ИЗСЛЕДОВАТЕЛСКИ ОРИЕНТИРАНО ОБУЧЕНИЕ С ТРАДИЦИОННИ СРЕДСТВА(*)

Боянка Савова,   Недялка Димитрова

Изследователски-ориентираното обучение (inquiry-based learning) по същество се вписва в класическия (сократов) модел на обучение [1]. У нас този подход е разработван доста отдавна, както в теоретичен, така и в приложен план (например [2],[3]). Доколкото напоследък той отново добива централно място в редица европейски образователни проекти, най-вече във връзка с новите технологии на обучение (ICT organized learning), считаме за полезно да обърнем внимание, че и традиционните (paper-and-pencil) форми не са изчерпали своя потенциал.

В учебниците и сборниците преобладават задачи, първите думи на които са *изчислете*, *намерете*, *пресметнете*, *докажете*. Разбира се, без такива задачи не може да се организира пълноценно обучение по математика. Но ако се ограничим само в тези рамки фактически не се доверяваме на учениците, че самостоятелно могат да достигнат до някакъв математически извод, не стимулираме творчеството и изследователските им способности. По-долу ще споделим нашия опит в организирането на изследователско търсене на учениците с помощта на две системи от задачи, свързани със съществуването на геометрична фигура, подчинена на дадени условия.

Първи срещи с изследователския подход учениците имат от непосредствен опит с построяване на реални обекти. Задачи 1 и 2 и производните им задачи са включени в рамките на занятие в школа с ученици от 5. клас, проявяващи повишен интерес към математиката.

Задача 1. Разполагаме общо с 5 клечки с дължини 1, 2, 3, 4 и 5. Колко различни триъгълника могат да се построят от тези клечки?

Коментар. Целта е учениците да почувстват, че не всеки набор от клечки ни осигурява триъгълник. В рамките на занятието на този подход се отделя до една четвърт от времето на занятието. Около 80% от учениците започавт да сглобяват триъгълници, като обикновено стартират с най-малката страна, а някои с най-голямата. Останалите хаотично изпробват различни възможности. Така експериментално те установяват, че съществуват само триъгълниците със страни (2; 3; 4), (2; 4; 5), (3; 4; 5). Пълен успех постига около 70% от групата, останалата част има частични постижения. ∇

Изследването продължава с опити да се установят начините за описване на различните триъгълници, например

Задача 1.1. Различават ли се триъгълниците със страни
(3; 4; 5) и (4; 3; 5)?

(*) Статията е на основата на доклада *Съществува ли триъгълник*, изнесен от авторките на семинара *Дидактическо моделиране* и е под редакцията и с допълнения на Борислав Лазаров

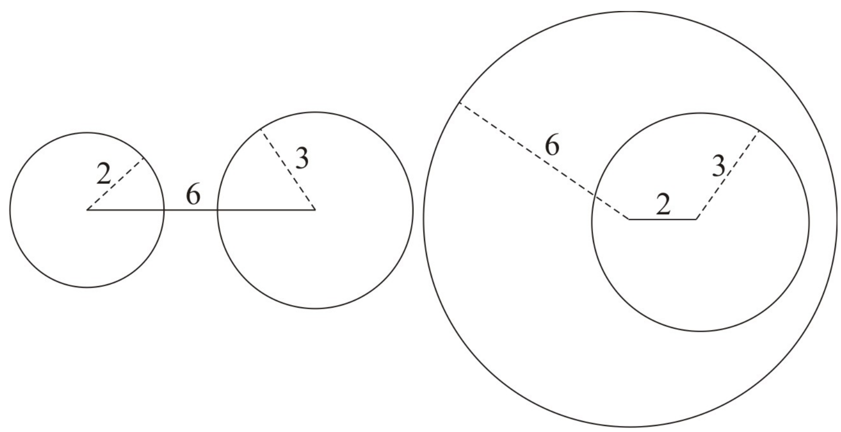
Задача 2. Възможно ли е да се начертае триъгълник със страни 2 см, 3 см и 6 см?

