Р Е Ц Е Н З И Я

на проф. дмн Петър Русев на дисертационния труд **Функции на Бесел и Митаг - Лефлер и обобщения** на доц. д-р Йорданка Добрева Панева - Коновска, представен за получаване на научната степен "доктор на науките" област 4. Природни науки, математика и информатика, Професионално направление 4.5. Математика, Научна специалност "Математически анализ".

Дисертационният труд на доц. Панева в обем от 206 стр. се състои от Предговор, Увод, 9 глави, Заключителни бележки, Библиография, включваща 132 заглавия, и Азбучен показалец.

Добре известен факт е, че специалните функции, наречени от Г. Бейтман и А. Ердейи още висши трансцендентни функции, са един от главните "консуматори" на Ойлеровата Гама-функция. Вероятно имайки предвид все още недостатъчната популярност на тази функция, доц. Панева е включила в Глава 1 начални елементи на нейната теория, както и резултати необходими в следващото изложение на дисертационния ѝ труд.

Глава 2 е посветена главно на редове по системата на функциите на Бесел от първи род с цял неотрицателен индекс, а именно $\{J_n(z), n = 0, 1, 2, \ldots\}$. Изтъкнато е, че асимптотичната ѝ "близост"със системата на Тейлър, т.е. наличието на представянето $J_n(z) = \dfrac{z^n}{2^n n!}\{1 + \theta_n(z)\}$, където $\lim_{n\to\infty} \theta_n(z) = 0$ равномерно върху всяко компактно подмножество на комплексната равнина, дава възможност класически резултати за степенните редова като теоремата на Абел и формулата на Коши-Адамар да се пренесат и върху редове по функциите $\{J_n(z), n = 0, 1, 2, \ldots\}$. Също така за въведеното още в първата дисертация на доц. Панева сумиране на разходящи редове с помощта на системата $\{J_n^*(z) = J_n(z)/J_n(z_0), n = 0, 1, 2, \ldots\}$, като аналог на сумирането на Абел, е изтъкнато, че за него е валидна теорема от типа на Абел, т.е. че то е регулярно, а също така и класическата o-Тауберова теорема, както и O-Тауберовата теорема на Литлуд. За редовете по функциите $\{\tilde{J}_n(z) = 2^n n! J_n(z), n = 0, 1, 2, \ldots\}$ е доказана теорема от типа на Фату (Теорема 2.8.1).

Явлението свръхсходимост (Überkonvergenz, Overconvergence) за степенни редове с адамарови празнини е "открито" от Ал. Островски. Съответното твърдение е, че подредица на редицата от парциалните суми на такъв ред е сходяща в околност на всяка точка от границата на кръга му на сходимост, която е регулярна за холоморфната функция дефинирана от него. Валидно е и обратното на това твърдение, т.е. ако за един степенен ред е налице свръхсходимост, той се представя като сума на степенен ред с адамарови празнини и степенен ред с радиус на сходимост по-голям от този с адамаровите празнини.

Един от безспорните приноси на доц. Панева е че свръхсходимостта не е атрибут само на степенните редове. По-конкретно, в Глава 3 са доказани твърдения от типа на Островски за редове по функциите на Бесел от първи род с цял неотрицателен индекс (Теорема 3.2.1, Теорема 3.3.1). Като следствие е получена теорема от Адамаров тип за аналитична непродължимост на ред по такива функции (Теорема 3.2.2).

Развития по класическите функции на Бесел се появяват у Лагранж при третирането на задачата за движението на планетите от слънчевата система, т.е. задачата за двете тела при наличието на Нютонова гравитация. Но в последствие за решаването на задачи от механиката, физиката и инженерно-техническите науки са въведени и широко използвани най-често наричаните техни мултииндексни обобщения, към които в частност принадлежат и хипер-беселовите функции. На всички тях е посветена Глава 4 на дисертационния труд на доц. Панева. Тази глава има обзорен характер на резултатите на не малък брой специалисти, но тя съдържа и резултати на автора му, които могат да се характеризират като оценки на "остатъчните" членове в представянията на обобщените беселови функции въведени в тази глава, наподобяващи асимптотични формули за тях. Типични резултати са формулирани като Теорема 4.3.1 и Теорема 4.3.2. В тази глава са включени и доказателствата на "истински" асимптотични формули за обобщените беселови функции (Теорема 4.4.1, Теорема 4.4.2, Теорема 4.4.3), както и на следствия от тях.

