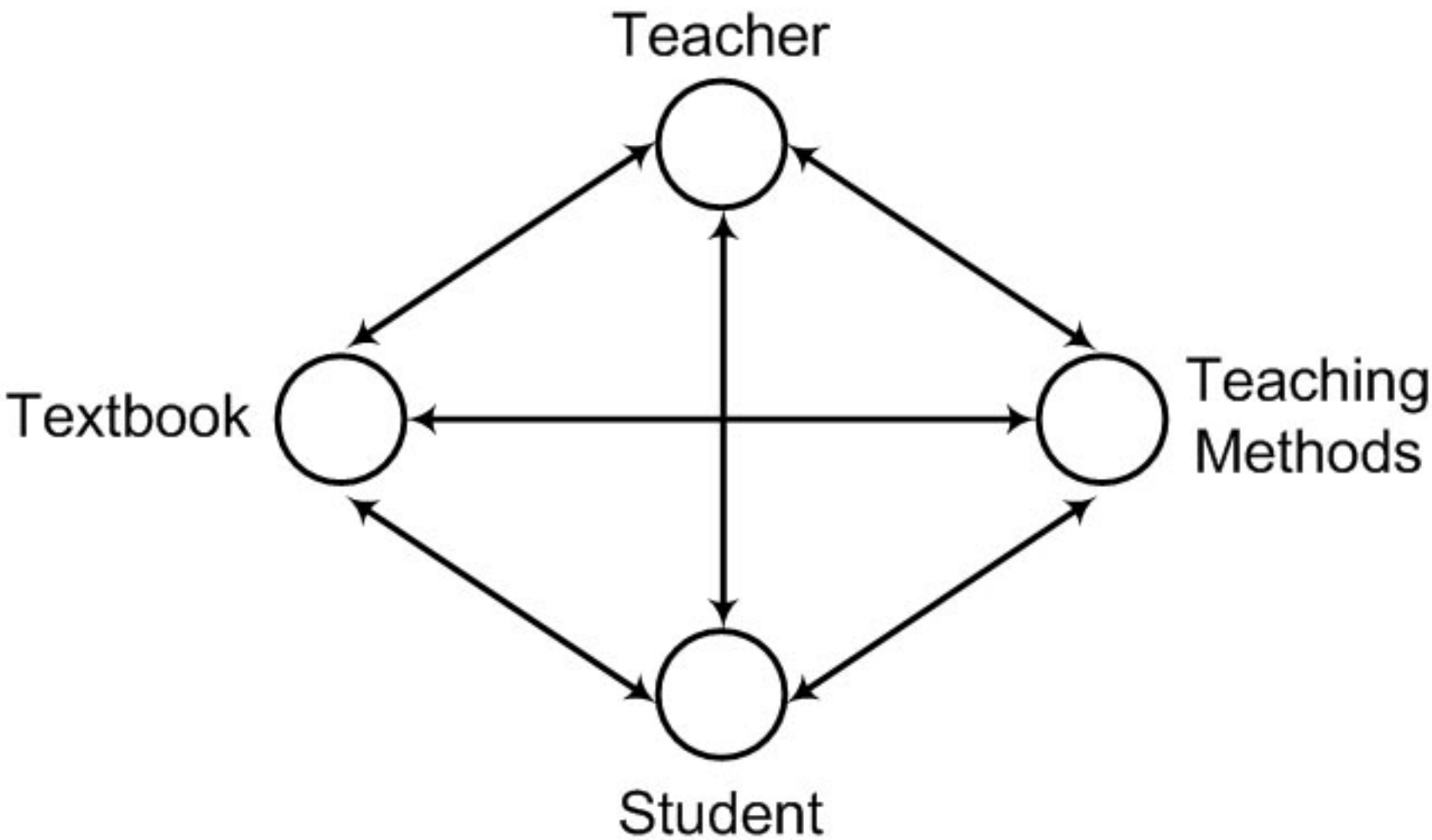
An Approach To Textbook Writing

Vesna Jevremovic, PhD
Faculty of Mathematics,
University of Belgrade,
Serbia


Teacher
Textbook
Teaching Methods
Student

Present or Future?

- There are many problems author can encounter when writing a textbook
- Textbook is evaluated by colleagues (*present*) and students (*future*)
- Future is more important
  - A textbook should be usable, likable, interesting and stimulating for students

Readers' Characteristics

- Previous knowledge
- Intelligence
- Interest in a subject
- Persistence
  - All these are normally distributed!
- Possibilities for improving the average values – textbook

Lecture vs. Textbook

- Verba volant, scripta manent
- No colloquial expressions
- Avoid too long sentences
- No digressions
- Textbook should contain comments that follow the lecture

Terminology

- Problems in translating to particular languages
- Problems with the supremacy of English language terminology
  - “Stem and leaf” diagram (in statistics)
  - File, folder, download, ...

