

Ойлерова права и Ойлерова крива зависещи от точка

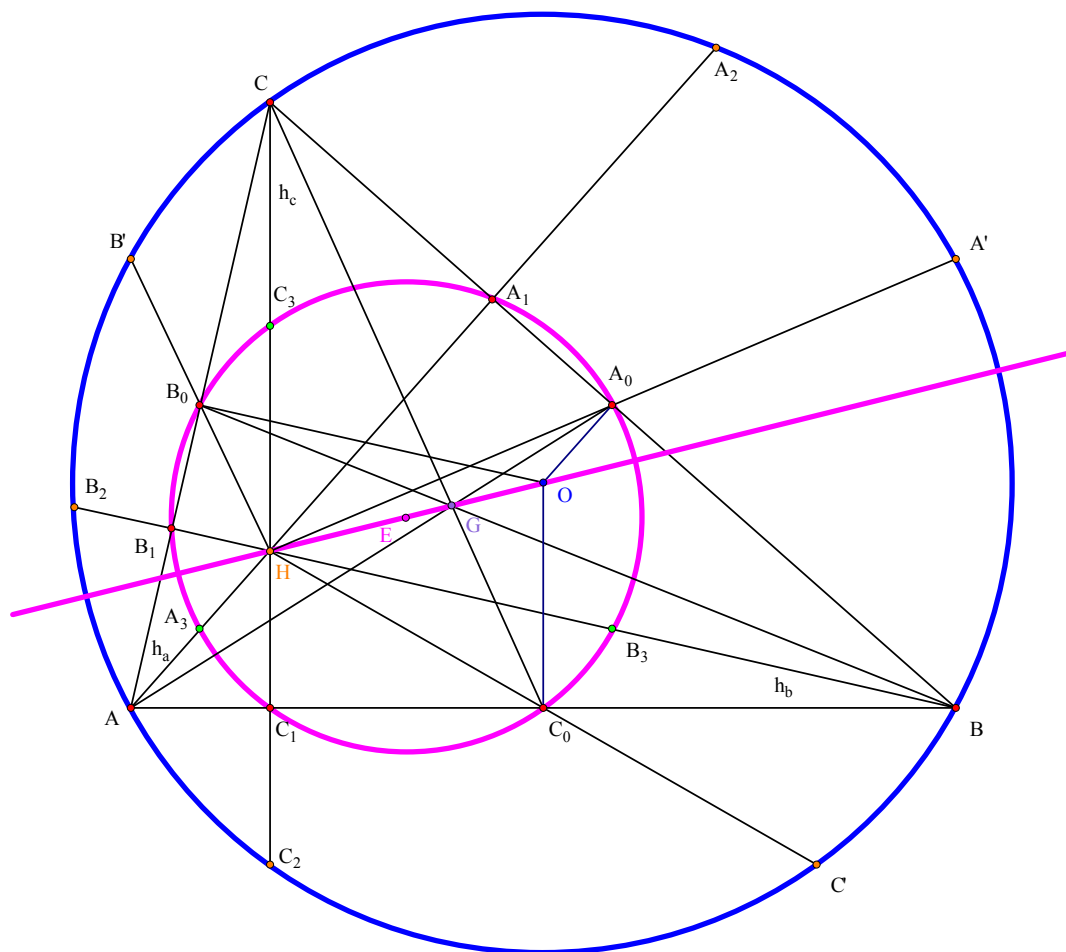
В. Ненков

Всеки неравнобедрен триъгълник притежава една специална права, която се нарича Ойлерова права и една специална окръжност – Ойлерова окръжност. В следващите редове, следвайки разсъждения по аналогия ще покажем как с помощта на програмата “THE GEOMETER’S SKETCHPAD” могат да се получат подобни права и крива от втора степен за даден триъгълник, зависещи от произволна точка в равнината му.

Разглеждаме произволен триъгълник ABC . Спрямо $\triangle ABC$ ще използваме барицентрични координати, като $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ и $C(0,0,1)$. Означаваме с $A_0\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$,

$B_0\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ и $C_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ средите съответно на страните BC , CA и AB [1].

В общия случай характерните точки за $\triangle ABC$, които лежат върху правата на Ойлер са центърът на описаната окръжност, ортоцентърът, медицентърът и центърът на Ойлеровата окръжност (Черт. 1.).



Черт. 1.