В края на по-миналия век Ем. Борел въведе метод за сумиране на разходящи редове, който ангажира класическата експоненциална функция и който приложен към сходящи степенни редове с център точката $0 \in \mathbb{C}$, води до аналитично продължение на холоморфните функции, дефинирани от такива редове, в области от комплексната равнина, които са сечения на полуравнини и поради това носят общото название многоъгълник на Борел. По същото това време от М.Г. Митаг-Лефлер е въведен метод за сумиране посредством цялата фувкция

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \; z, \alpha \in \mathbb{C}, \; \Re\alpha > 0,$$

която носи неговото име. Приложен към степенните редове с център точката $0 \in \mathbb{C}$, той дава, накратко казано, аналитичните им продължения в области звездни относно тази точка, поради което е прието всяка от тях да се нарича звезда на Митаг-Лефлер.

За дълго функцията на Митаг-Лефлер е останала в забвение, докато не се появяват публикации в които тя е съществено ангажирана. Заслужава да се изтъкне, че утвърждаването ѝ в класическия комплексен анализ се дължи най-вече на известната монография на М. Джрбашян, Интегрални трансформации и представяния в комплексна област (Руски) Наука, Москва (1966).

Интересен и неподозиран феномен е превръщането на функцията на Митаг-Лефлер и най-вече на нейни обобщения във фундаментален фактор в теорията и приложенията на дробния анализ базиран на операторите за обобщено диференциране и интегриране, чийто родоначалнин е този на Риман-Лиувил.

В Глава 5 на дисертационния труд е предложен исторически обзор на "съдбата" на функцията на Митаг- Лефлер, но главното внимание е отделено за нейни обобщения. Първото от тях е функцията дефинирана с равенството (5.1.2), а именно

$$(5.1.2) \qquad E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(\alpha k + \beta)}, z, \alpha, \mathbb{C}, \Re > 0,$$

която също се нарича функция на Митаг-Лефлер или още 2-индексна такава функция. Обобшение, което е 3-индексно, е това на Прабкахар дефинирано с равенството

$$(5.4.1) \qquad E^{\gamma}_{\alpha,\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k z^k}{\Gamma \alpha k + \beta} k!, z, , \beta, \gamma \in \mathbb{C}, \Re\alpha > 0,$$

където $(\gamma)_k$ е символът на Поххамер. В тази глава са включени резултати на дисертанта за Функциите на Митаг-Лефлер, както и за функциите (5.4.1). По-конкретно, това са неравенства респ. асимптотични формули за тези функции. Напр., за функцията $\theta^{\gamma}_{\alpha,n}(z)$ в представянето

$$(5.4.6) \qquad E^{\gamma}_{\alpha,n} = \frac{(\gamma)_p}{\Gamma(\alpha p)} z^p (1 + \theta^{\gamma}_{\alpha,n}), p \in \{0, 1, 2, \ldots\},$$

на функцията на Прабхакар когато $\beta = n, n = 0, 1, 2, \ldots$, е получена оценката

$$\theta^{\gamma}_{\alpha,n}(z) = O\left(\frac{\Gamma(\alpha p + 1)}{\Gamma((p+1) + n)}\right) = O\left(\frac{1}{n^{\Re\alpha}}\right),$$

която е равномерна върху всяко компактно подмножество на $\mathbb{C}$, т.е. това представяне фактически е асимптотична формула за функцията $E^{\gamma}_{\alpha,n}$, когато $n \to \infty$ (Теорема 5.6.2).

Глава 6 е посветена на въведените в края на миналия век мултииндексни функции на Митаг-Лефлер, които се дефинират като в 2-индексната такава, параметрите α и се заместят съответно с "векторите" $(1/\rho_1, 1/\rho_2, \ldots, 1/\rho_m)$ и $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m), m = 3, 4, \ldots$, което води до представянето на тези функции с равенството

$$(6.1.1) \qquad E_{(1/\rho_j),(\mu_j)}(z)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k/\rho_1 + \mu_1)\Gamma(k/\rho_2 + \mu_2) \ldots \Gamma(k/\rho_m + \mu_m),}$$

$$z \in \mathbb{C}, \rho_j > 0, j = 1, 2, \ldots, m.$$

Те се оказват също цели функции от ред ρ и тип σ, дефинирани с

$$\frac{1}{\rho} = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\rho_j}, \ \sigma = \prod_{j=1}^{m} \left(\frac{\rho_j}{\rho}\right)^{\frac{\rho}{\rho_j}}.$$

Освен това, мултииндексните функции на Бесел, дефинирани с равенствата (4.6.1), се оказват свързани с функциите (6.1.1), т.е. валидни са равенствата

$$J^{(m-1)}_{\nu_1,\ldots,\nu_{m-1}}(z)$$

$$= \left(\frac{z}{m}\right)^{\sum_{j=1}^{m-1} \nu_j} E_{(1,\ldots,1),(\nu_1+1, dots, \nu_{m-1}+1)(-(z/m)^m).}$$

Твърденията за мултииндексните функции на Митаг-Лефлер включени в тази глава, като Теорема 6.3.1, Теорема 6.3.2 и Теорема 6.3.3 са напълно аналогични на тези за 2-индексните, но получаването им е изискало преодоляването на съответни технически трудности.

