетворява (2.1), то е в сила равенството:

$$\oint_S \left[\frac{1}{2} (\sigma_{Ji} u_{J,i} - \rho_{JK} \omega^2 u_J u_K) \delta_{js} - \sigma_{Jj} u_{J,s} \right] n_j dS + \int_D F_J u_{J,s} dD = 0 \quad (2.2)$$

където S е затворена повърхнина в пространството, заграждаща област D , векторът $n = (n_1, n_2, n_3)$ е външен нормален вектор към S , δ_{js} е символа на Кронекер. Равенство (2.2) може да се разглежда като обобщение на добре познатите J-интеграли в еластостатиката и представлява закон за запазване на енергията в теория на непрекъснатите среди (виж Irwin (1957), Rice (1968)). Ще предположим, че $u_J(x_1, x_2, x_3)$ има непрекъснати втори частни производни. Нека да въведем означението:

$$A_J = \frac{1}{2} (\sigma_{Ji} u_{J,i} - \rho_{JK} \omega^2 u_J u_K) \delta_{js} - \sigma_{Jj} u_{J,s} \quad (2.3)$$

Тъй като от формулата на Гаус-Остроградски следва, че

$$\oint\oint_S (A_1 n_1 + A_2 n_2 + A_3 n_3) dS = \int_D (A_{1,1} + A_{2,2} + A_{3,3}) dD \quad (2.4)$$

достатъчно е да докажем равенството:

$$A_{j,j} = -F_j u_{j,s} \quad (2.5)$$

В дисертацията е доказано (2.5), откъдето следва равенство (2.2). Нека сега да разгледаме две тройки функции $\{u_j^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)}, F_j^{(1)}\}$ и $\{u_j^{(2)}, \sigma_{ij}^{(2)}, F_j^{(2)}\}$, които удовлетворяват (2.1). От принципа на суперпозицията следва, че $u_j = u_j^{(1)} + u_j^{(2)}$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}$ и $F_j = F_j^{(1)} + F_j^{(2)}$ също удовлетворяват (2.1) и като използваме (2.2) получаваме:

$$I_s[u_j] = 0 \quad (2.14)$$

От друга страна като заместим u_j в (2.2), преобразуваме и използваме (2.14) стигаме до следното равенство:

$$\oint\oint_S [(\sigma_{ij}^{(2)} u_{j,i}^{(1)} - \rho_{JK} \omega^2 u_j^{(1)} u_K^{(2)}) \delta_{js} - (\sigma_{jj}^{(1)} u_{j,s}^{(2)} + \sigma_{jj}^{(2)} u_{j,s}^{(1)})] n_j dS + \int_D (F_j^{(2)} u_{j,s}^{(1)} + F_j^{(1)} u_{j,s}^{(2)}) dD = 0 \quad (2.16)$$

По-нататък да разгледаме две конкретни тройки функции, които удовлетворяват (2.1):

$$\{u_j, \sigma_{ij}, 0\} \text{ и } \{u_{KM}^*, \sigma_{iJM}^*, -\delta_{JM} \delta(x, \xi)\},$$

където $\delta(x, \xi)$ е делта функцията на Дирак. В първия случай уравнението (2.1) е удовлетворено, когато няма обемни сили, електрически заряди и тоци. Разсеяното поле изпълнява това изискване. Втората тройка е фундаменталното решение. Заместваме в (2.16), като фундаменталното решение е с горен индекс 2, а неизвестното разсеяно поле е с горен индекс 1:

$$\oint\oint_S [(\sigma_{iJM}^* u_{j,i} - \rho_{JK} \omega^2 u_j u_{KM}^*) \delta_{js} - (\sigma_{ij} u_{JM,s}^* + \sigma_{iJM}^* u_{j,s})] n_j dS + \int_D (-\delta_{JM} \delta(x, \xi) u_{j,s}) dD = 0. \quad (2.17)$$

Като използваме двумерността на задачата, специален вид на областта заградена от S и условието на Зомерфелд стигаме до следното представяне за производните на неизвестното разсеяно поле на обобщено преместване:

$$u_{M,s}(\xi) = - \int_{\Gamma} [(\sigma_{iJM}^* u_{j,i} - \rho_{JK} \omega^2 u_j u_{KM}^*) \delta_{js} - (\sigma_{jj} u_{JM,s}^* + \sigma_{jJM}^* u_{j,s})] n_j dl. \quad (2.22)$$

В (2.22) с Γ е означено сечението на пукнатината с равнината $Ox_1 x_2$. Ще използваме, че обобщеното напрежение е едно и също върху горната и долната част на пукнатината (векторът на усилие е еднакъв по големина и противоположен по посока на двата бряга на пукнатината, поради равновесието на действащите сили), а преместването е различно: u_j^+ върху горната и u_j^- върху долната част на пукнатината (поради нарушение на кинематичното условие на границата на две среди). Тогава от (2.22) намираме следното представяне за разсеяното поле:

$$u_{M,s}(\xi) = - \int_{\Gamma^+} [(\sigma_{iJM}^* \Delta u_{j,i} - \rho_{JK} \omega^2 \Delta u_j u_{KM}^*) \delta_{js} - \sigma_{jJM}^* \Delta u_{j,s}] n_j dl, \quad (2.24)$$

където $\Delta u_J = u_J^+ - u_J^-$. Като направим граничен преход $\xi \rightarrow \Gamma^+$ в (2.24), използваме обобщения закон на Хук и граничното условие $t_J = t_J^{in} + t_J^{sc} = 0$, получаваме следното интегро-диференциално уравнение върху пукнатината:

$$t_J^{in}(\xi) = C_{iJM_s} n_i(\xi) \int_{\Gamma^+} [(\sigma_{iJM}^* \Delta u_{J,i} - \rho_{JK} \omega^2 \Delta u_{J,KM}^*) \delta_{js} - \sigma_{jJM}^* \Delta u_{J,s}] n_j dl, \quad \xi \in \Gamma^+. \quad (2.25)$$

Това е нехиперсингулярно гранично интегрално уравнение в усилия. В това уравнение t_J^{in} представлява външното натоварване. Интегралите се разбират като главна стойност в смисъл на Коши. Уравнение (2.25) се решава числено спрямо неизвестния скок на преместването и след това като се използва (2.24) разсеяното поле на усилията в точки нележащи върху пукнатината се намира по формулата:

$$t_J^{sc}(\xi) = -C_{iJM_s} n_i(\xi) \int_{\Gamma^+} [(\sigma_{iJM}^* \Delta u_{J,i} - \rho_{JK} \omega^2 \Delta u_{J,KM}^*) \delta_{js} - \sigma_{jJM}^* \Delta u_{J,s}] n_j dl, \quad \xi \notin \Gamma^+ \quad (2.26)$$

След като това поле е известно можем да дефинираме коефициентите на интензивност на напрежението, виж Song, Sih (2003), аналогично на пиезоелектричния случай в Suo et al. (1992). Ако пукнатината е хоризонтално разположена по оста Ox_1 симетрично относно началото, $\Gamma = (-c, c)$, механичният коефициент на интензивност се намира от израза:

$$K_{III} = \lim_{x \rightarrow \pm c} t_3 \sqrt{2\pi(x_1 \mp c)}, \quad (2.27)$$

Аналогично коефициента на интензивност на електрическата индукция и коефициента на интензивност на магнитната индукция се получават по формулите:

$$K_D = \lim_{x \rightarrow \pm c} t_4 \sqrt{2\pi(x_1 \mp c)}, \quad (2.28)$$

$$K_B = \lim_{x \rightarrow \pm c} t_5 \sqrt{2\pi(x_1 \mp c)}, \quad (2.29)$$

Целта ни в следващите глави е да решим числено интегродиференциалното уравнение (2.25) и с помощта на представянето (2.26) да получим полето в точки близки до върховете на пукнатината, от където да определим с формулите (2.27)-(2.29) коефициентите на интензивност.

Глава 3. Фундаментално решение

Резултатите от тази глава са публикувани в Stoynov, Rangelov (2009).

Фундаменталното решение на системата частни диференциални уравнения (1.19), Глава 1 се дефинира като решение на системата:

$$\sigma_{iJM,i}^* + \rho_{JK}(x)\omega^2 u_{KM}^* = -\delta_{JM}\delta(x, \xi), \quad (3.1)$$

където $\sigma_{iJK}^* = C_{iJKl}(x)u_{KM,l}^*$. Тук ще намерим решението на (3.1) в явен вид, подходящ за използването му за решаване на интегродиференциалното уравнение (2.25).

3.1 Функционално преобразуване и преобразуване на Радон.

Следвайки Manolis, Shaw (1996) и Rangelov et. al. (2008), правим трансформацията

$$u_{KM}^* = h^{-1/2}U_{KM}^*, \quad (3.2)$$

в (3.1) и получаваме уравнения за U_{KM}^* с постоянни коефициенти. След като приложим трансформация на Радон (виж Ludwig (1966), Zayed (1996)) стигаме до следната система:

$$\begin{cases} \tilde{c}_{44}\partial_s^2\hat{U}_{33}^* + \tilde{e}_{15}\partial_s^2\hat{U}_{43}^* + \tilde{\gamma}_{33}\hat{U}_{33}^* + \tilde{\gamma}_{34}\hat{U}_{43}^* = -h^{-1/2}\delta(s - \langle \xi, m \rangle) \\ \tilde{c}_{44}\partial_s^2\hat{U}_{34}^* + \tilde{e}_{15}\partial_s^2\hat{U}_{44}^* + \tilde{\gamma}_{33}\hat{U}_{34}^* + \tilde{\gamma}_{34}\hat{U}_{44}^* = 0 \\ \tilde{e}_{15}\partial_s^2\hat{U}_{33}^* - \tilde{e}_{11}\partial_s^2\hat{U}_{43}^* + \tilde{\gamma}_{34}\hat{U}_{33}^* + \tilde{\gamma}_{44}\hat{U}_{43}^* = 0 \\ \tilde{e}_{15}\partial_s^2\hat{U}_{34}^* - \tilde{e}_{11}\partial_s^2\hat{U}_{44}^* + \tilde{\gamma}_{34}\hat{U}_{34}^* + \tilde{\gamma}_{44}\hat{U}_{44}^* = -h^{-1/2}\delta(s - \langle \xi, m \rangle) \\ q_{15}\partial_s^2\hat{U}_{33}^* - d_{11}\partial_s^2\hat{U}_{43}^* - \mu_{11}\partial_s^2\hat{U}_{53}^* - q_{15}\eta\hat{U}_{33}^* + d_{11}\eta\hat{U}_{43}^* + \mu_{11}\eta\hat{U}_{53}^* = 0 \\ q_{15}\partial_s^2\hat{U}_{34}^* - d_{11}\partial_s^2\hat{U}_{44}^* - \mu_{11}\partial_s^2\hat{U}_{54}^* - q_{15}\eta\hat{U}_{34}^* + d_{11}\eta\hat{U}_{44}^* + \mu_{11}\eta\hat{U}_{54}^* = 0 \\ q_{15}\partial_s^2\hat{U}_{35}^* - d_{11}\partial_s^2\hat{U}_{45}^* - \mu_{11}\partial_s^2\hat{U}_{55}^* - q_{15}\eta\hat{U}_{35}^* + d_{11}\eta\hat{U}_{45}^* + \mu_{11}\eta\hat{U}_{55}^* = -h^{-1/2}\delta(s - \langle \xi, m \rangle) \\ \tilde{c}_{44}\partial_s^2\hat{U}_{35}^* + \tilde{e}_{15}\partial_s^2\hat{U}_{45}^* + \tilde{\gamma}_{33}\hat{U}_{35}^* + \tilde{\gamma}_{34}\hat{U}_{45}^* = -h^{-1/2}(q_{15} / \mu_{11})\delta(s - \langle \xi, m \rangle) \\ \tilde{e}_{15}\partial_s^2\hat{U}_{35}^* - \tilde{e}_{11}\partial_s^2\hat{U}_{45}^* + \tilde{\gamma}_{34}\hat{U}_{35}^* + \tilde{\gamma}_{44}\hat{U}_{45}^* = h^{-1/2}(d_{11} / \mu_{11})\delta(s - \langle \xi, m \rangle) \end{cases} \quad (3.7)$$

В (3.7) сме използвали означенията:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{44} &= c_{44} + \frac{q_{15}^2}{\mu_{11}}, \tilde{e}_{15} = e_{15} - \frac{d_{11}q_{15}}{\mu_{11}}, \tilde{e}_{11} = \varepsilon_{11} - \frac{d_{11}^2}{\mu_{11}}, \tilde{\gamma}_{33} = \rho\omega^2 - c_{44}\eta - \frac{q_{15}^2}{\mu_{11}}\eta, \\ \tilde{\gamma}_{34} &= -e_{15}\eta + \frac{d_{11}q_{15}}{\mu_{11}}\eta, \tilde{\gamma}_{44} = \varepsilon_{11}\eta - \frac{d_{11}^2}{\mu_{11}}\eta, \eta = h^{-1/2}(h^{1/2})_{,ii}, \end{aligned}$$