Описаната за $\triangle ABC$ окръжност е само един елемент на безкрайното множество криви от втора степен описани около $\triangle ABC$. Нещо повече, ако $O(x_0, y_0, z_0)$ ($x_0 + y_0 + z_0 = 1$) е произволна точка, нележаща на никоя от правите BC , CA , AB , B_0C_0 , C_0A_0 и A_0B_0 в равнината

на ΔABC , то точките A, B, C и съответните им симетрични спрямо O точки

$A'(2x_0 - 1, 2y_0, 2z_0), B'(2x_0, 2y_0 - 1, 2z_0), C'(2x_0, 2y_0, 2z_0 - 1)$ лежат на крива от втора степен $k(O)$ с център O (Черт. 2, 3). Кривата $k(O)$ има следното уравнение

$$(1) \quad k(O): (1 - 2x_0)x_0yz + (1 - 2y_0)y_0zx + (1 - 2z_0)z_0xy = 0.$$

По този начин определена точката O е аналог на центърът на описаната окръжност.

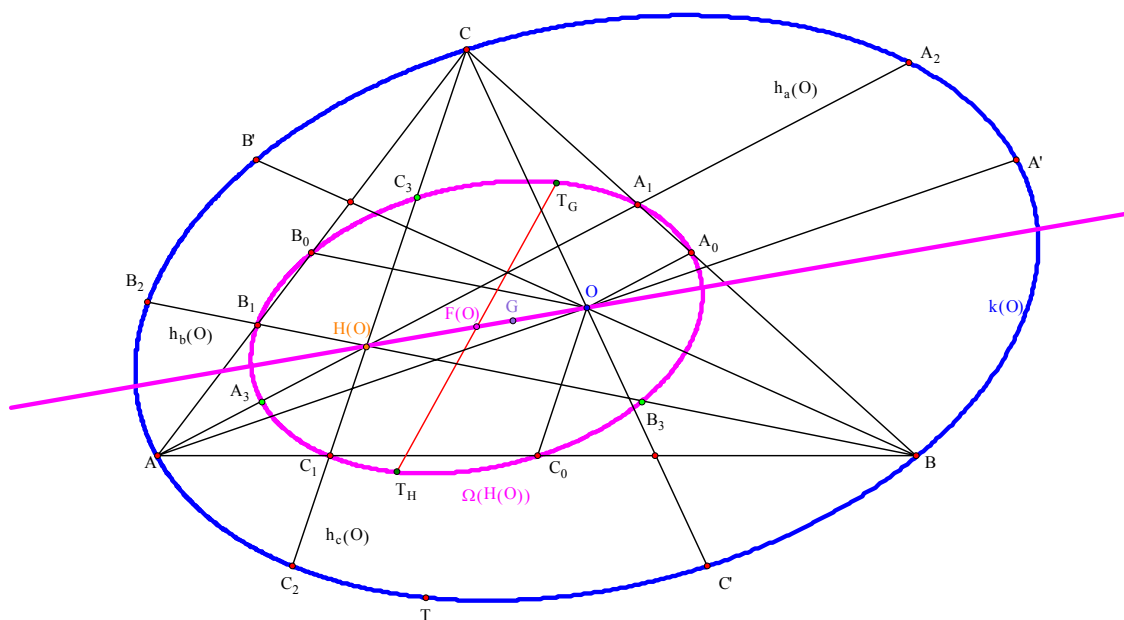
Сега ще определим точка, която е аналог на ортоцентърът на ΔABC . Височините на ΔABC са успоредни на правите минаващи през центърът на описаната окръжност и точките A_0, B_0 и C_0 (Черт. 1.). Това ни дава основание да построим в програмата "THE GEOMETER'S SKETCHPAD" правите $h_a(O), h_b(O)$ и $h_c(O)$ минаващи съответно през върховете A, B и C и успоредни съответно на правите OA_0, OB_0 и OC_0 . Вижда се, че тези прави се пресичат в една точка $H(O)$ (Черт. 2, 3). Освен това, както и да променяме положението на O разглежданите прави винаги се пресичат в една точка. По този начин получаваме следното

Свойство 1. Правите $h_a(O), h_b(O)$ и $h_c(O)$ се пресичат в една точка $H(O)$.