В тази глава са включени и резултати за дефинираните с равенството (6.4.1) мултииндексни функции на Митаг-Лефлер като $3m$-параметрични такива функции, които обобщават 3-параметричните функции на Прабхакар. Те също се цели функции, чийто ред и тип се изразяват само с параметрите $\rho_j, j = 1, 2, \ldots, m$ (Теорема 6.4.1). За тях са получени нови представяния с обобщените хипергеометрични функции на Райт, с H-,функциите на Фокс, а също така и с контурни интеграли от типа на Мелин- Барнс (Теорема 6.6.1, равенство (6.6.4)). Като следствие от (6.6.4) е получено и преобразованието на Мелин на $3m$- индексните функции на Митаг-Лефлер при съответни условия за параметрите $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, j = 1, 2, \ldots, m$.

Глава 7 е посветена на дробното смятане или по-точно, на негови съвременни направления, които ангажират както класическите оператори на Риман- Лиувил и Ердейи-Кобер, така и техни обобщение като това на В. Кирякова.Твърденията, получени с немалки усилия и техническа сръчност, са резултат от действията на упоменатите оператори върху мултииндексните функции на Митаг-Лефлер, както и на тези на положителните степени на класическия оператор за диференциране.

Глава 8 е разширение на Глава 2. Резултатите включени в нея са аналогични на тези от Глава 2 и, най-бщо казано, са теореми от типа на Абел, Таубер и Фату за редове по функции от беселов тип, както и по мултииндексни функции на Митаг-Лефлер.

В Глава 9 се третира пак явлението свръхсходимост. Накратко казано, резултатите включени в нея са теоремите на Ал. Островски, но за редове от мулти-Беселов респ. мулти-Митаг-Лефлеров тип.

От приложената от доц. Панева сравнителна таблица за изпълнение на препоръчителните показатели съгласно Правилника за условията и реда за придобиване на научни степени и за заемане на академични длъжности в ИМИ на БАН, Глава четвърта, чл. 6, т. 1: За научната степен "доктор на науките става ясно, че те са чувствително надвишени както в количествено отношение, така и по оценката на качеството на пубикациите по дисертациония труд съгласно авторитетни международно възприети стандарти. По-конкретно, в нея са отразени 15 нейни публикации, всички самостоятелни, измежду тях е и наскоро публикуваната от World Scientific Publishing (UK), London, 2016, монография From Bessel to Multy-Index Mitag-Leffler Functions, която има съществено присъствие в дисертационния труд. Впечатляващ е и общия брой 32 на цитиранията на тези 15 публикации в издания със сумарен IF=44.362 и SJR=2.080.

Авторефератът, чийто обем се е оказал неизбежен поради този на дисерт. труд, достатъчно пълно отразява резултатите съдържащи се в него. Той може да се използва за информативно запознаване с труда.

Приемам авторската справка като добре оформено изложение както на историческото възникване, така на ролята и значимостта на функциите на Бесел и тези на Митаг-Лефлер в съвременния математически анализ. Приемам и авторската справка на приносите в дисерт. труд. Заслу- жава да се изтъкне и апробацията на резултатите включени в него. Съгласно приложения от доц. Панева списък, в един сравнително кратък период тя има 24 участия с доклади на конференции, отчетни сесии и семинари у нас и в чужбина. За активното и присъствие на тези научни форуми свидетелствува и списъка на членствата ѝ в техни организационни комитети.

Критичните ми бележки имат по-скоро редакционен характер. Те са отразени в предоставения ми екземпляр на дисертацонния труд и право е на автора му да ги приеме или не.

Заключение. Дисертационният труд на доц. Панева е в актуална област на интезивни изследвания, резултатите от които намират все по-широки приложения в разнообразни научни направления. Безспорно е, че тя вече е постигнала нивото на експерт в съвременната теория на мултииндексните функции на Бесел и Митаг-Лефлер. Безспорно е, че нейните резултати получиха висока оценка и подобаващо признание. Ето защо считам че имам достатъчно основание да препоръчам присъждането на доц. д-р Йорданка Добрева Панева-Коновска степента "доктор на науките" по математически анализ.

София, 8 Февруари 2018

Рецензент:

(Проф. Петър Русев)