What the Textbook is Not

- Research paper
- Encyclopaedia
- Monograph
  - But, it can contain elements of the aforementioned
- It is not a series of facts without explanation
- Neither exclusively theoretical nor exclusively practical

Theory vs. Practice

- Mathematics cannot be divided into theoretical and practical (applied m.)
  - Numerical examples should be given with theory
  - In applied mathematics theoretical background should be provided

Old Textbooks

- Wide range of information
- Gradual and detailed elaboration of the topic
- Font size agreeable
- Explanations how to read mathematical symbols
- Examples start from the simplest

Details

- Authors comments
- Additional historical data
- Anecdotes
- Pictures and illustrations
- Special symbols (e. g. ✓, ✈, ☺)
- Commending the reader

Illustrations

- Freehand drawings
- Descriptive geometry
- Proofs of theorems illustrated when necessary
  - Not one large image but a series of smaller images, gradually leading towards the final picture

One Metaphore

- Textbook is the road (a highway or ...?)
- Teacher is the whole system of road signs
- Student is the traveller

Author and His/Her Readers

- Author is well-grounded in a subject, while the reader is only getting to know it
- Authors should think of textbooks they themself liked, as well as textbooks they disliked or found hard to follow
- Author should find a way to commend the reader
  - “You got this far – well done!”

General Cultural Level

- Textbook must not be a part of the cultural debasement trend
- Quality language
- Good visual presentation
- Dictionary of terms in English or other foreign language
- Historical background

Thought on Page Distribution

- Textbook should be planned according to lessons
  - Such planning provides a feeling of advancement
  - 120 minutes ≈ 2 classes ≈ 20-30 pages
    - 10-15 pages – theoretical introduction
    - 5 pages – comments
    - 5-10 pages – exercises and questions

Rules of Studying

- Recognize
  - Repeat
    - Remember
- Additional questions
- Exercises
- Special recognition exercises

Proofs of Theorems

- Difference between proofs of existence and algorithmic proofs
- Implications – example when the opposite is not true
- Conditions – example(s) which show that every condition is essential
- Accompanying drawings should be gradual

Teachers' Textbooks

- Future teachers need to be provided with concrete models during their studies
- Three parts for every topic:
  - The lesson as in the students' textbooks
  - Analysis of the lesson
  - Additional information for the teacher (elements of theory connected with the topic)

PERIODIČNOST FUNKCIJA

Definicija 2.

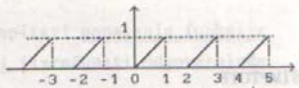
Funkcija f definisana na D_f je periodična ako postoji realni broj $T\neq 0$, tako da za svako $x\in D_f$ važi $(x+T)\in D_f$ i

$$f(x+T) = f(x).$$

Broj T je period funkcije f.

Primer 2.

Funkcija sinx je periodična. Broj $T=6\pi$ je jedan njen period. Periodična može biti i funkcija koja nije trigonometrijska, npr. ln(sinx), kao i funkcija čiji je grafik dat na slici:



Jedan period ove funkcije je 2. Napišite analitički oblik za posmatranu funkciju.

Na osnovu zahteva definicije zaključujemo da je oblast definisanosti periodične funkcije beskonačna (ne mora biti ceo skup $\mathbb{R}$).

Teorema 2.

Ako je f periodična sa periodom T i k ceo broj različit od nule, tada je kT period funkcije f.

Teorema 3.

Ako je f periodična sa periodom $T>0$, onda je skup svih perioda funkcije f oblika $\{kT,\ k\in\mathbb{D},\ k\neq 0\}$.

Definicija 3.

Najmanji od pozitivnih perioda periodične funkcije je osnovni period.

Periodična funkcija ne mora imati osnovni period. Dirihleova funkcija je periodična i svaki racionalni broj je njen period, ali osnovni period ne postoji.

РЕШЕНИ ЗАДАЦИ

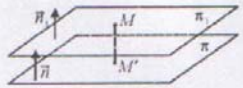
ПРАВА И РАВАН У ПРОСТОРУ

1. Написати једначину равни π_1 која садржи дату тачку M и паралелна је датој равни π, ако је:

$$M(1,1,1),\ \pi\colon -2x+y-z+1=0.$$

Одредити растојање равни π и π_1.

Паралелне равни. Једначина равни.



$\pi_1 \| \pi,\ \vec{n} \perp \pi,\ \vec{n}_1 \perp \pi_1,\ \overrightarrow{MM'} \perp \pi$

Одредите M', пројекцију тачке M на раван π.