Доказателството на това свойство получаваме като първо намерим параметричните уравнения на правите $h_a(O), h_b(O)$ и $h_c(O)$. Получаваме

$$(2) \quad h_a: \begin{cases} x = 1 + x_0 t_a, \\ y = \left(y_0 - \frac{1}{2}\right) t_a, \\ z = \left(z_0 - \frac{1}{2}\right) t_a. \end{cases} \quad h_b: \begin{cases} x = \left(x_0 - \frac{1}{2}\right) t_b, \\ y = 1 + y_0 t_b, \\ z = \left(z_0 - \frac{1}{2}\right) t_b. \end{cases} \quad h_c: \begin{cases} x = \left(x_0 - \frac{1}{2}\right) t_c, \\ y = \left(y_0 - \frac{1}{2}\right) t_c, \\ z = 1 + z_0 t_c. \end{cases}$$

След това решаваме системата от уравненията на правите $h_a(O)$ и $h_b(O)$. Получаваме, че пресечната им точка е $H(O)(1 - 2x_0, 1 - 2y_0, 1 - 2z_0)$. Накрая проверяваме, че координатите на тази точка удовлетворяват уравненията на $h_c(O)$.



Черт. 2.

За да бъде по-убедителна аналогията между точката $H(O)$ и ортоцентърът на ΔABC , трябва тази точка да притежава и други свойства, които са характерни за ортоцентърът.

Нека правите $h_a(O)$, $h_b(O)$ и $h_c(O)$ пресичат правите BC , CA и AB съответно в точките A_1, B_1 и C_1 , а кривата $k(O)$ съответно в A_2, B_2 и C_2 (Черт. 2, 3).

Известно е, че точките, които са симетрични на ортоцентърът спрямо страните и средите на страните лежат на описаната за $\triangle ABC$ окръжност (Черт. 1.) [1]. Затова в "THE GEOMETER'S SKETCHPAD" проверяваме, дали точките A_2, B_2 и C_2 са симетрични на $H(O)$ съответно спрямо A_1, B_1 и C_1 . Проверяваме и дали точките A', B' и C' са симетрични на $H(O)$ спрямо A_0, B_0 и C_0 . Всички направени построения водят до извода, че $H(O)$ притежава следните свойства:

Свойство 2. Точките A_2, B_2 и C_2 са симетрични на $H(O)$ съответно спрямо A_1, B_1 и C_1 .

Свойство 3. Точките A', B' и C' са симетрични на $H(O)$ съответно спрямо A_0, B_0 и C_0 .

Доказателството на свойство 3 се получава от координатите на точките $A_0, B_0, C_0, A', B', C'$ и $H(O)$ посочени по-горе и факта, че координатите на средата на отсечка са равни на полусумите от съответните координати на краищата на отсечката.

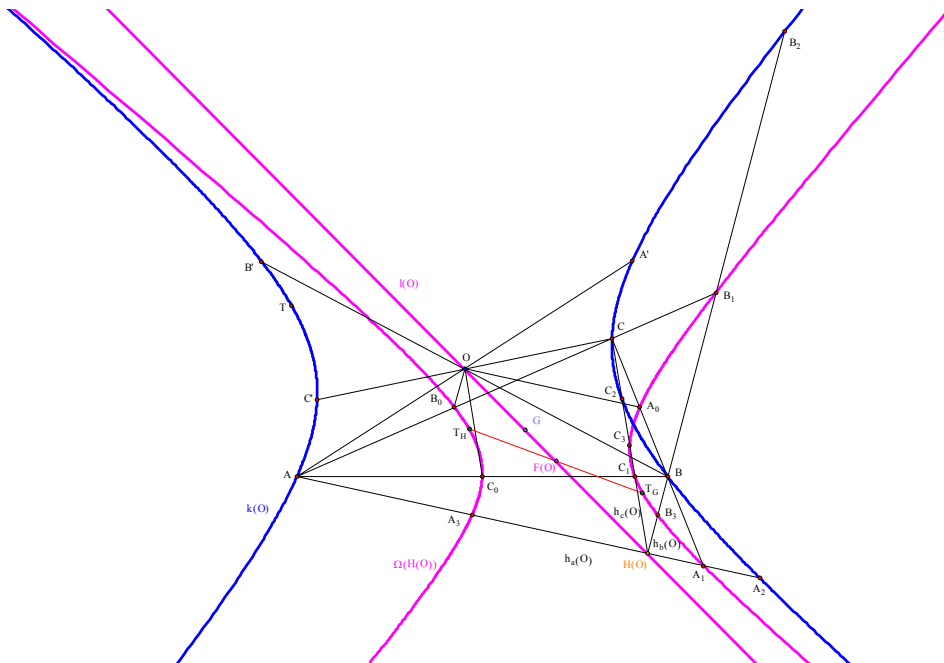
За да докажем свойство 2 първо от (2) намираме