а m е реално число, за което $|m|=1$. Правим линейни преобразувания върху (3.7) и получаваме уравнения за $\hat{U}_{3J}^*, J=3,4,5$:

$$\begin{aligned} \partial_s^2\hat{U}_{33}^* + \bar{\gamma}\hat{U}_{33}^* &= -\frac{h^{-1/2}\delta(s-\tau)}{\tilde{a}} \\ \partial_s^2\hat{U}_{34}^* + \bar{\gamma}\hat{U}_{34}^* &= -\frac{h^{-1/2}\tilde{e}_{15}\delta(s-\tau)}{\tilde{e}_{11}\tilde{a}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\partial_s^2\hat{U}_{35}^* + \bar{\gamma}\hat{U}_{35}^* = -\frac{h^{-1/2}}{\mu_{11}\tilde{a}}(q_{15} - d_{11}\frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{e}_{11}})\delta(s-\tau), \quad (3.22)$$

$$\text{където } \tau = \langle \xi, m \rangle, \tilde{a} = \tilde{c}_{44} + \frac{\tilde{e}_{15}^2}{\tilde{\epsilon}_{11}}, \bar{\gamma} = \frac{\tilde{\gamma}_{33} + \tilde{\gamma}_{34} \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{\epsilon}_{11}}}{\tilde{a}}.$$

Ясно е, че решенията на (3.10) и (3.22) ще зависят от знака на $\bar{\gamma}$ и разглеждаме следните случаи:

3.2.1. $\bar{\gamma} > 0$. Като положим $\bar{\gamma} = k^2$ и следваме Vladimirov (1984), намираме:

$$\hat{U}_{33}^* = \frac{ih^{-1/2}}{2k\tilde{a}} e^{ik|s-\tau|}, \hat{U}_{34}^* = \frac{ih^{-1/2}\tilde{e}_{15}}{2k\tilde{a}\tilde{\epsilon}_{11}} e^{ik|s-\tau|}, \hat{U}_{35}^* = \frac{ih^{-1/2}}{\mu_{11}\tilde{a}} (q_{15} - d_{11} \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{\epsilon}_{11}}) \frac{e^{ik|s-\tau|}}{2k},$$

а \hat{U}_{KJ}^* удовлетворява следните уравнения:

$$\partial_s^2 \hat{U}_{KJ}^* - \eta \hat{U}_{KJ}^* = g_{K1}^J \delta(s-\tau) + g_{K2}^J e^{ik|s-\tau|}, K = 4, 5; J = 3, 4, 5,$$

където:

$$g_{41}^3 = \frac{h^{-1/2}}{\tilde{e}_{15}} (\frac{\tilde{c}_{44}}{\tilde{a}} - 1), g_{42}^3 = \frac{-(\tilde{\gamma}_{33} - \tilde{c}_{44}\bar{\gamma})ih^{-1/2}}{2k\tilde{a}\tilde{e}_{15}}, g_{41}^4 = \frac{h^{-1/2}}{\tilde{\epsilon}_{11}} \frac{\tilde{c}_{44}}{\tilde{a}}, g_{42}^4 = \frac{-(\tilde{\gamma}_{33} - \tilde{c}_{44}\bar{\gamma})ih^{-1/2}}{2k\tilde{a}\tilde{\epsilon}_{11}}$$

$$g_{41}^5 = \tilde{c}_{44} \frac{h^{-1/2}}{\mu_{11}\tilde{a}} (q_{15} - d_{11} \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{\epsilon}_{11}}) - h^{-1/2} \frac{q_{15}}{\mu_{11}},$$

$$g_{42}^5 = \tilde{c}_{44}\bar{\gamma} \frac{ih^{-1/2}}{2k\mu_{11}\tilde{a}} (q_{15} - d_{11} \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{\epsilon}_{11}}) - \tilde{\gamma}_{33} \frac{ih^{-1/2}}{2k\mu_{11}\tilde{a}} (q_{15} - d_{11} \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{\epsilon}_{11}})$$

$$g_{51}^3 = -(\frac{d_{11}}{\mu_{11}} g_{41}^3 + \frac{q_{15}}{\mu_{11}} \frac{h^{-1/2}}{\tilde{a}}), g_{52}^3 = -(\frac{q_{15}}{\mu_{11}} (\bar{\gamma} \frac{ih^{-1/2}}{2k\tilde{a}} + \eta \frac{ih^{-1/2}}{2k\tilde{a}}) + \frac{d_{11}}{\mu_{11}} g_{42}^3)$$

$$g_{51}^4 = -(\frac{q_{15}}{\mu_{11}} \frac{h^{-1/2}\tilde{e}_{15}}{\tilde{\epsilon}_{11}\tilde{a}} + \frac{d_{11}}{\mu_{11}} g_{41}^4), g_{52}^4 = -(\frac{q_{15}}{\mu_{11}} (\bar{\gamma} \frac{ih^{-1/2}\tilde{e}_{15}}{2k\tilde{a}\tilde{\epsilon}_{11}} + \eta \frac{ih^{-1/2}\tilde{e}_{15}}{2k\tilde{a}\tilde{\epsilon}_{11}}) + \frac{d_{11}}{\mu_{11}} g_{42}^4)$$

$$g_{51}^5 = -(\frac{q_{15}h^{-1/2}}{\mu_{11}^2\tilde{a}} (q_{15} - d_{11} \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{\epsilon}_{11}}) + \frac{d_{11}}{\mu_{11}} g_{41}^5),$$

$$g_{52}^5 = -(\frac{q_{15}}{\mu_{11}} (-\bar{\gamma} \frac{ih^{-1/2}}{2k\mu_{11}\tilde{a}} (q_{15} - d_{11} \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{\epsilon}_{11}}) + \eta \frac{ih^{-1/2}}{\mu_{11}\tilde{a}} (q_{15} - d_{11} \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{\epsilon}_{11}}) + \frac{d_{11}}{\mu_{11}} g_{42}^5)$$

Ще намерим решенията на тези уравнения в зависимост от знака на η .

3.2.1.1) Нека $\eta > 0$. Ще търсим \hat{U}_{KJ}^* , $K = 4, 5; J = 3, 4, 5$ във вида: $\hat{U}_{KJ}^* = w_{K1J} + w_{K2J}$, където

$$w_{K2J} = -\frac{g_{K2}^J}{\eta + \bar{\gamma}} e^{ik|s-\tau|}. \text{ След извършване на съответните пресмятания, получаваме}$$

следните решения:

$$\hat{U}_{KJ}^* = w_{K1J}(s) + w_{K2J}(s) = (2ik \frac{g_{K2}^J}{\eta + \bar{\gamma}} + g_{K1}^J) \frac{e^{\sqrt{\eta}|s-\tau|}}{2\sqrt{\eta}} - \frac{g_{K2}^J}{\eta + \bar{\gamma}} e^{ik|s-\tau|}, J = 3, 4, 5; K = 4, 5$$

3.2.1.2) Нека сега $\eta=0$. Тогава търсим решение \hat{U}_{KJ}^* във вида: $\hat{U}_{KJ}^* = w_{K1J} + w_{K2J}$, където

$$w_{K2J} = -\frac{g_{K2}^J}{\bar{\gamma}} e^{ik|s-\tau|}. \text{ Решенията в този случай са:}$$

$$\hat{U}_{KJ}^* = w_{K1J}(s) + w_{K2J}(s) = \left(\frac{2ig_{K2}^J + kg_{K1}^J}{2k}\right) |s-\tau| - \frac{g_{K2}^J}{\bar{\gamma}} e^{ik|s-\tau|}.$$

3.2.1.3) Нека сега $\eta < 0$. Нека $\hat{U}_{KJ}^* = w_{K1J} + w_{K2J}$. В зависимост от $\bar{\gamma}$ и $|\eta|$ ще разгледаме два случая.

а) $\bar{\gamma} \neq |\eta|$. Тогава избираме $w_{K2J} = -\frac{g_2^J}{\bar{\gamma} - |\eta|} e^{ik|s-\tau|}$ и след заместване и преобразуване

намираме съответните решения:

$$\hat{U}_{KJ}^* = \frac{1}{2i\sqrt{|\eta|}} \left(\frac{2g_{K2}^J}{\bar{\gamma} - |\eta|} (ik) + g_{K1}^J \right) e^{i\sqrt{|\eta||s-\tau|}} - \frac{g_{K2}^J}{\bar{\gamma} - |\eta|} e^{ik|s-\tau|}$$

б) $\bar{\gamma} = |\eta|$. В този случай трябва да положим $w_{K2J} = \frac{g_2^J}{2ik} e^{ik|s-\tau|} |s-\tau|$, а за решението

получаваме:

$$\hat{U}_{KJ}^* = \left(g_{K1}^J - \frac{g_{K2}^J}{ik}\right) \frac{e^{ik|s-\tau|}}{2ik} + \frac{g_{K2}^J}{2ik} e^{ik|s-\tau|} |s-\tau|.$$

3.2.2) $\bar{\gamma} = 0$.

$$\text{В този случай от дефиницията на } \bar{\gamma}: \bar{\gamma} = \frac{\tilde{\gamma}_{33} + \tilde{\gamma}_{34} \frac{\tilde{\epsilon}_{15}}{\tilde{\epsilon}_{11}}}{\tilde{a}}$$

намираме:

$$\tilde{\gamma}_{33} + \tilde{\gamma}_{34} \frac{\tilde{\epsilon}_{15}}{\tilde{\epsilon}_{11}} = 0, \tag{3.38}$$

като използваме, че

$$\tilde{\gamma}_{33} = \rho\omega^2 - c_{44}\eta - \frac{q_{15}^2}{\mu_{11}}\eta, \quad \tilde{\gamma}_{34} = -\eta\tilde{\epsilon}_{15} = -\eta\left(e_{15} - \frac{d_{11}q_{15}}{\mu_{11}}\right), \quad \tilde{\epsilon}_{11} = \epsilon_{11} + \frac{d_{11}^2}{\mu_{11}}$$

и заместим в (3.38), стигаме до:

$$\rho\omega^2 - c_{44}\eta - \eta\left(\frac{q_{15}^2}{\mu_{11}} + \frac{(e_{15} - \frac{d_{11}q_{15}}{\mu_{11}})^2}{\epsilon_{11} + \frac{d_{11}^2}{\mu_{11}}}\right) = 0$$

откъдето за η получаваме:

$$\eta = \frac{\rho\omega^2}{c_{44} + \frac{q_{15}^2}{\mu_{11}} + \frac{(e_{15} - \frac{d_{11}q_{15}}{\mu_{11}})^2}{\varepsilon_{11} + \frac{d_{11}^2}{\mu_{11}}}}. \text{ Виждаме, че } \eta \text{ може да бъде положително или}$$

отрицателно в зависимост от стойностите на c_{44} , μ_{11} и ε_{11} . За стабилни материали е изпълнено, че $c_{44} > 0$, $\mu_{11} > 0$, $\varepsilon_{11} > 0$ виж Soh, Liu (2005), което води до $\eta > 0$. Има материали, за които $\mu_{11} < 0$. За някои функции на нехомогенност е възможно $\eta = 0$.