(Из $\overrightarrow{MM'} = \lambda\vec{n},\ M' \in \pi$ се добијају координате тачке $M'(4/6,7/6,5/6)$.)

РЕШЕЊЕ:

Ако је раван π_1 паралелна равни π, онда су нормални вектори тих равни колинеарни, па можемо узети да је нормални вектор $\vec{n}$ равни π истовремено и нормални вектор равни π_1.

За раван π_1 имамо нормални вектор и једну тачку која припада тој равни. Стога једначину равни π_1 одређујемо из:

$$(x-1)\cdot(-2)+(y-1)\cdot(1)+(z-1)\cdot(-1)=0,$$

па добијамо:

$$\pi_1\colon -2x+y-z+2=0.$$

Растојање паралелних равни π и π_1 једнако је растојању једне тачке равни π_1 (то може бити тачка M) од равни π:

$$d(\pi,\pi_1)=(\text{због } \pi\|\pi_1)=d(M,\pi)=$$
$$=\frac{|-2\cdot 1+1-1+1|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Други начин: пошто су равни π и π_1 паралелне, закључујемо да је једначина равни π_1:

$$-2x+y-z+D=0$$

Непознати параметар D одређујемо из услова да тачка M припада равни π_1 те да координате тачке M задовољавају једначину равни π_1:

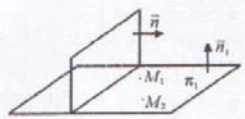
$$-2\cdot 1+1-1+D=0 \Rightarrow D=2.$$

$d(\pi,\pi_1)$ је уобичајена ознака за растојање π и π_1. Слично и за $d(M,\pi)$.

2. Одредити једначину равни π_1 која садржи дате тачке M_1 и M_2 и нормална је на раван π, ако је:

$$M_1(1,2,0),\ M_2(2,1,1),\ \pi\colon -x+y=1.$$

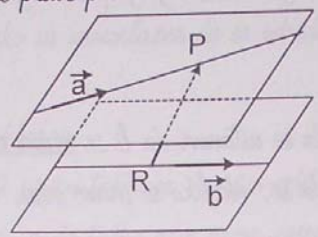
Узајамно нормалне равни. Једначина равни.



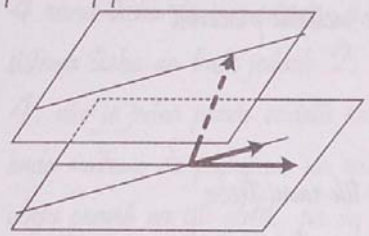
РЕШЕЊЕ:

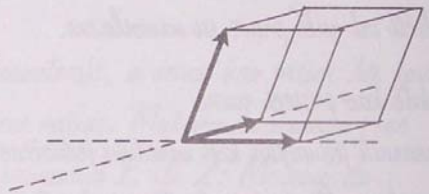
Ако су равни узајамно нормалне, онда су и њихови нормални вектори узајамно нормални. Ако је $\vec{n}_1(a,b,c)$ нормални вектор равни π_1, пошто је $\vec{n}(-1,1,0)$ нормални вектор равни π, имамо:

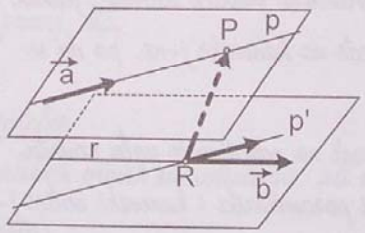
Na slici su mimoilazne prave p i r.



Kao što je već rečeno uslov da su prave mimoilazne je da mešoviti proizvod vektora tih pravih i vektora određenog tačkama P i R bude različit od nule. Zaista, ako su prave mimoilazne, onda ta tri vektora dovedena na zajednički početak (objasnite kako se to ostvaruje) predstavljaju ivice paralelopipeda.







S druge strane znamo da se zapremina paralelopipeda izražava kao apsolutna vrednost mešovitog proizvoda vektora koji se poklapaju sa tri ivice paralelopipeda koje polaze iz istog temena. Ako su (x_a, y_a, z_a) koordinate vektora prave p, (x_b, y_b, z_b) koordinate vektora prave r i (x_P, y_P, z_P) i (x_R, y_R, z_R) koordinate ta;aka P i R, uslov

Neka je $A_1, A_2, ..., A_n$ konačan niz događaja. Njihova unija D je

$$D = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$$

i predstavlja događaj koji se ostvaruje ako se ostvari bar jedan od događaja iz posmatranog niza. Slično važi i za uniju beskonačno mnogo događaja.