Коментар. В рамките на занятието на тази задача се отделя около една четвърт от времето. Учениците изследват връзката между дължините на дадените отсечки и възможността те да са страни на триъгълник. Очаква се те:

- да се ориентират във връзките между най-голямата и останалите страни;
- да почувстват, че не всеки набор от клечки ни осигурява триъгълник.

Учениците се опитват да построят с линийка и пергел такъв триъгълник. Обикновено първо начертават страната с дължина 6 см, след това с пергела описват окръжностите, показани на чертежа.

След неуспеха на построението по този начин, някои ученици опитват отново, този път започвайки с най-малката страна. Вътрешно, обаче, повечето са убедени, че и такъв опит няма да успее. Въпреки това, една малка част опитват и построение, започвайки със страната 3 см. В крайна сметка всички са убедени, че не съществува триъгълник с посочените дължини на страните. ∇



За домашна работа на учениците се предлага следната

Задача 2.1. Възможно ли е да се начертае триъгълник със страни 1 см, 3 см и 6 см?

На занятието изследването продължава със

Задача 2.2. Възможно ли е да се построи триъгълник със страни:
а) 2 см, 4 см и 6 см; б) 2 см, 5 см и 6 см?

Задачи 2 и 2.2 са включвани също в рамките на курсове с ученици от 7. клас, подготвящи се за изпит за езикови и математически гимназии. Там продължението е с групата задачи 3–7. Учениците са получили за самостоятелна работа в къщи

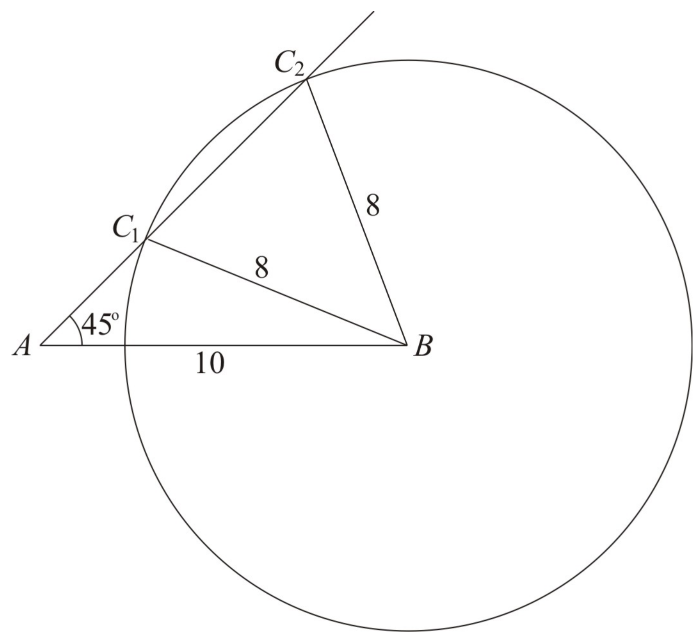
Задача 3. Да се построи с линийка и пергел $\triangle ABC$ по дадени страни $AB = 10$ см, $AC = 8$ см и $\sphericalangle BAC = 45^\circ$.

Коментар. С учениците се обсъжда I признак за еднаквост на триъгълници, който се предполага изучен в училище. ∇

На занятиеето се поставя

Задача 4. Да се построи с линийка и пергел $\triangle ABC$ по дадени страни $AB = 10$ см, $BC = 8$ см и $\sphericalangle BAC = 45^\circ$.

Коментар. В рамките на занятието на тази задача се отделя до 20% от времето. Първо се начертава страната AB, после $\sphericalangle BAC$, накрая окръжността $k(B; 8)$. Учениците установяват съществуването на две (различни) решения на задачата. Обсъжда се IV признак за еднаквост на триъгълници. ∇



За домашна работа се дава

Задача 4.1. Да се построи с линийка и пергел $\triangle ABC$ по дадени страни $AB = 10$ см, $AC = 8$ см и $\sphericalangle ACB = 45^\circ$.