Решенията на (3.10) и (3.22) в случая $\bar{\gamma} = 0$ са:

$$\hat{U}_{33}^* = -\frac{h^{-1/2}}{2\tilde{a}} |s - \tau|, \hat{U}_{34}^* = -\frac{h^{-1/2}\tilde{e}_{15}}{2\tilde{\varepsilon}_{11}\tilde{a}} |s - \tau|, \hat{U}_{35}^* = -\frac{h^{-1/2}}{2\mu_{11}\tilde{a}} (q_{15} - d_{11} \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{\varepsilon}_{11}}) |s - \tau|,$$

а \hat{U}_{KJ}^* удовлетворява следните уравнения:

$$\partial_s^2 \hat{U}_{KJ}^* - \eta \hat{U}_{KJ}^* = g_{K1}^J \delta(s - \tau) + g_{K2}^J |s - \tau|,$$

където:

$$\begin{aligned} g_{41}^3 &= \frac{\tilde{c}_{44}}{\tilde{\varepsilon}_{15}} \frac{h^{-1/2}}{\tilde{a}} - \frac{h^{-1/2}}{\tilde{\varepsilon}_{15}}, g_{42}^3 = \frac{\tilde{\gamma}_{33}}{\tilde{\varepsilon}_{15}} \frac{h^{-1/2}}{2\tilde{a}}, g_{41}^4 = \tilde{c}_{44} \frac{h^{-1/2}}{\tilde{\varepsilon}_{11}\tilde{a}}, g_{42}^4 = \tilde{\gamma}_{33} \frac{h^{-1/2}}{2\tilde{\varepsilon}_{11}\tilde{a}}, \\ g_{41}^5 &= \tilde{c}_{44} \frac{h^{-1/2}}{\tilde{\varepsilon}_{15}\mu_{11}\tilde{a}} (q_{15} - d_{11} \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{\varepsilon}_{11}}) - h^{-1/2} \frac{q_{15}}{\tilde{\varepsilon}_{15}\mu_{11}}, g_{42}^5 = \tilde{\gamma}_{33} \frac{h^{-1/2}}{2\tilde{\varepsilon}_{15}\mu_{11}\tilde{a}} (q_{15} - d_{11} \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{\varepsilon}_{11}}) \\ g_{51}^3 &= -\frac{q_{15}}{\mu_{11}} \frac{h^{-1/2}}{\tilde{a}} - \frac{d_{11}}{\mu_{11}} g_{41}^3, g_{52}^3 = \eta \frac{q_{15}}{\mu_{11}} \frac{h^{-1/2}}{2\tilde{a}} - \frac{d_{11}}{\mu_{11}} g_{42}^3, \\ g_{51}^4 &= -(\frac{q_{15}}{\mu_{11}} \frac{h^{-1/2}\tilde{e}_{15}}{\tilde{\varepsilon}_{11}\tilde{a}} + \frac{d_{11}}{\mu_{11}} g_{41}^4), g_{52}^4 = \eta \frac{q_{15}}{\mu_{11}} \frac{h^{-1/2}\tilde{e}_{15}}{2\tilde{\varepsilon}_{11}\tilde{a}} - \frac{d_{11}}{\mu_{11}} g_{42}^4, \\ g_{51}^5 &= -(\frac{q_{15}h^{-1/2}}{\mu_{11}^2\tilde{a}} (q_{15} - d_{11} \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{\varepsilon}_{11}}) + \frac{d_{11}}{\mu_{11}} g_{41}^5), g_{52}^5 = \eta \frac{q_{15}h^{-1/2}}{2\mu_{11}^2\tilde{a}} (q_{15} - d_{11} \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{\varepsilon}_{11}}) - \frac{d_{11}}{\mu_{11}} g_{42}^5. \end{aligned}$$

Както и в **3.2.1**) ще разгледаме различни случаи в зависимост от η .

3.2.2.1) Нека $\eta > 0$.

За да намерим \hat{U}_{KJ}^* , $K = 4, 5$; $J = 3, 4, 5$, отново полагаме $\hat{U}_{KJ}^* = w_{K1J} + w_{K2J}$ и вземаме

$$w_{K2J} = -\frac{g_{K2}^J}{\eta} |s - \tau|. \text{ След преобразувания получаваме следните решения:}$$

$$\hat{U}_{KJ}^* = (g_{K1}^J + 2 \frac{g_{K2}^J}{\eta}) \frac{e^{\sqrt{\eta}|s-\tau|}}{2\sqrt{\eta}} - \frac{g_{K2}^J}{\eta} |s - \tau|$$

3.2.2.2) Нека $\eta = 0$.

Отново полагаме $\hat{U}_{KJ}^* = w_{K1J} + w_{K2J}$, но този път $w_{K2J} = \frac{g_{K1}^J}{2} |s - \tau|$. Решенията в този

случай са:

$$\hat{U}_{KJ}^* = g_{K2}^J \frac{|s - \tau|^3}{6} + \frac{g_{K1}^J}{2} |s - \tau|.$$

3.2.2.3) Накрая нека $\eta < 0$. Сега отново ще търсим решение във вида $\hat{U}_{KJ}^* = w_{K1J} + w_{K2J}$,

като вземем $w_{K2J} = -\frac{g_{K2}^J}{\eta} |s - \tau|$.

$$\hat{U}_{KJ}^* = (g_{K1}^J + \frac{2g_{K2}^J}{\eta}) \frac{e^{i\sqrt{|\eta||s-\tau|}}}{2i\sqrt{|\eta|}} - \frac{g_{K2}^J}{\eta} |s - \tau|.$$

3.2.3) $\bar{\gamma} < 0$. В този случай:

$$\hat{U}_{33}^* = -\frac{h^{-1/2}}{\tilde{a}} \frac{e^{\sqrt{|\bar{\gamma}||s-\tau|}}}{2\sqrt{|\bar{\gamma}|}} \quad \hat{U}_{34}^* = -\frac{h^{-1/2}\tilde{e}_{15}}{\tilde{\epsilon}_{11}\tilde{a}} \frac{e^{\sqrt{|\bar{\gamma}||s-\tau|}}}{2\sqrt{|\bar{\gamma}|}} \quad \hat{U}_{35}^* = -\frac{h^{-1/2}}{\mu_{11}\tilde{a}} (q_{15} - d_{11} \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{\epsilon}_{11}}) \frac{e^{\sqrt{|\bar{\gamma}||s-\tau|}}}{2\sqrt{|\bar{\gamma}|}}$$

а за \hat{U}_{KJ}^* получаваме следните уравнения:

$$\partial_s^2 \hat{U}_{KJ}^* - \eta \hat{U}_{KJ}^* = g_{K1}^J \delta(s - \tau) + g_{K2}^J e^{\sqrt{|\bar{\gamma}||s-\tau|}, \quad K = 4, 5; J = 3, 4, 5$$

където:

$$g_{41}^3 = \frac{\tilde{c}_{44}}{\tilde{e}_{15}} \frac{h^{-1/2}}{\tilde{a}} - \frac{h^{-1/2}}{\tilde{e}_{15}}, \quad g_{42}^3 = \frac{\tilde{c}_{44}}{\tilde{e}_{15}} \sqrt{|\bar{\gamma}|} \frac{h^{-1/2}}{2\tilde{a}} + \frac{\tilde{\gamma}_{33}}{\tilde{e}_{15}} \frac{h^{-1/2}}{2\sqrt{|\bar{\gamma}|}\tilde{a}}, \quad g_{41}^4 = \tilde{c}_{44} \frac{h^{-1/2}}{\tilde{\epsilon}_{11}\tilde{a}},$$

$$g_{42}^4 = \tilde{c}_{44} \sqrt{|\bar{\gamma}|} \frac{h^{-1/2}}{2\tilde{\epsilon}_{11}\tilde{a}} + \tilde{\gamma}_{33} \frac{h^{-1/2}}{2\sqrt{|\bar{\gamma}|}\tilde{\epsilon}_{11}\tilde{a}}, \quad g_{41}^5 = \frac{\tilde{c}_{44}}{\tilde{e}_{15}} \frac{h^{-1/2}}{\mu_{11}\tilde{a}} (q_{15} - d_{11} \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{\epsilon}_{11}}) - \frac{h^{-1/2}}{\tilde{e}_{15}} \frac{q_{15}}{\mu_{11}},$$

$$g_{42}^5 = (\frac{\tilde{c}_{44}}{\tilde{e}_{15}} \sqrt{|\bar{\gamma}|} \frac{h^{-1/2}}{2\mu_{11}\tilde{a}} + \frac{\tilde{\gamma}_{33}}{\tilde{e}_{15}} \frac{h^{-1/2}}{2\sqrt{|\bar{\gamma}|}\mu_{11}\tilde{a}}) (q_{15} - d_{11} \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{\epsilon}_{11}}),$$

$$g_{51}^3 = -\frac{q_{15}}{\mu_{11}} \frac{h^{-1/2}}{\tilde{a}} - \frac{d_{11}}{\mu_{11}} g_{41}^3, \quad g_{52}^3 = \frac{q_{15}}{\mu_{11}} (-\sqrt{|\bar{\gamma}|} \frac{h^{-1/2}}{2\tilde{a}} + \eta \frac{h^{-1/2}}{2\sqrt{|\bar{\gamma}|}\tilde{a}}) - \frac{d_{11}}{\mu_{11}} g_{42}^3,$$

$$g_{51}^4 = -\frac{q_{15}}{\mu_{11}} \frac{h^{-1/2}\tilde{e}_{15}}{\tilde{\epsilon}_{11}\tilde{a}} - \frac{d_{11}}{\mu_{11}} g_{41}^4, \quad g_{52}^4 = \frac{q_{15}}{\mu_{11}} (-\sqrt{|\bar{\gamma}|} \frac{h^{-1/2}\tilde{e}_{15}}{2\tilde{\epsilon}_{11}\tilde{a}} + \eta \frac{h^{-1/2}\tilde{e}_{15}}{2\sqrt{|\bar{\gamma}|}\tilde{\epsilon}_{11}\tilde{a}}) - \frac{d_{11}}{\mu_{11}} g_{42}^4$$

$$g_{51}^5 = -\frac{q_{15}h^{-1/2}}{\mu_{11}^2\tilde{a}} (q_{15} - d_{11} \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{\epsilon}_{11}}) - \frac{d_{11}}{\mu_{11}} g_{41}^5,$$

$$g_{52}^5 = \frac{q_{15}}{\mu_{11}} (-\sqrt{|\bar{\gamma}|} \frac{h^{-1/2}}{2\mu_{11}\tilde{a}} (q_{15} - d_{11} \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{\epsilon}_{11}}) + \eta \frac{h^{-1/2}}{2\sqrt{|\bar{\gamma}|}\mu_{11}\tilde{a}} (q_{15} - d_{11} \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{\epsilon}_{11}})) - \frac{d_{11}}{\mu_{11}} g_{42}^5.$$

Напълно аналогично на предходните случаи **3.2.1)** и **3.2.2)** разглеждаме отново три възможности по отношение на η .

3.2.3.1) $\eta > 0$. Както и в **3.2.1.3)** ще разгледаме два случая в зависимост от $|\bar{\gamma}|$ и η .

а) $|\bar{\gamma}| \neq \eta$. Търсим решение във вида: $\hat{U}_{KJ}^* = w_{K1J} + w_{K2J}$, където

$w_{K2J} = \frac{g_{K2}^J}{|\bar{\gamma}| - \eta} e^{\sqrt{|\bar{\gamma}||s-\tau|}$. След съответните пресмятания получаваме следните решения:

$$\hat{U}_{KJ}^* = \left(g_{K1}^J - \frac{2g_{K2}^J \sqrt{|\bar{\gamma}|}}{|\bar{\gamma}| - \eta} \right) \frac{e^{\sqrt{\eta}|s-\tau|}}{2\sqrt{\eta}} + \frac{g_{K2}^J}{|\bar{\gamma}| - \eta} e^{\sqrt{|\bar{\gamma}||s-\tau|}.$$

б) $|\bar{\gamma}| = \eta$. В този случай полагаме $\hat{U}_{KJ}^* = w_{K1J} + w_{K2J}$, където

$w_{K2J} = \frac{g_{K2}^J}{2\sqrt{|\bar{\gamma}|}} e^{\sqrt{|\bar{\gamma}||s-\tau|} |s-\tau|$ и намираме решенията:

$$\hat{U}_{KJ}^* = \left(g_{K1}^J - \frac{g_{K2}^J}{\sqrt{|\bar{\gamma}|}} \right) \frac{e^{\sqrt{|\bar{\gamma}||s-\tau|}}}{2\sqrt{|\bar{\gamma}|}} + \frac{g_{K2}^J}{2\sqrt{|\bar{\gamma}|}} e^{\sqrt{|\bar{\gamma}||s-\tau|} |s-\tau|$$

3.2.3.2) $\eta = 0$. Отново нека $\hat{U}_{KJ}^* = w_{K1J} + w_{K2J}$, като $w_{K2J} = \frac{g_{K2}^J}{|\bar{\gamma}|} e^{\sqrt{|\bar{\gamma}||s-\tau|}$. Решенията са:

$$\hat{U}_{KJ}^* = \left(g_{K1}^J - 2 \frac{g_{K2}^J}{\sqrt{|\bar{\gamma}|}} \right) \frac{|s-\tau|}{2} + \frac{g_{K2}^J}{|\bar{\gamma}|} e^{\sqrt{|\bar{\gamma}||s-\tau|}.$$

3.2.3.3) $\eta < 0$. Нека $\hat{U}_{KJ}^* = w_{K1J} + w_{K2J}$, като положим $w_{K2J} = \frac{g_{K2}^J}{|\bar{\gamma}| + |\eta|} e^{\sqrt{|\bar{\gamma}||s-\tau|}$. За

решенията получаваме:

$$\hat{U}_{KJ}^* = \left(g_{K1}^J - 2 \frac{g_{K2}^J \sqrt{|\bar{\gamma}|}}{|\bar{\gamma}| + |\eta|} \right) \frac{e^{i\sqrt{|\eta||s-\tau|}}}{2i\sqrt{|\eta|}} + \frac{g_{K2}^J}{|\bar{\gamma}| + |\eta|} e^{\sqrt{|\bar{\gamma}||s-\tau|}.$$

3.3. Обратно преобразуване на Радон.