U Primeru 1. je $A \cup D = A$ kao i $A \cup \overline{A} = \Omega$. Ova druga relacija važi za svaki događaj. Naime, za svaki događaj $X \subseteq \Omega$ je $X \cup \overline{X} = \Omega$. Takođe, za svaki događaj $X \subseteq \Omega$ je $X \cap \overline{X} = \Phi$.

Može se pokazati da su operacije presek i komplement (ili unija i komplement) dovoljne da se zapiše svaki događaj iz prostora elementarnih ishoda. Dalje će se ipak koristiti (ravnopravno) sve tri već definisane operacije. Postoje i operacije izvedene od tri osnovne, kao što su operacije date u definicijama 7 i 7a.

Definicija 7. ***Razlika događaja***

Ako se događaj C realizuje ukoliko se realizuje događaj A i ne realizuje događaj B, tada je događaj C razlika događaja A i B.

Na osnovu definicije zaključuje se da je razlika događaja A i B jednaka događaju $A \cap \overline{B}$. Za razliku događaja koristi se oznaka: A\B.

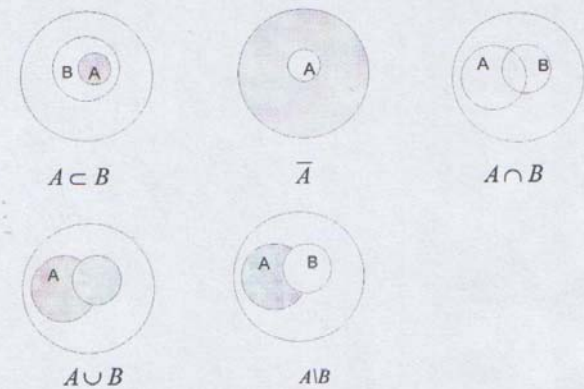
Definicija 7a. ***Simetrična razlika događaja***

Ako se događaj C realizuje ukoliko se realizuje A\B *ili ukoliko se realizuje B*\A, *onda je događaj C simetrična razlika događaja A i B.*

Za simetričnu razliku se koristi oznaka AΔB.

Kada se posmatra više događaja na istom prostoru elementarnih ishoda, bitno je poznavati međusobne odnose tih događaja. Posebno je u teoriji verovatnoće važan slučaj opisan u sledećoj definiciji, a njegova primena će biti razmotrena kasnije.

☺ Relacije i operacije sa događajima se mogu slikovito prikazati pomoću Venovih dijagrama.



Slika 1. Relacije i operacije sa događajima (veliki krug predstavlja Ω)

Džon Ven (1834-1923), engleski matematičar i logičar. Predavao je logiku i moral na Kembridžu. Zalagao se za simboličku logiku. U teoriji skupova njegovo ime nose dijagrami kojima se predstavljaju relacije i operacije sa skupovima.

ZADACI

1. Novčić se baca 4 puta. Neka je A događaj da su rezultati prvog i četvrtog bacanja različiti, a B događaj da su dobijena tačno dva „pisma". Opisati događaje: $A \cup B, A \cap B, \overline{A} \cap B, A \cap \overline{B}$.

2. Neka su A, B i C događaji iz istog prostora elementarnih ishoda. Istinitost sledećih tvrđenja proveriti skicirajući na dijagramu događaje na levoj i na desnoj strani znaka jednakosti:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (A \cup C)$$
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (A \cap C)$$
$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Venn diagram is a simple diagram used to represent unions and intersections of sets. The diagram described by Venn in 1880 and popularized by his book *Symbolic Logic*, was introduced by Leibnitz in the XVIII century.

③ 在 $f(x)$ 的连续点 x 处，有 $F'(x)=f(x)$。

注 (1) 连续型随机变量 X 取任一固定值 a 的概率为 0，即 $P(X=a)=0$。这说明：

① 概率为 0 的事件未必是不可能事件；

② 对任意 $a<b$，有

$$\begin{aligned}P(a<X\leqslant b)&=P(a\leqslant X<b)=P(a\leqslant X\leqslant b)\\&=P(a<X<b)\\&=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

(2) 连续型随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的处处连续函数。

6. 三种重要的连续型分布

(1) 均匀分布 $U(a,b)$，即 X 以等可能性在有限区间 (a,b) 上取值，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b\\ 1, & x\geqslant b\end{cases}$$

设 $X\sim U(a,b)$，则 X 取值落在 (a,b) 内的概率为 1，而落在 (a,b) 外的概率为 0，且 X 取值落在 (a,b) 的任一子区间 (c,d) $(a\leqslant c<d\leqslant b)$ 内的概率为 $\dfrac{d-c}{b-a}$。

(2) 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，即 X 可以取任何一个实数值，且具