Този подход дава дивиденти на учениците при явяване на конкурсни тестове. Следващите три задачи са от изпитни тестове след завършен 7. клас.

Задача 5. Периметърът на равнобедрен триъгълник, две от страните на който са 3,9 см и 7,9 см е ....

Коментар. Тук неявно се предполага изследване за съществуване на триъгълниците със страни (3,9; 3,9; 7,9) и (3,9; 7,9; 7,9). ∇

Задача 6. Дължините на страните на $ABCD$ са 2, 11, 6, 5. Ако дължината на BD е естествено число, то това число е ....

Коментар. Тук BD се оценява чрез неравенството на триъгълника за $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$ – неявно се предполага изследване за съществуване на тези триъгълници. ∇

Задача 7. Дължините на страните и на един от диагоналите на четириъгълник са 10, 20, 28, 50 и 75. Дължината на диагонала е ....

Коментар. Тук трябва да се съчетаят изследванията за съществуване на двата триъгълника, на които диагоналът разбива четириъгълника. Така се установява, че единствената възможна дължина на диагонала е 28. ∇

Задача 8. Двама футболисти се намират на 14 м един от друг. Те тръгват едновременно, движат се праволинейно и след t сек едновременно посрещат топката, хвърлена от вратаря. В какъв интервал се изменя t, ако скоростите на футболистите са съответно 3 м/сек и 4 м/сек?

Коментар. В тази целева група задачата може да се решава с изследване на въпроса за съществуване на триъгълник F_1F_2T със страни $F_1F_2 = 14$, $F_1T = 3t$, $F_2T = 4t$ (върховете на триъгълника $F_{1,2}$ и T съответстват на началното положение на футболистите и точката, в която посрещат топката). Системата неравенства $F_2T - F_1T < F_1F_2 < F_1T + F_2T$, т.е. $t < 14 < 7t$ ни дава $t \in (2; 14)$. Изследователска задача възниква при разглеждане на стойностите $t = 2$ и $t = 14$, които също са допустими, доколкото ситуацията не изключва колинеарност на $F_1,\ F_2$ и T.

Следващата система от задачи показва едно развитие на идея, възникнала от противоречиви данни в условието на задачи от известен сборник. Изследователско търсене възниква спонтанно в класа, но процесът се контролира и направлява от учителя. Задачите са разгледани в два последователни редовни учебни часа с ученици от 10 клас в НПМГ.

Задача 9. Намерете лицето на успоредник, страните на който са с дължини 3 и 1 и ъгълът между диагоналите е 45°. ([4] с. 157, зад. 21.72)

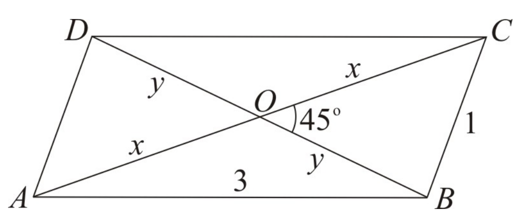
Коментар. Част от учениците решават задачата по следния начин:

От косинусовата теорема за $\triangle BCO$ и $\triangle ABO$ ($O = AC \times BD$), при $AC = 2x$, $BD = 2y$, получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy = 1 \\ x^2 + y^2 + \sqrt{2}xy = 9, \end{array} \right.$$

от която намираме

$$4 = \sqrt{2}xy = \frac{AC \cdot BD \sin 45^\circ}{2} = S_{ABCD}.$$



Когато някои ученици се опитват да намерят и дължините на диагоналите, от системата се стига до уравнението

$$x^4 - 5x^2 + 8 = 0,$$

което няма реални корени. Това означава, че успоредник с описаните свойства не съществувал Това дава начало на изследователско търсене – поставя се следната задача:

Задача 9.1. Намерете най-малката стойности на $\cos\varphi$, за която съществува успоредник със страни 3 и 1 и с остър ъгъл между диагоналите φ.