Прилага се на два етапа. За първия етап в дисертацията са доказани следните леми:

Лема 1.3

В сила е равенството:

$$K(e^{ik|s-\tau|} |s-\tau|) = \frac{1}{ik} K(e^{ik|s-\tau|}) + 2 + k\pi e^{ik|s-\tau|} |s-\tau| - \\ - 2k |s-\tau| (ci(k |s-\tau|) \sin(k |s-\tau|) - si(k |s-\tau|) \cos(k |s-\tau|))$$

където $K(f(s)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial_{\sigma}(f(\sigma))}{s-\sigma} d\sigma$, $s \neq \tau$, $\tau = const$, $k = const$, а $si(x)$ и $ci(x)$ са съответно

интегрален синус и интегрален косинус, чийто дефиниции са следните:

$$ci(u) = -\int_u^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt, \quad si(u) = -\int_u^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt, \quad (\text{виж Bateman, Erdelyi (1953)}).$$

Лема 2.3

В смисъл на разпределения за $s \neq \tau$ е изпълнено равенството:

$$K(|s-\tau|) = 2 \ln \beta \Big|_{\beta=|s-\tau|} + C, \quad \text{където } C = const$$

Лема 3.3

Изпълнено е следното равенство:

$$K(e^{ik|s-\tau|}) = -ik \{ i\pi e^{ik\beta} - 2[ci(k\beta)\cos(k\beta) + si(k\beta)\sin(k\beta)] \} \Big|_{\beta=|s-\tau|}$$

където $s \neq \tau$.

Лема 4.3

Изпълнено е в смисъл на разпределения равенството:

$$K(e^{k|s-\tau|}) = k \{ C_1 \cosh(k\beta) + C_2 \sinh(k\beta) + 2[chi(k\beta)\cosh(k\beta) - shi(k\beta)\sinh(k\beta)] \} \Big|_{\beta=|s-\tau|},$$

където C_1 и C_2 са константи.

Лема 5.3

Изпълнено е в смисъл на разпределения равенството:

$$K(|s-\tau|^3) = 6(\beta^2 \ln \beta - \frac{3}{2}\beta^2) + C_1\beta^2 + C_2\beta + C_3, \quad \beta = |s-\tau|$$

където C_1 , C_2 и C_3 са константи.

Тъй като оператора $K(\cdot)$ е линеен оператор и образите на фундаменталните решения са линейни комбинации от изразите $|s-\tau|^3$, $|s-\tau|$, $e^{ik|s-\tau|}$, $e^{k|s-\tau|}$ и $e^{ik|s-\tau|}|s-\tau|$, то можем да пресметнем оператора K от всеки образ. След това фундаменталните решения намираме по формулата за обратното преобразуване на Радон:

$$R^{-1}(\hat{U}_{JK}^*) = U_{JK}^* = \frac{1}{4\pi^2} \int_{|m|=1} K(\hat{U}_{JK}^*)(s) \Big|_{s=\langle x, m \rangle} dm$$

В тази глава за различни случаи е намерено фундаменталното решение на свързаната система частни диференциални уравнения, като се използва права и обратна трансформация на Радон. Полученото решение се използва в нехиперсингулярно гранично интегрално уравнение в Глави 4-7 за получаване на числени резултати.

Глава 4. Поведение на хомогенен МЕЕ материал с пукнатина при статичен товар

Основните резултати от тази глава са публикувани в Stoynov (2009) и докладвани на Конференцията АМЕЕ, Юни 2009, Созопол.

4.1. Постановка на задачата

Разглеждаме пукнатина в безкрайна, хомогенна, МЕЕ равнина подложена на статично, антиплейн механично и инплейн електрично и магнитно натоварване. Използваме същите означения като в Глава 1, но тъй като няма зависимост от времето, системата уравнения за статично равновесие относно неизвестните u_3, φ, ψ ще изглежда така:

$$\begin{cases} c_{44}\Delta u_3 + e_{15}\Delta\varphi + q_{15}\Delta\psi = 0 \\ e_{15}\Delta u_3 - \varepsilon_{11}\Delta\varphi - d_{11}\Delta\psi = 0 \\ q_{15}\Delta u_3 - d_{11}\Delta\varphi - \mu_{11}\Delta\psi = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Чрез въвеждане на обобщен тензор на еластичността, обобщен вектор на преместването и обобщен тензор на напрежението, както в Глава 1, система (4.1) ще изглежда по следния начин:

$$C_{ijkl}u_{k,ll} = 0 \quad (4.2)$$

Предполагаме, че пукнатината е непропусклива, т.е. не пропуска електрично и магнитно поле и е свободна от усилия, а математически това може да се изрази така:

$$t_j \Big|_{\Gamma} = 0,$$

като с t_j е означено пълното усилие върху пукнатината, което може да се представи във вида $t_j = t_j^\infty + t_j^{cr}$, където $t_j^\infty = \sigma_{ij}^\infty n_i$ е външното натоварване, а t_j^{cr} е усилието възникнало поради реакцията на пукнатината на външното натоварване. Така получаваме:

$$t_j^{cr} = -\sigma_{ij}^\infty n_i \quad (4.3)$$

Ще решим задачата (4.2), (4.3), като я преобразуваме в еквивалентна интегро – диференциална система от уравнения върху пукнатината, чрез използване на J-интеграл и след това решим тази система числено. За да осъществим тази цел първо ще трябва да намерим фундаменталното решение на (4.2).

4.2. Фундаментално решение

Фундаменталното решение на (4.2) се дефинира като решение на уравнението:

$$C_{iJKl} U_{KM,Il}^* = -\delta_{JM} \delta(x, \xi) \quad (4.4)$$

Ще използваме преобразуване на Радон, за да намерим решението на (4.4) в затворена форма. Дефиницията и свойствата на това интегрално преобразуване са дадени в Глава 3, т.3.2 и за пълнота на изложението ще представим фундаменталното решение в статичния случай разглеждан в тази глава. Прилагаме го към двете страни на (4.4) и получаваме:

$$C_{iJKl} \partial_s^2 \hat{U}_{KM}^* = -\delta_{JM} \delta(s - \langle \xi, m \rangle) \quad (4.5)$$

Решението на (4.5) е:

$$\hat{U}_{3J}^* = \frac{p^J}{2} |s - \tau|, \hat{U}_{4J}^* = \frac{g_1^J}{2} |s - \tau|, \hat{U}_{5J}^* = \frac{r_1^J}{2} |s - \tau|, J = 3, 4, 5 \quad (4.6)$$

където:

$$\begin{aligned} \tau &= \langle \xi, m \rangle, \tilde{a} = \tilde{c}_{44} + \frac{\tilde{e}_{15}^2}{\tilde{\epsilon}_{11}}, \tilde{c}_{44} = c_{44} + \frac{(q_{15})^2}{\mu_{11}}, \tilde{e}_{15} = e_{15} - \frac{d_{11} q_{15}}{\mu_{11}}, \tilde{\epsilon}_{11} = \epsilon_{11} + \frac{(d_{11})^2}{\mu_{11}} \\ p^3 &= -\frac{1}{\tilde{a}}, p^4 = -\frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{\epsilon}_{11} \tilde{a}}, p^5 = -\frac{1}{\mu_{11} \tilde{a}} (q_{15} - d_{11} \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{\epsilon}_{11}}) \\ g_1^3 &= \frac{\tilde{c}_{44}}{\tilde{e}_{15} \tilde{a}} - \frac{1}{\tilde{e}_{15}}, g_1^4 = \frac{\tilde{c}_{44}}{\tilde{\epsilon}_{11} \tilde{a}}, g_1^5 = \frac{\tilde{c}_{44}}{\tilde{e}_{15} \mu_{11} \tilde{a}} (q_{15} - d_{11} \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{\epsilon}_{11}}) - \frac{q_{15}}{\tilde{e}_{15} \mu_{11}}, r_1^3 = -\frac{q_{15}}{\mu_{11}} \frac{h^{-1/2}}{\tilde{a}} - \frac{d_{11}}{\mu_{11}} g_1^3, \\ r_1^4 &= -\left(\frac{q_{15}}{\mu_{11}} \frac{h^{-1/2} \tilde{e}_{15}}{\tilde{\epsilon}_{11} \tilde{a}} + \frac{d_{11}}{\mu_{11}} g_1^4 \right), r_1^5 = -\left(\frac{q_{15}}{\mu_{11}^2 \tilde{a}} (q_{15} - d_{11} \frac{\tilde{e}_{15}}{\tilde{\epsilon}_{11}}) + \frac{d_{11}}{\mu_{11}} g_1^5 \right) \end{aligned}$$

Ако положим $p_3^J = p^J, p_4^J = g_1^J, p_5^J = r_1^J$, (4.6) ще изглежда така:

$$\hat{U}_{KJ}^* = \frac{p_K^J}{2} |s - \tau|$$

За да приложим обратно преобразуване на Радон ще използваме Лема 2.3 от Глава 3.

Тъй като, ако сме намерили решение на (4.4) и му прибавим константа отново ще получим решение на (4.4), то можем да използваме Лема 2.3 и приемем, че $C = 0$.

Получаваме следната теорема:

Теорема 4.1.

Решението на (4.4) е $U_{JK}^* = \frac{p_K^J}{4\pi^2} \int_{|m|=1} \ln |\langle x - \xi, m \rangle| dm$.

4.3. Гранично интегрално уравнение и асимптотики.

От резултата в Глава 2, (2.25) се получава следното нехиперсингулярно ГИУ в усилия:

$$t_J^\infty = C_{iJKl} n_i \int_{\Gamma^+} (\sigma_{sJK}^*(x, \xi) \Delta u_{J,s}(\xi) n_i(\xi) - \sigma_{sJK}^*(x, \xi) \Delta u_{J,l}(\xi) n_s(\xi)) dS(\xi) \quad (4.7)$$

Уравнението (4.7) се решава числено. В дисертацията са изведени асимптотиките на фундаменталното решение при $x \rightarrow \xi$.

4.4. Числени резултати.

Създадена и валидирана е програма на ФОРТРАН за решаване на ГИУ в усилия (4.7) (виж следващата Глава 5 за $\omega \approx 0$). За проведените числени експерименти са използвани следните материали, чиито материални свойства са дадени в Таблица 4.1:

Таблица 4.1.

Материал Материални константи	Пиезоелектричен $BaTiO_3$	Пиезوماгнитен $CoFe_2O_4$	МЕЕ композит $BaTiO_3 / CoFe_2O_4$
c_{44}	$43 \times 10^9 \text{ N.m}^{-2}$	$45.3 \times 10^9 \text{ N.m}^{-2}$	$44 \times 10^9 \text{ N.m}^{-2}$
e_{15}	11.6 C.m^{-2}		5.8 C.m^{-2}
q_{15}		$550 \text{ N.A}^{-1}.\text{m}^{-1}$	$275 \text{ N.A}^{-1}.\text{m}^{-1}$
ε_{11}	$112 \times 10^{-10} \text{ C}^2.\text{N}^{-1}.\text{m}^{-2}$	$0.8 \times 10^{-10} \text{ C}^2.\text{N}^{-1}.\text{m}^{-2}$	$56.4 \times 10^{-10} \text{ C}^2.\text{N}^{-1}.\text{m}^{-2}$
d_{11}			$5 \times 10^{-12} \text{ N.s.V}^{-1}.\text{C}^{-1}$
μ_{11}			$-297 \times 10^{-6} \text{ N.s}^2.\text{C}^{-2}$
ρ	5800 kg / m^3	7500 kg / m^3	6490 kg / m^3

Приемаме, че материалните константи k^c на композита, направен от $BaTiO_3$ като включване с материални константи k^i и $CoFe_2O_4$ като матрица с материални константи k^m са дефинирани по следния начин: $k^c = 0.5(k^i + k^m)$ виж Song, Sih (2003) и магнитоелектричната константа $d_{11} = 5 \times 10^{-12} (\text{Ns} / \text{VC})$ е избрана в съответствие с микро – механичния модел, виж Li (2005).

Пукнатината е подложена на външно натоварване равно на 1Pa по посока на оста Ox_2 . Сечението на пукнатината и равнината $x_1 O x_2$ е хоризонтална отсечка по оста Ox_1 - интервала $(-c, c)$, $c = 5 \times 10^{-3} \text{ m}$. В дисертацията са дадени числени резултати за скока на преместването, електричния и магнитния потенциал в различни точки от пукнатината за различни материали. Симулациите показват чувствителност на отварящите пукнатината премествания от материала.

Глава 5. Поведение на хомогенен магнито-електро-еластичен материал при хармонично натоварване.

Основните резултати на тази глава са публикувани в Stoynov, Rangelov (2009) и докладвани на 11^{ти} Национален Конгрес по Теоретична и Приложна Механика, Боровец, 2.09-5.09.2009.