$$A_1\left(0, \frac{1-2y_0}{2x_0}, \frac{1-2z_0}{2x_0}\right), B_1\left(\frac{1-2x_0}{2y_0}, 0, \frac{1-2z_0}{2y_0}\right) \text{ и } C_1\left(\frac{1-2x_0}{2z_0}, \frac{1-2y_0}{2z_0}, 0\right). \text{ След това от (1) и (2)}$$

$$\text{получаваме } A_2\left(2x_0-1, \frac{(1-x_0)(1-2y_0)}{x_0}, \frac{(1-x_0)(1-2z_0)}{x_0}\right),$$

$$B_2\left(\frac{(1-y_0)(1-2x_0)}{y_0}, 2y_0-1, \frac{(1-y_0)(1-2z_0)}{y_0}\right) \text{ и } C_2\left(\frac{(1-z_0)(1-2x_0)}{z_0}, \frac{(1-z_0)(1-2y_0)}{z_0}, 2z_0-1\right).$$

Накрая от получените координати лесно се установява верността на свойство 2.



Черт. 3.

Да построим сега в програмата “THE GEOMETER’S SKETCHPAD” правата $OH(O)$ и медицентърът $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ на ΔABC . Забелязваме, че $G \in OH(O)$, а пресмятанията показват, че $GH(O):GO = 2:1$. С това установяваме

Свойство 4. Точките $O, H(O)$ и G лежат на една права, като точката G дели отсечката $H(O)O$ в отношение $2:1$.

Доказателството на това свойство се получава като се съобрази, че от координатите на точките $O, H(O)$ и G следва векторното равенство $\overrightarrow{H(O)G} = 2\overrightarrow{GO}$.

Свойство 4 показва, че правата $l(O)$ върху, която лежат точките $O, H(O)$ и G е аналог на Ойлеровата права и затова ще казваме, че $l(O)$ е Ойлерова права на ΔABC зависеща от точката O .

Върху Ойлеровата права лежи и центърът на Ойлеровата окръжност за ΔABC . Затова нека потърсим кривата, която е аналог на Ойлеровата окръжност.

В общия случай върху Ойлеровата окръжност лежат точките A_0, B_0, C_0 , петите на височините и средите на отсечките свързващи върховете на триъгълника с неговия ортоцентър (Черт. 1.) [1].

За произволна точка $P(\lambda, \mu, \nu)$ ($\lambda + \mu + \nu = 1$) от равнината на ΔABC , точките A_0, B_0, C_0 , пресечните точки на правите AP, BP, CP съответно с правите BC, CA, AB и средите на отсечките AP, BP, CP , които ще означаваме съответно с A_3, B_3, C_3 лежат на една крива от втора степен $\Omega(P)$ (Черт. 2, 3), която ще наричаме Ойлерова крива за точката P спрямо ΔABC . Тази крива има следното уравнение

$$(3) \quad \Omega(P): \mu \nu x^2 + \nu \lambda y^2 + \lambda \mu z^2 - (1-\lambda)\lambda yz - (1-\mu)\mu zx - (1-\nu)\nu xy = 0.$$

Очевидно Ойлеровата окръжност на ΔABC е Ойлеровата крива на неговия ортоцентър.

Тъй като $H(O)$ е аналог на ортоцентърът уместно е в случая да разгледаме Ойлеровата крива $\Omega(H(O))$ на точката $H(O)$. От дефиницията следва, че $\Omega(H(O))$ минава през точките $A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1$ и средите на отсечките AP, BP, CP , а от (3) следва, че нейното уравнение е

$$(4) \quad \Omega(H(O)): \begin{aligned} & (1-2y_0)(1-2z_0)x^2 + (1-2z_0)(1-2x_0)y^2 + (1-2x_0)(1-2y_0)z^2 - \\ & - 2(1-2x_0)x_0yz - 2(1-2y_0)y_0zx - 2(1-2z_0)z_0xy = 0. \end{aligned}$$

Ще казваме, че $\Omega(H(O))$ е Ойлерова крива на ΔABC зависеща от точката O .

За точките A_3, B_3 и C_3 в “THE GEOMETER’S SKETCHPAD” чрез експерименти установяваме

Свойство 5. Правите $A'A_3, B'B_3$ и $C'C_3$ минават през точката G , при което са изпълнени отношенията $GA':GA_3 = GB':GB_3 = GC':GC_3 = 2:1$.