Коментар. По време на занятие в клас се установява, че $0,8 \leq \cos\varphi < 1$, като равенството се достига за успоредника със страни 3 и 1 и с най-голямо възможно лице – правоъгълникът със страни 3 и 1 (противоречието в задача 8. се обяснява от оценката $\cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 0,8$). За самостоятелна работа на малка група ученици се поставя задачата

Задача 9.2. Ако $\cos\varphi \in (0,8; 1)$, съществува ли успоредник, страните на който са с дължини 3 и 1 и острият ъгъл между диагоналите е φ?.

На занятие с учениците се разглежда и следната

Задача 9.3. Ъгълът между диагоналите на успоредника $ABCD$ е 45°. Ако $AB > BC$, определете в какъв интервал се намира отношението $AB : BC$.

Коментар. Заедно с учениците се стига до оценката $1 < \dfrac{AB}{BC} \leq \sqrt{2}+1$, като равенство се достига за правоъгълник (тук учениците намират още едно обяснение за дефекта в задача 7, понеже $\sqrt{2}+1 < 3$). За самостоятелна работа на друга малка група ученици остава задачата

Задача 9.4. Ако $1 < \dfrac{AB}{BC} < \sqrt{2}+1$, съществува ли успоредник $ABCD$, ъгълът между диагоналите на който е 45°?

От учениците се очаква да направят детайлно проучване на разгледаните в клас задачи, съответно 9.2 и 9.4, да анализират ситуацията и да отговорят на въпроса. На следващото занятие в клас тези групи ученици докладват своите резултати и споделят с останалите евентуални нови идеи за допълнително изследване.

Задача 10. Даден е ромб $ABCD$. Точката M е средата на страната AB. Намерете AC, ако $MD = 4$, $MC = 6$, $\sphericalangle DMC = 60^\circ$. ([4] с. 144, зад. 19.55)

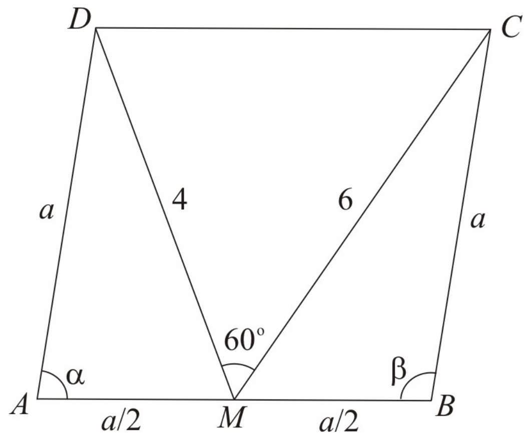
Коментар. За „намирането“ на AC неколкократно се прилага косинусовата теорема.

Например за $a = AB = AD,\ \alpha = \sphericalangle DAB,\ \beta = \sphericalangle ABC$:

— от $\triangle MBC$ се определя $\cos\beta = -\dfrac{1}{28}$, което дава $AC = \sqrt{58}$;

— от $\triangle AMD$ се определя $\cos\alpha = \dfrac{19}{28}$, което дава $AC = \sqrt{94}$.

Различните отговори са резултат от факта, че такъв ромб не съществува. ∇



Възникналото противоречие дава повод за формулиране на няколко изследователски задачи. С тях се процедира, както със задачите 9.1–9.4.

Задача 10.1. Даден е ромб $ABCD$. Точката M е средата на страната AB. Ако $MD = 4$, $MC = 6$, $\sphericalangle DMC = \varphi$, намерете $\cos\varphi$.

Отговор. $\cos\varphi = \dfrac{13}{20}$.

Задача 10.2. Точката M е средата на страната AB в ромба $ABCD$. Ако $\sphericalangle DMC = \varphi$, намерете интервала, в който се изменя $\cos\varphi$.