5.1. Постановка на задачата

Разглеждаме пукнатина в безкрайна хомогенна МЕЕ среда. Външното натоварване, на което е подложена пукнатината е хармонично по времето, антиплейн механично и инплейн електрично и магнитно. Тогава от конститутивните уравнения, уравнението на баланса и уравненията на Максвел при отсъствие на обемни сили, електрически заряди и плътности на тока, след разделяне на общия множител $e^{i\omega t}$, системата за u_3, φ, ψ , виж (1.16), ще изглежда така:

$$\begin{cases} c_{44}\Delta u_3 + e_{15}\Delta\varphi + q_{15}\Delta\psi + \rho\omega^2 w = 0 \\ e_{15}\Delta u_3 - \varepsilon_{11}\Delta\varphi - d_{11}\Delta\psi = 0 \\ q_{15}\Delta u_3 - d_{11}\Delta\varphi - \mu_{11}\Delta\psi = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Чрез въвеждане на обобщен тензор на еластичността, обобщен вектор на преместването и обобщен тензор на напрежението, както в Глава 1, система (5.1) ще изглежда по следния начин:

$$C_{ijkl}u_{k,ll} + \rho_{JK}\omega^2 u_K = 0 \quad (5.2)$$

Предполагаме, че пукнатината е непропусклива, което математически изразяваме така:

$$t_j \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (5.3)$$

Следвайки Akamatsu, Nakamura (2002) за пиезоелектричния случай може да бъде доказано, че граничната задача (5.2), (5.3) приема непрекъснато диференцируеми решения. Ще решим задачата (5.2), (5.3) с условието на Зомерфелд на безкрайност като я преобразуваме в еквивалентна интегро – диференциална система от уравнения върху пукнатината, чрез използване на J-интеграл и след това решим тази система числено. За да осъществим тази цел първо ще трябва да намерим фундаменталното решение на (5.2) и вълновото поле на падащата SH – вълна, разпространяваща се в МЕЕ среда.

5.2. Фундаментално решение

Фундаменталното решение на (5.2) се дефинира като решение на уравнението:

$$C_{iJKL}U_{KM,IL}^* + \rho_{JK}\omega^2U_{KM}^* = -\delta_{JM}\delta(x, \xi) \quad (5.4)$$

Ще използваме преобразуване на Радон, за да намерим решението на (5.4) в затворена форма. Дефиницията и свойствата на това интегрално преобразуване са дадени в Глава 3 и за пълнота на изложението ще представим фундаменталното решение в случая разглеждан в тази глава. Прилагаме го към двете страни на (5.4) и получаваме:

$$C_{iJKL}\hat{\partial}_s^2\hat{U}_{KM}^* + \rho_{JK}\omega^2\hat{U}_{KM}^* = -\delta_{JM}\delta(s - \langle \xi, m \rangle) \quad (5.5)$$

Като използваме подхода от Глава 3 за решението на (5.5) намираме:

$$\begin{aligned} \hat{U}_{33}^* &= -\frac{1}{2ik\tilde{a}}e^{ik|s-\tau|}, \quad \hat{U}_{34}^* = \hat{U}_{43}^* = -\frac{A}{2ik\tilde{a}}e^{ik|s-\tau|}, \\ \hat{U}_{44}^* &= -\frac{A^2}{2ik\tilde{a}}e^{ik|s-\tau|} + \frac{1}{2\tilde{\epsilon}_{11}}|s-\tau|, \quad \hat{U}_{35}^* = \hat{U}_{53}^* = -\frac{B}{2ik\tilde{a}}e^{ik|s-\tau|}, \\ \hat{U}_{45}^* &= \hat{U}_{54}^* = -\frac{AB}{2ik\tilde{a}}e^{ik|s-\tau|} - \frac{d_{11}}{2\tilde{\epsilon}_{11}\mu_{11}}|s-\tau|, \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\hat{U}_{55}^* = -\frac{B^2}{2ik\tilde{a}}e^{ik|s-\tau|} + \frac{1}{2}\left(\frac{d_{11}^2}{\tilde{\epsilon}_{11}\mu_{11}^2} + \frac{1}{\mu_{11}}\right)|s-\tau|,$$

където:

$$\begin{aligned} \tau = \langle \xi, m \rangle, \quad \tilde{a} &= \tilde{c}_{44} + \frac{\tilde{\epsilon}_{15}^2}{\tilde{\epsilon}_{11}}, \quad \tilde{c}_{44} = c_{44} + \frac{(q_{15})^2}{\mu_{11}}, \quad \tilde{e}_{15} = e_{15} - \frac{d_{11}q_{15}}{\mu_{11}}, \quad \tilde{\epsilon}_{11} = \epsilon_{11} - \frac{(d_{11})^2}{\mu_{11}} \\ A &= \frac{\mu_{11}e_{15} - q_{15}d_{11}}{\mu_{11}\epsilon_{11} - d_{11}^2}, \quad B = \frac{q_{15}\epsilon_{11} - d_{11}e_{15}}{\mu_{11}\epsilon_{11} - d_{11}^2}, \quad k = \sqrt{\frac{\rho}{\tilde{a}}}\omega \end{aligned}$$

Тъй като функциите \hat{U}_{KM}^* са линейни комбинации на $e^{ik|s-\tau|}$ и $|s-\tau|$, за първата част на обратното преобразуване на Радон ще използваме следните формули:

$$K(|s-\tau|) = 2 \ln \beta \Big|_{\beta=|s-\tau|} + C \quad (5.7)$$

$$K(e^{ik|s-\tau|}) = -ik \{ i\pi e^{ik\beta} - 2[ci(k\beta)\cos(k\beta) + si(k\beta)\sin(k\beta)] \} \Big|_{\beta=|s-\tau|} \quad (5.8)$$

доказани в Лема 2.3 и Лема 3.3 на Глава 5. След прилагане на обратното преобразуване на Радон, фундаменталното решение ще изглежда така:

$$U_{KM}^* = \frac{1}{4\pi^2} \int_{|m|=1} K(\hat{U}_{KM}^*) \Big|_{s=\langle x, m \rangle} dm \quad (5.9)$$

В дисертацията е показано, че можем да положим $C = 0$.

5.4. Падаща вълна

Търсим решение на (5.1) във вид на равнинна падаща вълна $V = \begin{pmatrix} V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{pmatrix}$, където

$V_J = p_J e^{ik \langle x, \xi \rangle}$, $x = (x_1, x_2)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $J = 3, 4, 5$, а p_J и k са неизвестни. k е големината на вълновия вектор. Нарича се още вълново число и е свързано с дължината на вълната по формулата $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. p_J е амплитудата на вълната. Векторът ξ определя посоката на разпространение на падащата вълна, $|\xi| = 1$. За полето на усилията на SH вълната получаваме:

$$T \Big|_{x_2 = 0} = \begin{pmatrix} i \sqrt{\frac{\rho(\varepsilon_{11}\mu_{11} - d_{11}^2)}{\det M}} \omega \xi_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ikx_1 \xi_1}, \quad M = \begin{pmatrix} c_{44} & e_{15} & q_{15} \\ e_{15} & -\varepsilon_{11} & -d_{11} \\ q_{15} & -d_{11} & -\mu_{11} \end{pmatrix}.$$

Виждаме, че амплитудата на тази вълна зависи както от константите на материала, така и от честотата.

5.5. Нехиперсингулярно гранично интегрално уравнение в усилия.

Следвайки Wang, Zahng (2005) за пиезоелектрични материали, преобразуваме граничната задача (5.2), (5.3) и условието на Зомерфелд в еквивалентна система от интегро – диференциални уравнения върху пукнатината Γ . ГИУ е изведено в Глава 2 (2.11) и има следния вид:

$$t_J^{in}(x, \omega) = C_{ijkl} n_i(x) \int_{\Gamma} [(\sigma_{\eta PK}^*(x, y, \omega) \Delta u_{P, \eta}(y, \omega) - \rho_{QP} \omega^2 u_{QK}^*(x, y, \omega) \Delta u_P(y, \omega)) \delta_{\lambda l} - \sigma_{\lambda PK}^*(x, y, \omega) \Delta u_{P, l}(y, \omega)] n_\lambda(y) d\Gamma \quad (5.33)$$

където u_{QK}^* , σ_{iPK}^* са фундаменталното решение и съответното напрежение от параграф 5.2, а t_J^{in} е вълновото поле на падащата вълна от параграф 5.4. Неизвестен остава векторът на обобщеното отварящо пукнатината преместване дефинирано като

$\Delta u_J = u_J \Big|_{\Gamma^+} - u_J \Big|_{\Gamma^-}$. След като решим система (5.33), относно отварящото пукнатината

преместване разсеяното, а оттам и пълното поле във всяка точка $x \in R^2 \setminus \Gamma$ може да се намери от представянията:

$$t_J^{sc}(x, \omega) = -C_{iJKI} n_i(x) \int_{\Gamma} [(\sigma_{\eta PK}^*(x, y, \omega) \Delta u_{P, \eta}(y, \omega) - \rho_{QP} \omega^2 u_{QK}^*(x, y, \omega) \Delta u_P(y, \omega)) \delta_{\lambda I} - \sigma_{\lambda PK}^*(x, y, \omega) \Delta u_{P, I}(y, \omega)] n_{\lambda}(y) d\Gamma, \quad x \in R^2 \setminus \Gamma \quad (5.34)$$

По този начин можем да определим напрегнатото състояние на материала в произволна негова точка.

5.6. Процедура за числено решение.

Схемата за числено решение на системата от интегро-диференциални уравнения (5.33) следва схемата развита в Rangelov et al (2008) за пиезоелектричния случай. Използват се квадратични гранични елементи върху пукнатината, а за да се моделира правилно $O(\sqrt{r})$ поведението на преместването u_J близо до върха на пукнатината се използват специални гранични елементи с точка на разстояние четвърт дължина от края на пукнатината. Прилагайки метода на отместените точки развита в Rangelov et al.(2003), сингулярните интегрални са сходящи, ако ги разгледаме като главна стойност в смисъл на Коши. След дискретизация се получава алгебрична система от линейни уравнения, която се решава числено. Създаден е програмен код на Фортран и числените резултати са получени като е използван PC – Core 2 Duo CPU E8500, на 3.16GHz и 2.53GHz, 3GB RAM.

Динамичните обобщени коефициенти на интензивност: на напрежението K_{III} , на електричната индукция K_D и на магнитната индукция K_B се намират директно от стойностите на усилията близо до върха на пукнатината Suo et al. (1992) за пиезоелектричния случай. Като използваме конститутивните уравнения, получаваме че са в сила следните представяния за интензитета на електричното поле E_2 и напрежението на магнитното поле H_2 :

$$E_2 = \frac{M_2}{\det M}, \quad H_2 = \frac{M_3}{\det M}, \quad (5.35)$$

където

$$M_2 = \det \begin{pmatrix} c_{44} & t_3 & -q_{15} \\ e_{15} & t_4 & d_{11} \\ q_{15} & t_5 & \mu_{11} \end{pmatrix}, \quad M_3 = \det \begin{pmatrix} c_{44} & -e_{15} & t_3 \\ e_{15} & \epsilon_{11} & t_4 \\ q_{15} & d_{11} & t_5 \end{pmatrix}$$

За хоризонтална пукнатина по оста Ox_1 , $\Gamma = (-c, c)$ коефициента на интензивност на напрежението K_{III} , на интензитета на електричното поле K_E и на напрежението на магнитното поле K_H са:

$$\begin{aligned} K_{III} &= \lim_{x_1 \rightarrow \pm c} t_3 \sqrt{2\pi(x_1 \mp c)}, \quad K_E = \lim_{x_1 \rightarrow \pm c} E_2 \sqrt{2\pi(x_1 \mp c)} \\ K_H &= \lim_{x_1 \rightarrow \pm c} H_2 \sqrt{2\pi(x_1 \mp c)} \end{aligned} \quad (5.36)$$

където t_3 , E_2 и H_2 се пресмятат в точка $(x_1, 0)$ близна до върха на пукнатината.

5.7. Числена реализация

В числените примери се разглежда пукнатина Γ с полудължина $c = 5mm$, заемаща интервала $(-c, c)$ по оста Ox_1 . Пукнатината е разделена на 7 гранични елемента с дължини съответно $l_1 = l_7 = 0.15c$, $l_2 = \dots = l_6 = 0.34c$. Материалните характеристики на използваните в числените експерименти материали са дадени в Таблица 4.1.