От координатите на разглежданите точки се получават векторните равенства $\overrightarrow{GA_3} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA'}$, $\overrightarrow{GB_3} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB'}$ и $\overrightarrow{GC_3} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC'}$, които доказват свойството.

Нека сега $h\left(H(O), \frac{1}{2}\right)$ е хомотетия с център $H(O)$ и коефициент $\frac{1}{2}$, а $h\left(G, -\frac{1}{2}\right)$ е хомотетия с център O и коефициент $-\frac{1}{2}$. От свойства 2,3,5 и основното свойство на медицентъра се получава

Свойство 6. Хомотетиите $h\left(H(O), \frac{1}{2}\right)$ и $h\left(G, -\frac{1}{2}\right)$ преобразуват $k(O)$ в $\Omega(H(O))$.

От последното свойство непосредствено следва

Свойство 7. Кривите $k(O)$ и $\Omega(H(O))$ са от един и същи вид.

Нека $F(O)\left(\frac{1-x_0}{2}, \frac{1-y_0}{2}, \frac{1-z_0}{2}\right)$ е средата на отсечката $OH(O)$. От свойство 6 следва

Свойство 8. Точката $F(O)$ е център на Ойлеровата крива $\Omega(H(O))$.

Нека T е произволна точка от $k(O)$. Да построим образите T_H и T_G на тази точка съответно при $h\left(H(O), \frac{1}{2}\right)$ и $h\left(G, -\frac{1}{2}\right)$ и правата $T_H T_G$. Забелязваме, че когато движим точката T по $k(O)$, правата $T_H T_G$ минава през $F(O)$. Наистина, ако S е произволна точка в пространството от дефинициите на разглежданите хомотетии, следват равенствата $\overrightarrow{ST_H} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{ST} + \overrightarrow{SH(O)})$ и $\overrightarrow{ST_G} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{ST} + 3\overrightarrow{SG})$. От тези равенства при $S = F(O)$ се получава $\overrightarrow{F(O)T_H} + \overrightarrow{F(O)T_G} = \vec{0}$. С това е доказано следното

Свойство 9. Хомотетиите $h\left(H(O), \frac{1}{2}\right)$ и $h\left(G, -\frac{1}{2}\right)$ преобразуват произволна точка от $k(O)$ в диаметрално противоположни точки на $\Omega(H(O))$. (Черт. 2, 3)

От получените резултати следва, че правата $l(O)$ не съществува точно, когато $O \equiv G$. В този случай $\Omega(G)$ е елипса вписана в $\triangle ABC$. Този факт обяснява защо равностранный триъгълник не притежава Ойлерова права.

До сега разглеждахме случаите, когато описаната около $\triangle ABC$ крива е елипса или хипербола с център в дадена точка O .

Параболите описани около $\triangle ABC$ можем да разглеждаме като конични сечения с безкрайни центрове. Безкрайният център O на параболата можем да определим с направлението на даден вектор $\vec{O}$.

Нека $\vec{O}(x_0, y_0, z_0)$ ($x_0 + y_0 + z_0 = 0$) е вектор, който не е колинеарен с никоя от правите BC, CA и AB . Съществува единствена парабола $\pi(\vec{O})$, която минава през точките A, B, C и има за ос права колинеарна с $\vec{O}$ (допира се до безкрайната права на равнината в безкрайната точка O).

Параболата $\pi(\vec{O})$ има следното уравнение

$$(5) \quad k(O): x_0^2 yz + y_0^2 zx + z_0^2 xy = 0.$$

В този случай точката $H(\vec{O})$ можем да разглеждаме като съвпадаща с безкрайния център на $\pi(\vec{O})$.

Правата $l(\vec{O})$ през G и колинеарна с $\vec{O}$, разглеждаме като Ойлерова права на $\triangle ABC$ зависеща от направлението $\vec{O}$ (или все едно зависеща от безкрайната точка O и я означаваме с $l(O)$).

Построяваме правите a_0, b_0 и c_0 , които минават съответно през върховете A, B, C и са колинеарни с вектора $\vec{O}$.

Нека $a_0 \cap BC = A_1, b_0 \cap CA = B_1$ и $c_0 \cap AB = C_1$. Координатите на последните точки са следните $A_1\left(0, -\frac{y_0}{x_0}, -\frac{z_0}{x_0}\right), B_1\left(-\frac{x_0}{y_0}, 0, -\frac{z_0}{y_0}\right), C_1\left(-\frac{x_0}{z_0}, -\frac{y_0}{z_0}, 0\right)$.