5.7.1 Валидиране на резултатите

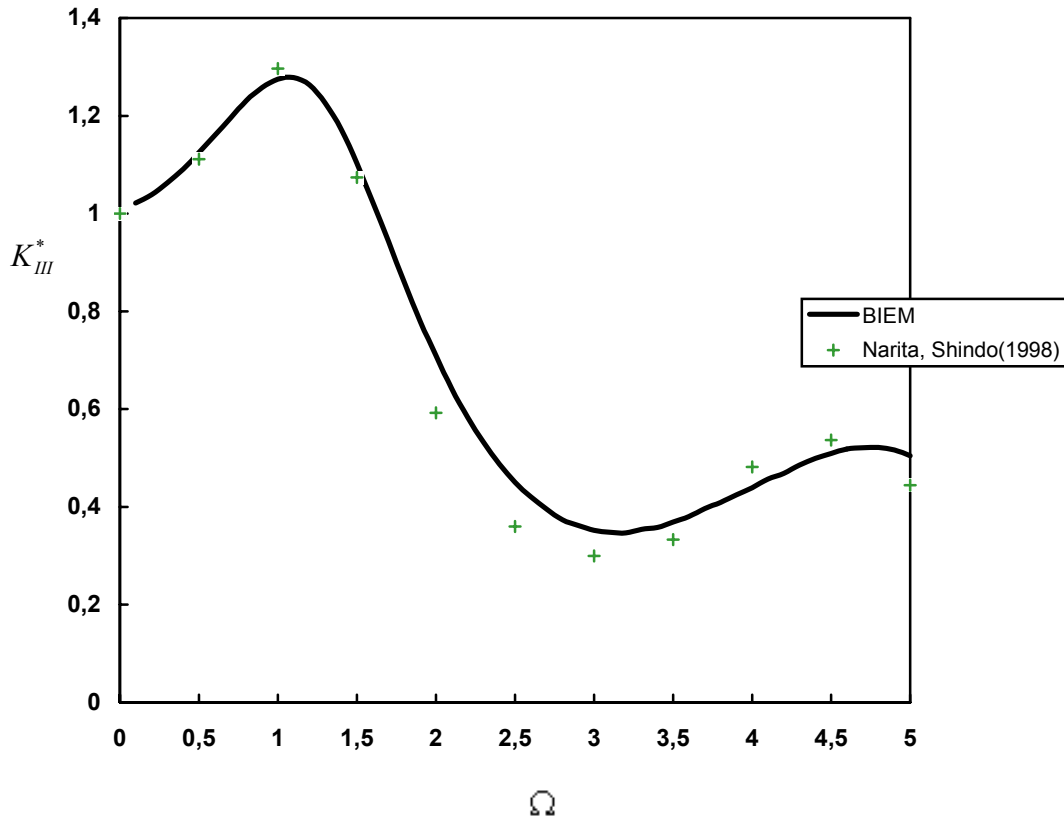
Решен е числен тестови пример за пресмятане на обобщения коефициент на интензивност на напрежението за крайна пукнатина, разположена в безкрайна равнина подложена на перпендикулярна падаща SH – вълна, за да се валидира предложениия метод на граничните интегрални уравнения. Направеното сравнение с резултатите на Narita, Shindo (1998), които са използвали метода на сингулярните интегрални уравнения за пиезоелектричния материал $BaTiO_3$ е показано на Фиг.5.1.

Нормализирания коефициент на интензивност на напрежението $K_{III}^* = \frac{K_{III}}{t_3^{in} \sqrt{\pi c}}$ е

построен в зависимост от нормализираната честота $\Omega = ck_0 \in [0.1, 5.0]$, където

$k_0 = \sqrt{\rho c_{44}^{-1}} \omega$. Сравнението показва много малка разлика между кривите в интервала

$\Omega \in [0.1, 1.5]$ и разлика между резултатите по – малка от 10% около минималните стойности за $\Omega \in [2.0, 3.5]$.



Фиг. 5.1. Нормализираният коефициент на интензивност на напрежението K_{III}^* в зависимост от нормализираната честота Ω за пиезоелектрична равнина с пукнатина.

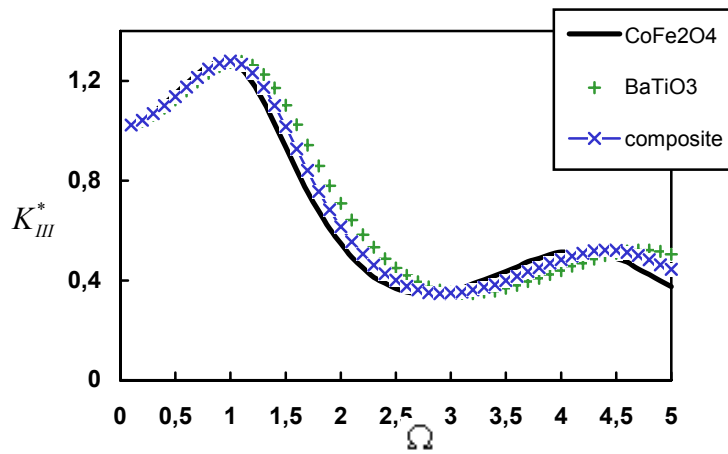
5.7.2 Параметрични изследвания

Целта на параметричните изследвания е да се покаже чувствителността на обобщения коефициент на интензивност на напрежението от вида на материала, от ъгъла на падащата равнинна вълна, от вида на динамичния товар и неговите характеристики и от свойствата на МЕЕ среда. Във всички фигури са дадени графиките на нормализирания коефициент на интензивност на напрежението K_{III}^* , на

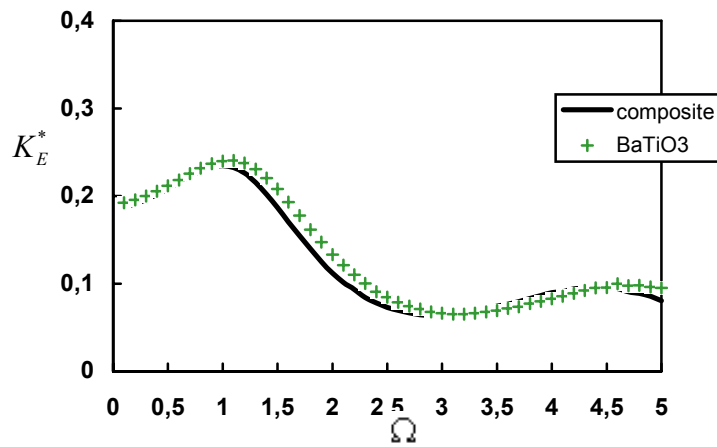
интензитета на електричното поле $K_E^* = 10 \frac{K_E}{\tau_0 \sqrt{\pi c}}$, на напрежението на магнитното

поле $K_H^* = 10^4 \frac{K_H}{\tau_0 \sqrt{\pi c}}$, където $\tau_0 = t_3^{in}$ в зависимост от нормализираната честота. Тук

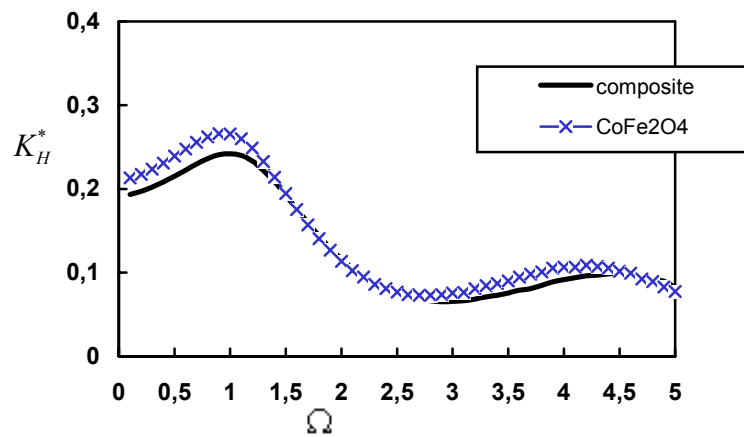
представяме числени резултати за пиезоелектричен и пиезомагнитен материал и МЕЕ композит. Виждаме, че КИН имат максимум за нормализирана около 1.0. Тези резултати показват чувствителност на КИН от вида на материала.



(a)



(b)



(c)

Фиг. 5.2. Нормализираният коефициент на интензивност на обобщеното напрежение в зависимост от нормализираната честота за различни материали при ъгъл на падащата вълна $\frac{\pi}{2}$: (a) K_{III}^* , (b) K_E^* , (c) K_H^*

Глава 6. Поведение на експоненциално нехомогенен МЕЕ материал при хармонично натоварване

Основните резултати на тази глава са публикувани в Rangelov, Stoynov (2010) и докладвани на Конференцията Математика в Индустрията, Юли 2010, София и на Конференцията BGSIAM'10, Декември 2010, София.

6.1. Постановка на задачата

Разглеждаме пукнатина в безкрайна МЕЕ среда. Външното натоварване, на което е подложена пукнатината е хармонично по времето, антиплейн механично и инплейн електрично и магнитно. За разлика от Глава 5 средата е нехомогенна, което означава, че материалните параметри като плътност, модул на еластичност и т.н. са различни за различни точки на тялото. Ще предположим, както в Глава 1, че всички материални параметри зависят по един и същи начин от радиус-вектор x чрез функция на нехомогенност $h(x)$, $h \in C^1(K)$, $h > 0$, K е изпъкнала, ограничена област в R^2 и $\partial K \in C^1$, (виж (1.17)). Като въведем обобщен тензор на еластичността, обобщен вектор на преместването и обобщен тензор на напрежението (виж Глава 1), системата за движение в честотната област ще изглежда по следния начин:

$$(C_{ijkl}(x)u_{k,l})_{,l} + \rho_{JK}\omega^2 u_K = 0 \quad (6.3)$$

Граничните условия върху пукнатината Γ са следните:

$$t_J = 0 \quad (6.4)$$

т.е. отново разглеждаме електрически и магнитно непропусклива пукнатина, свободна от усилия. Ще решим задачата (6.3), (6.4) с условието на Зомерфелд на безкрайност, като я преобразуваме в еквивалентна интегро – диференциална система от уравнения върху пукнатината, чрез използване на J-интеграл и след това решим тази система числено. За да осъществим тази цел първо ще трябва да намерим фундаменталното решение на (6.3) и падащата SH – вълна, разпространяваща се в МЕЕ среда.

6.2. Фундаментално решение

Фундаменталното решение u_{KM}^* на (6.3) е дефинирано в Глава 3, (3.1). Ще разгледаме случая, когато $h(x) = e^{2(a_1x_1 + a_2x_2)}$, т.е експоненциално нехомогенен МЕЕ материал и решението след прилагане на трансформация на Радон ще изглежда така:

$$\begin{aligned}
\hat{U}_{33}^* &= -\frac{h^{-1/2}(\xi)}{2ik\tilde{a}} e^{ik|s-\tau|}, \quad \hat{U}_{34}^* = \hat{U}_{43}^* = -\frac{h^{-1/2}(\xi)A}{2ik\tilde{a}} e^{ik|s-\tau|}, \\
\hat{U}_{44}^* &= -h^{-1/2}(\xi) \left(\frac{A^2}{2ik\tilde{a}} e^{ik|s-\tau|} - \frac{1}{2\nu\tilde{\varepsilon}_{11}} e^{\nu|s-\tau|} \right), \quad \hat{U}_{35}^* = \hat{U}_{53}^* = -\frac{h^{-1/2}(\xi)B}{2ik\tilde{a}} e^{ik|s-\tau|}, \\
\hat{U}_{45}^* &= \hat{U}_{54}^* = -h^{-1/2}(\xi) \left[\frac{AB}{2ik\tilde{a}} e^{ik|s-\tau|} + \frac{d_{11}}{2\nu\mu_{11}\tilde{\varepsilon}_{11}} e^{\nu|s-\tau|} \right], \\
\hat{U}_{55}^* &= -h^{-1/2}(\xi) \left[\frac{B^2}{2ik\tilde{a}} e^{ik|s-\tau|} - \left(\frac{d_{11}^2}{\mu_{11}^2\tilde{\varepsilon}_{11}} + \frac{1}{\mu_{11}} \right) \frac{1}{2\nu} e^{\nu|s-\tau|} \right]
\end{aligned} \tag{6.8}$$

където:

$$\begin{aligned}
\tau &= \langle \xi, m \rangle, \quad \tilde{a} = \tilde{c}_{44} + \frac{\tilde{\varepsilon}_{15}^2}{\tilde{\varepsilon}_{11}}, \quad \tilde{c}_{44} = c_{44} + \frac{(q_{15})^2}{\mu_{11}}, \quad \tilde{\varepsilon}_{15} = e_{15} - \frac{d_{11}q_{15}}{\mu_{11}}, \quad \tilde{\varepsilon}_{11} = \varepsilon_{11} - \frac{(d_{11})^2}{\mu_{11}} \\
A &= \frac{\mu_{11}e_{15} - q_{15}d_{11}}{\mu_{11}\varepsilon_{11} - d_{11}^2}, \quad B = \frac{q_{15}\varepsilon_{11} - d_{11}e_{15}}{\mu_{11}\varepsilon_{11} - d_{11}^2}, \quad k = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\tilde{a}} - |a|^2}, \quad \nu = |a|.
\end{aligned}$$

Тъй като функциите \hat{U}_{KM}^* са линейни комбинации на $e^{ik|s-\tau|}$ и $e^{\nu|s-\tau|}$, за първата част на обратното преобразуване на Радон ще използваме Лема 3.3 и Лема 4.3 на Глава 3. Фундаменталното решение намираме, като приложим втората част на обратното преобразуване на Радон (виж (5.9)) и трансформацията (3.2).

6.3. Падаща вълна

Падащата вълна удовлетворява (6.1) и за да я намерим ще направим трансформацията $v_K = h^{-1/2}(x)V_K$ и на получената система спрямо V_K ще търсим решение във вида

$$V = \begin{pmatrix} V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{pmatrix}, \quad \text{където } V_J = p_J e^{ik\langle x, \xi \rangle}, \quad x = (x_1, x_2), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2), \quad J = 3, 4, 5, \quad \text{а } p_J \text{ и } k \text{ са}$$

неизвестни, както в Глава 5. Решението, което получаваме е следното:

$$T = \begin{pmatrix} T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\det M}{\varepsilon_{11}\mu_{11} - d_{11}^2} e^{a_1x_1 + a_2x_2} (-a_2 + ik\xi_2) e^{ik\langle x, \xi \rangle} \tag{6.33}$$

За разлика от резултата в (5.4), вектора на поляризация в този случай зависи от координатите на точката в равнината и от параметрите на функцията на нехомогенност.

6.4. Нехиперсингулярно гранично интегрално уравнение в усилия.

Тъй като задачата, която решаваме има същия вид, както и в хомогенния случай с тази разлика, че обобщения тензор на еластичност зависи от x , следвайки Wang, Zhang (2005) стигаме до същия вид на граничното интегрално уравнение, както в Глави 2 и 5:

$$t_j^{sc}(x, \omega) = -C_{ijkl}(x)n_i(x) \int_{\Gamma} [(\sigma_{\eta PK}^*(x, y, \omega) \Delta u_{P, \eta}(y, \omega) - \rho_{QP} \omega^2 u_{QK}^*(x, y, \omega) \Delta u_P(y, \omega)) \delta_{\lambda l} - \sigma_{\lambda PK}^*(x, y, \omega) \Delta u_{P, l}(y, \omega)] n_{\lambda}(y) d\Gamma \quad (6.34)$$

като u_{QK}^* и σ_{iPK}^* са намерени в 6.2, а $t_j^{sc} = -t_j^{in}$ и е намерено в 6.3. Останалите означения са същите както в Глава 5. След като решим система (6.4), разсеяното поле, а оттам и пълното поле във всяка точка $x \in R^2 \setminus \Gamma$ може да се намери от представяния, които имат аналогичен вид както съответните в Глава 5.

6.5. Числена реализация и резултати

Подобно на хомогенния случай схемата за числено решение на (6.34) следва схемата развита в Rangelov et. al. (2008) за пиезоелектричния случай. Създаден е програмен код на Фортран и числените резултати са получени като е използван РС – Core 2 Duo CPU E8500, на 3.16GHz и 2.53GHz, 3GB RAM. Пукнатината, която разглеждаме е хоризонтална по оста Ox_1 , заемаща интервала $(-c, c)$, където $c = 5mm$.

6.5.1 Валидиране на резултатите

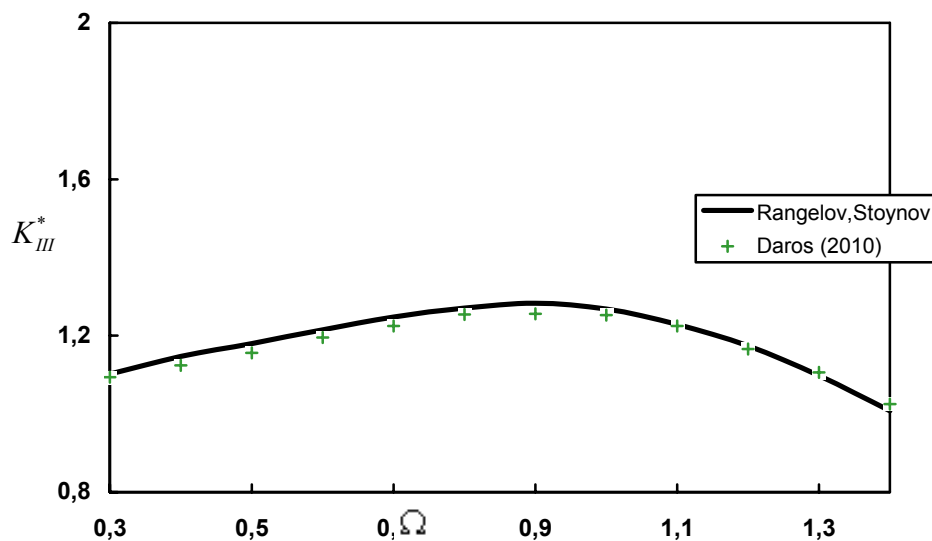
Решен е пример за пресмятане на коефициента на интензивност на напрежението за крайна пукнатина, разположена в безкрайна равнина подложена на перпендикулярно падаща SH – вълна, за да се валидира предложеният метод на ГИУ. Направено е сравнение (Фиг.6.1) с резултатите на Daros (2010), който е използвал метода на граничните елементи за анизотропен материал с еластичните свойства на пиезочермика PZT6B: $c_{44} = 27.1GPa$ $\rho = 7.55 \times 10^3 (kg/m^3)$. Параметрите a_1 и a_2 във функцията на нехомогенност $h(x) = e^{2(a_1 x_1 + a_2 x_2)}$ сме представили във вида $a_1 = \beta \frac{\cos \alpha}{2c}$ и $a_2 = \beta \frac{\sin \alpha}{2c}$. За теста с резултатите на Daros (2010) сме положили $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\beta = 0.4$.

Нормализираният коефициент на интензивност на напрежението $K_{III}^* = \frac{K_{III}}{t_3^{in} \sqrt{\pi c}}$ е

построен в зависимост от нормализираната честота $\Omega = ck_e$, където $k_e = \sqrt{\frac{\rho \omega^2}{c_{44}} - |a|^2}$.

Сравнението показва много малка разлика между кривите в интервала $\Omega \in [0.3, 1.4]$.

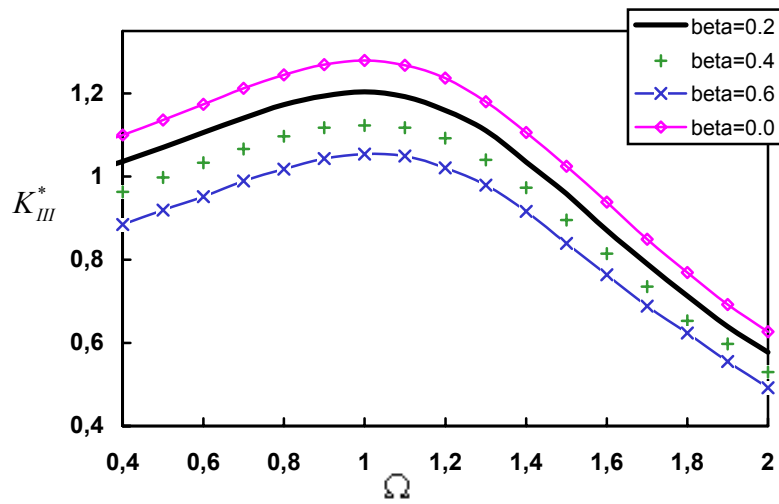
Тази разлика зависи от начина на смятане, закръглянията на Фортран и броя на граничните елементи.



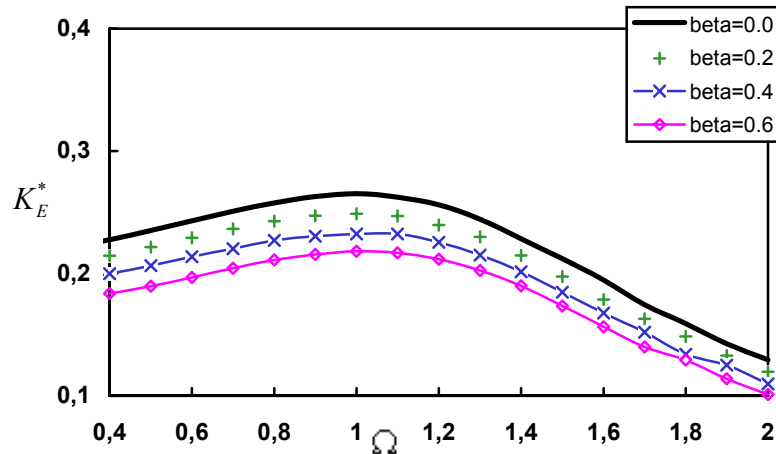
Фиг.6.1. Нормализираният коефициент на интензивност на напрежението K_{III}^* в зависимост от нормализираната честота Ω за анизотропен материал с еластичните свойства на пиезокерамика PZT6В.

6.5.2 Параметрични изследвания.

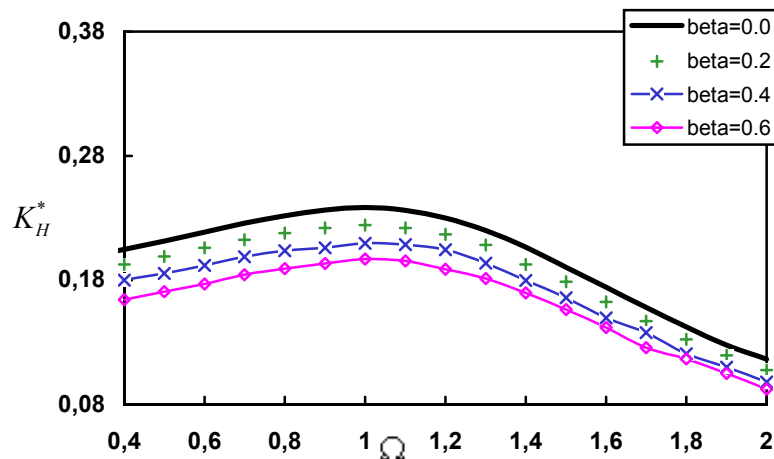
Представяме резултати за зависимостта на коефициентите на интензивност на обобщено напрежение от честота, когато посоката на нехомогенността е успоредна на пукнатината за различни стойности на β (Фиг. 6.2). В дисертацията са дадени резултати за зависимостта на КИН от честотата при различна посока и магнитуд на нехомогенност, при комбинирано натоварване, както и за зависимостта на КИН от ъгъла на падащата вълна и посоката на нехомогенност при фиксирана честота. Графиките, които представяме, показват намаляване на стойностите на КИН при увеличаване на магнитуда на нехомогенност.



a)



b)



c)

Фиг. 6.2 Нормираният коефициент на интензивност на напрежение в зависимост от нормализираната честота $\Omega = \omega c \sqrt{\frac{\rho}{c_{44}}}$, ако $\alpha = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$ за десния край на пукнатината при различни стойности на β а) K_{III}^* , б) K_E^* в) K_H^* .

Глава 7. Поведение на експоненциално нехомогенен магнито-електро-еластичен материал при критически честоти.

Основните резултати на тази глава са публикувани Stoynov (2010) и докладвани на Конференцията АМЕЕ, Юни 2010, Созопол.

7.1. Постановка на задачата и фундаментално решение.

Разглеждаме линейна МЕЕ среда с пукнатина, подложена на външно антиплейн механично и инплейн електрично и магнитно хармонично по времето натоварване. Граничната задача за намиране на полето на обобщеното преместване е дадена в Глава 6 (виж (6.3), (6.4)). Дефиницията на фундаменталното решение може да се види в Глава 3. Като използваме функционалната трансформация $u_{KM}^* = h^{-1/2} U_{KM}^*$, където $h(x) = e^{2(a_1 x_1 + a_2 x_2)}$ и преобразуване на Радон стигаме до равенството:

$$(C_{ijkl} \partial_s^2 + [\rho_{JK} \omega^2 - C_{ijkl} |a|^2]) \hat{U}_{KM}^* = -h^{-1/2}(\xi) \delta_{JM} \delta(s - \langle \xi, m \rangle) \quad (7.2)$$

където $|m|=1$. Решението на тази система за класове от функции $h(x)$ е изложено в Глава 3. Както се вижда там, то зависи от знака на израза:

$$\bar{\gamma} = \frac{\tilde{\gamma}_{33} + \tilde{\gamma}_{34} \frac{\tilde{\epsilon}_{15}}{\tilde{\epsilon}_{11}}}{\tilde{a}} \quad (7.3)$$

Като използваме дефинициите за $\tilde{\gamma}_{33}$, $\tilde{\gamma}_{34}$ и \tilde{a} дадени в Глава 3 и заместим в (7.2), получаваме равенството:

$$\bar{\gamma} = \frac{\rho \omega^2}{\tilde{a}} - \eta \quad (7.4)$$

За нехомогенна среда $\eta = |a|^2 > 0$ и от (7.4) се вижда, че има стойности на ω , за които

$\bar{\gamma} = 0$. Това са стойностите $\omega_{cr} = \sqrt{\frac{\eta \tilde{a}}{\rho}}$. Тези честоти наричаме критически, понеже

решението има различен вид за $\omega > \omega_{cr}$ и $\omega < \omega_{cr}$. Случая $\omega > \omega_{cr}$ беше разгледан в Глава 6. В тази Глава ще изследваме честоти равни на критическата. Предстои да бъдат получени резултати за $\omega < \omega_{cr}$. Тъй като за критическите честоти е в сила $\bar{\gamma} = 0$ и $\eta > 0$, решението в този случай е дадено в Глава 3, параграф 3.2.2 и 3.2.2.1. Виждаме, че образите на фундаменталните решения са линейни комбинации от $e^{|s-\tau|}$ и $|s-\tau|$ и за обратната трансформация ще използваме Лема 2.3 и Лема 4.3.