Координатите на точките $A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1$ и вектора $\vec{O}$ удовлетворяват уравнението

$$(6) \quad \Omega(\vec{O}): y_0 z_0 x^2 + z_0 x_0 y^2 + x_0 y_0 z^2 + x_0^2 yz + y_0^2 zx + z_0^2 xy = 0.$$

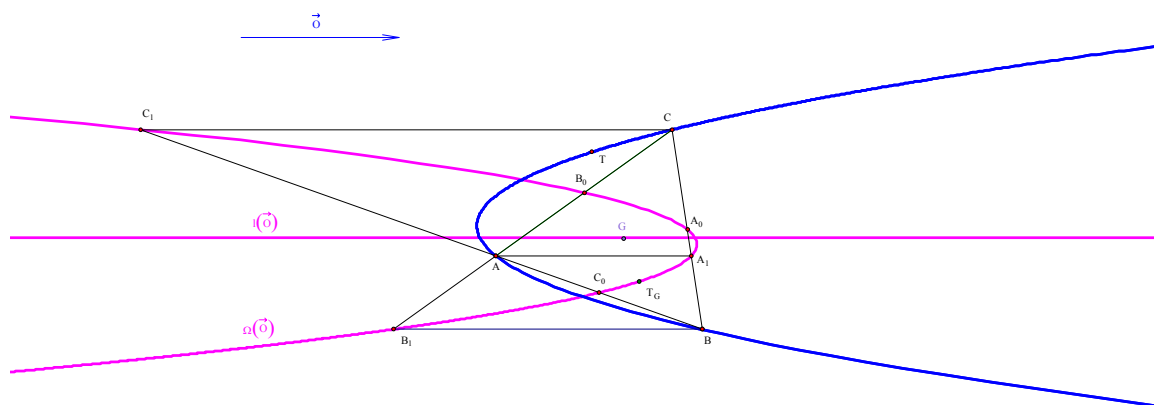
Следователно те лежат на една крива от втора степен $\Omega(\vec{O})$ с ос колинеарна на $\vec{O}$ и тази крива има уравнение (6) (Черт. 4.).

Кривата $\Omega(\vec{O})$ разглеждаме като Ойлерова крива на $\triangle ABC$ зависеща от направлението $\vec{O}$ (или все едно зависеща от безкрайната точка O и я означаваме с $\Omega(O)$).

Ако $T(x_T, y_T, z_T)$ е произволна точка от $k(\vec{O})$ (Черт. 4.), то след известни преобразувания от (5) и (6) се получава, че точката $T_G\left(\frac{1-x_T}{2}, \frac{1-y_T}{2}, \frac{1-z_T}{2}\right)$ е от $\Omega(\vec{O})$.

Освен това лесно се проверява, че е изпълнено равенството $\overrightarrow{GT_G} = -\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{GT}$. Следователно в сила е следното

Свойство 10. Хомотетията $h\left(G, -\frac{1}{2}\right)$ преобразува параболата $\Omega(\vec{O})$ в параболата $k(\vec{O})$. (Черт. 4.)



Черт. 4.

От свойство 10 следва, че кривата $\Omega(\vec{O})$ е парабола.

Последното свойство показва, че описаните около $\triangle ABC$ параболи приличат на описаната около $\triangle ABC$ елипса с център в точката G по това, че и в двата случая има само по една хомотетия преобразуваща описаната крива в съответната и Ойлерова крива.

Виждаме, че безкрайните точки също пораждат Ойлерови прави и Ойлерови криви (параболи) за даден триъгълник. В тези случаи обаче те са по-бедни на свойства, тъй като са свързани с описани около триъгълника параболи. Параболите заемат по-особено място в множеството на трите вида конични сечения по отношение на понятието център. Затова те придават тази си особеност и на разглежданите въпроси.

Направените изследвания показват, че с всяка крайна и всяка безкрайна точка O от равнината на даден триъгълник $\triangle ABC$, която не лежи на никоя от правите $BC, CA, AB, B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0$ и която е различна от медицентъра му G могат да се свържат Ойлерова права $l(O)$ и Ойлерова крива $\Omega(O)$. Правата $l(O)$ и кривата $\Omega(O)$ съвпадат с класическите точно, когато O е центърът на описаната около неравностраничен триъгълник ABC .

Литература

1. Г. Паскалев, И. Чобанов. Забележителни точки в триъгълника. Народна просвета, София, 1985.