7.2. Падаща вълна и гранично интегрално уравнение

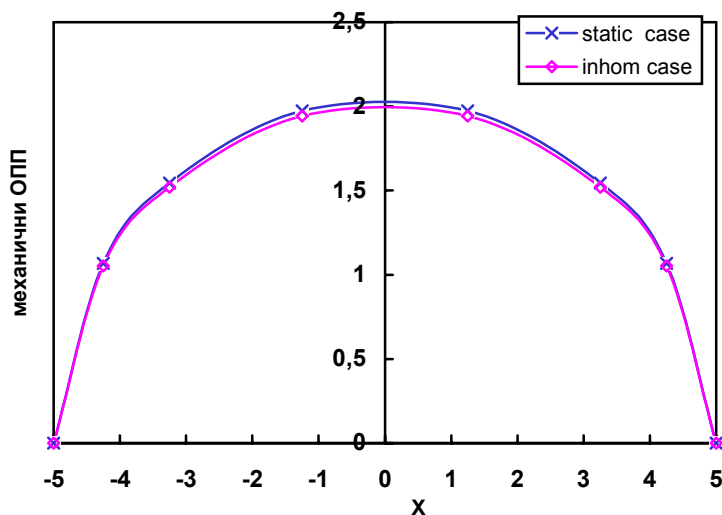
Намирането на падащата вълна става по същия начин както в Глава 6. Тъй като за критически честоти $k=0$, можем да използваме резултата от 6.3 и намираме за обобщените усилията върху пукнатината следните изрази:

$$T = \begin{pmatrix} T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{pmatrix} = -a_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\det M}{\varepsilon_{11}\mu_{11} - d_{11}^2} e^{a_1x_1 + a_2x_2}$$

Тъй като вълновото число е нула, частиците на средата вибрират без да има отместване по фаза. Граничното интегрално уравнение има същия вид както в Глава 6 (виж 6.34).

7.3. Числена реализация и резултати

Създадена е програма на ФОРТРАН за числено решаване на ГИУ от 7.2, като се използва схемата развита от Rangelov et. al. (2008) за пиезоелектричния случай. Числените резултати са получени на PC – Core 2 Duo CPU E8500, на 3.16GHz и 2.53GHz, 3GB RAM. Полудължината на пукнатината е $c = 5mm$ и е разположена по абсисната ос, симетрично относно координатното начало. Изследваният материал е композит с материални константи дадени в Таблица 4.1, Глава 4. Решението е валидирано с резултатите за отварящите пукнатината премествания (ОПП) за статичния хомогенен случай публикувани в Stoynov (2009). Тестът е даден на Фиг. 7.1.



Фиг. 7.1 Отварящите пукнатината премествания за различни точки от пукнатината.

Стойностите на x по абцисната ос се умножават по 10^{-3} , за да съответстват на точките то пукнатината. Стойностите на отварящите премествания са умножени по 10^{13} .

Виждаме, че отклонението е в рамките на 2%. В дисертацията са представени резултати за ОПШ при различни стойности на посоката и магнитуда на нехомогенност.

Заключение

Основните приноси в дисертацията са:

1) Чрез преобразуване на Радон са намерени в явен вид фундаменталните решения на свързана система частни диференциални уравнения, представляваща уравненията на движение за трансверзално изотропна нехомогенна МЕЕ среда, подложена на антиплейн механично и инплейн електрично и магнитно, хармонично по времето натоварване. Разгледани са различни случаи в зависимост от вида на материала и големината и посоката на материалния градиент.

2) Изведено е нехиперсингулярно гранично интегрално уравнение в усилия, за решаване на граничната задача за система ЧДУ. Разработен е софтуер на Фортран за числено решение на ГИУ.

3) Разгледано е поведението на непропусклива хоризонтална пукнатина в безкрайна хомогенна МЕЕ среда при статично натоварване. Чрез метода на ГИУ са получени числени резултати за скока на преместването, когато материалът е пиезоелектричен, пиезомагнитен и композит.

4) Изследвано е поведението на хомогенен МЕЕ материал с непропусклива хоризонтална пукнатина, подложен на хармонично по времето антиплейн механично и инплейн електрично и магнитно натоварване. С метода на ГИУ са получени числени резултати за КИН. Построени са графично зависимостите на концентрацията на напрежение, електрично и магнитно поле от нормализираната честота на падаща SH вълна за пиезоелектричен и пиезомагнитен материал и композит състоящ се от пиезоелектрична и пиезомагнитна фаза. Решението е валидирано с аналогични резултати за пиезоелектричен материал получени по друг метод. Получени са графични зависимости за коефициента на интензивност на напрежението от честотата при различни ъгли на разпространение на падащата SH вълна за трите материала. Разгледан е случаят, когато материала е подложен на комбинирано външно натоварване: електромеханично, магнитомеханично и електромагнитомеханично.

5) Изследвано е поведението на функционално подреден МЕЕ материал с експоненциална нехомогенност, в който има пукнатина, подложен на антиплейн механично и инплейн електрично и магнитно натоварване. С метода на ГИУ са получени числени резултати за коефициентите на интензивност на обобщено напрежение и са построени графики за зависимостта на КИН от честотата на външното натоварване за различни материали. Решението е валидирано с аналогични резултати за анизотропен еластичен, и хомогенен МЕЕ материал. Изследвана е зависимостта на КИН от честотата за различни параметри на функцията на нехомогенност, ъгъла на падащата вълна, левия или десния край на пукнатината, като и за различна големина на комбинирано натоварване.

Намерени са фундаменталните решения, в случая когато честотата на падащата вълна е равна на критическата и са получени числени резултати за скока на механичното преместване за различни стойности на големината и посоката на материалния градиент.

Изказвам своята благодарност на научния си ръководител проф. д-мн Цвятко Рангелов и научния си консултант доц. д-р Петя Динева за многобройните им напътствия, полезни съвети и подкрепа, оказана по време на работата ми върху представения дисертационен труд.

Списък на публикациите

1. Stoynov Y., T. Rangelov (2008), Time-harmonic behaviour of anti-plane cracks in inhomogeneous magneto-electroelastic solid, *Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci.*, 62, 175- 186.
2. Stoynov Y., T. Rangelov (2009), Time- harmonic Crack Problems in Magneto-electroelstic Plane by BIEM, *J. Theoret. Appl. Mech.*, 39, 73-92.
3. Stoynov Y. (2009), 2D Static fundamental solution and boundary integral equation for cracks in magneto-electro-elastic bodies, *AIP Conf. Proc.*, 1184, 159-166.
4. Rangelov T., Y. Stoynov (2010), Dynamic behavior of cracked functionally graded magneto-electroelastic solids, *Compt. Rend. Acad. Sci.*, 63, 1715-1724.

5. Stoyanov Y. (2010), Investigation of critical frequencies for inhomogeneous cracked magneto-electro-elastic media, AIP Conf. Proc., 1293, 71-78.

Литература

1. Akamatsu M., G. Nakamura (2002), Well-Posedness of Initial-Boundary Value Problems for piezoelectric Equations, Appl. Anal., 81, 129-141.
2. Aliabadi M. H., D. P. Rooke (1991), Numerical Fracture Mechanics, Computational Mechanics Publications.
3. Bateman H., A. Erdelyi (1953), Higher transcendental functions, McGraw-Hill, New York.
4. Benveniste Y. (1995), Magneto-Electric Effect in Fibrous Composites with Piezoelectric and Piezomagnetic Phases, Physical Review B, 51, 16424–16 427.
5. Chue C.H., W.H. Hsu (2008), Antiplane internal crack normal to the edge of a functionally graded piezoelectric/piezomagnetic half plane, Meccanica, 43, 307-325.
6. Daros C.H. (2010), On modelling SH-waves in a class of inhomogeneous anisotropic media via the Boundary Element Method, ZAMM, 90, 113 – 121.
7. Erenstein W., N. D. Mathur, J. F. Scott (2006), Multiferritic and magne-toelectric materials, Nature, 442, 759-765.
8. Hou P.-F., H.-J. Ding, J.-Y. Chenc (2005), Green's functions for transversely isotropic magneto-electroelastic media, International Journal of Engineering Science, 43, 826–858.
9. Irwing, G. R. (1957), Analysis of stress and strain near the end of a crack traversing a plate, Journal of Applied Mechanics ASME, 24, 361-364.
10. Li X.-F. (2005), Dynamic analysis of a cracked magneto-electroelastic medium under antiplane mechanical and inplane electric and magnetic impacts, Int. J. Solids Str., 42, 3185 – 3205.
11. Liu H. K., J. H. Huang (2005), Piezoelectric and magnetic properties of PZT-(Ni_{0.284}Zn_{0.549}Cu_{0.183})Fe_{1.984}O₄ composites, J. Mater. Sci., 40, 1979-1985.
12. Ludwig D. (1966), The Radon Transform on Euclidean space, Common Pure Appl. Math., 19, 49-81.
13. Manolis G., R. Shaw (1996), Green's function for a vector wave equation in a mildly heterogeneous continuum, Wave Motion, 24, 59-83.
14. Narita F., Y. Shindo (1998), Dynamic Anti-Plane Shear of a Cracked Piezoelectric Ceramic, Theoretical and Appl. Fract. Mech., 29, 169–180.

15. Nan, C. W., M. I., Bichurin, S. Dong, D. Viehland (2008), Multiferroic magnetoelectric composites: Historical perspective, status, and future directions, *J. Appl. Physics*, 103, 031101-1-35.
16. Parton V. Z., B. A. Kudryavtsev (1988), *Electromagnetoelasticity, Piezo-electrics and Electrically Conductive Solids*, New York, Gordon and Breach Sci. Publish.
17. Rangelov T., P. Dineva, D. Gross (2003), A Hyper-Singular Traction Boundary Integral Equation Method for Stress Intensity Factor Computation in a Finite Cracked Body, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 27, 9–21.
18. Rangelov T., P. Dineva, D. Gross (2008), Effects of material inhomogeneity on the dynamic behavior of cracked piezoelectric solids: a BIEM approach, *ZAMM-Z. Angew. Math. Mech.*, 88, 86-99.
19. Rice J. R. (1968), A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks, *J. Appl. Mech. ASME*, 35, 379-386.
22. Sirotnin Y. I., M. P. Shaskolskaya (1982), *Fundamentals of Crystal Physics*, Moskow, Mir Publ.
23. Sladek J., V. Sladek, P. Solec, E. Pan (2008), Fracture analysis of cracks in magneto-electro-elastic solids by the MLPG, *Comput Mech*, 42, 697–714.
24. Soh A. K., J. X. Liu (2005), On the constitutive equations of magnetoelectroelastic solids. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.*, 16, 597-602.
25. Song Z. F., G. C. Sih (2003), Crack Initiation Behaviour in Magneto-Electro-Elastic Composite Under In-Plane Deformation, *Theor. Appl. Fract. Mech.*, 39, 189–207.
26. Suchtelen V. J. (1972), Product properties: a new application of composite materials, *Philips Res. Rep.*, 27, 28-37.
27. Suo Z., C. Kuo, D. Barnett, J. Willis (1992), Fracture Mechanics for Piezoelectric Ceramics, *J. Mech. Phys. Solids*, 40, 739–765.
28. Vladimirov V. (1984), *Equations of mathematical physics*, Moskow, Nauka.
29. Wang C.-Y., Ch. Zhang (2005), 3-D and 2-D Dynamic Green's Functions and Time-Domain BIEs for Piezoelectric Solids, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 29, 454–465.
30. Wu T. L., J. H. Huang (2000), Closed – form solutions for the magneto – electric coupling coefficients fibrous composites with piezoelectric and piezo – magnetic phases, *Journal of solids and structures*, 37, 2981 – 3009.
31. Zayed A. (1996), *Handbook of Generalized Function Transformations*, CRC Press, Boca Raton, Florida.

32. Zhou Z.-G., B. Wang (2005), Scattering of Harmonic Anti-Plane Shear Waves by an Interface Crack in Magneto-Electro-Elastic Composites, Appl. Math. Mech., 26, 17–26.
33. Върбанов Хр., (1965), Теория на еластичността, Техника.