Коментар. Отговорът е $\cos\varphi \in [\dfrac{3}{5}; 1)$, като равенството се достига, точно когато ромбът е квадрат. Ромбът не съществува, доколкото $\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2} \notin [\dfrac{3}{5}; 1)$.

Задачи 9 и 10, заедно с произтичащите от тях изследователски ориентирани задачи, са разглеждани в рамките на едно занятие, като активно са включени 4 групи ученици, общо около половината ученици в класа. В тези групи, освен най-изявените, са включени и ученици с по-ниски резултати по математика. Ефектът от такова включване е обнадеждаващ. ∇

В заключение ще отбележим, че изследването на допустимите стойности на алгебрични изрази е стандартен апарат в курса по алгебра. Този апарат, обаче, дава изненадващо добри новаторски направления за преподаване в съчетание с геометрични идеи. При това, както може да се види от примерите, изследването на условията за съществуване на геометрична фигура с отнапред зададени свойства може да изпреварва изследването на допустими стойности на алгебрични изрази. Взаимодействието на компетентностите, получени в курса по алгебра, в геометрични задачи, от своя страна обогатява компетентностите, изграждани в курса по геометрия. Обратната връзка също е налице. В този ред на мисли изследовтелски ориентираното обучение спомага за изграждане на математически компетентности от синтетичен тип (synthetic competence [5]).

Допълнение

Към задача 9. Отговорът $S_{ABCD} = 4$ очевидно е неприемлив, понеже $S_{ABCD} \leq AB \cdot BC = 3$.

Към задача 9.1. При означенията от задача 9 имаме

$$(*)\qquad \left|\begin{array}{l} x^2+y^2+2xy\cos\varphi=9\\ x^2+y^2-2xy\cos\varphi=1,\end{array}\right.$$

Събираме почленно двете уравнения и получаваме $x^2+y^2=5$; изваждаме почленно двете уравнения и получаваме $\cos\varphi=\dfrac{2}{xy}\geq\dfrac{2}{x^2+y^2}=0,8$. Равенство се достига, точно когато $x=y$, т.е. за правоъгълник.

Към задача 9.2. Нека $\cos\varphi\in[0,8;1)$. Успоредникът $ABCD$ съществува, точно когато системата $(*)$ има решение. От $(*)$ последователно получаваме

$$\left|\begin{array}{l} x^2+y^2=5\\ xy=\dfrac{2}{\cos\varphi},\end{array}\right.\qquad \left|\begin{array}{l} (x+y)^2=5+\dfrac{4}{\cos\varphi}\\ (x-y)^2=5-\dfrac{4}{\cos\varphi},\end{array}\right.\qquad \left|\begin{array}{l} x+y=\sqrt{5+\dfrac{4}{\cos\varphi}}\\ |x-y|=\sqrt{5-\dfrac{4}{\cos\varphi}}.\end{array}\right.$$

Вече е ясно, че вторият радикал е определен, а тогава x и y също са определени.

Към задача 9.3. Нека $AB=a$, $BC=b$, $a>b$ (отново $AC=2x$, $BD=2y$). От косинусовата теорема за $\triangle ABO$ и $\triangle BCO$ ($O=AC\times BD$) имаме

$$(**)\qquad \left|\begin{array}{l} a^2=x^2+y^2+\sqrt{2}xy\\ b^2=x^2+y^2-\sqrt{2}xy,\end{array}\right.$$

откъдето последователно получаваме

$$a^2+b^2=2(x^2+y^2),$$

$$a^2-b^2=2\sqrt{2}xy\leq\sqrt{2}(x^2+y^2)=\frac{a^2+b^2}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{a^2}{b^2}\leq\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)^2.$$

Следователно $1<\dfrac{a}{b}\leq\sqrt{2}+1$. Равенство се достига, точно когато $x=y$, т.е. за правоъгълник.

Към задача 9.4. Нека $1<\dfrac{a}{b}\leq\sqrt{2}+1$. Ще установим, че в този случай системата $(**)$ има решение, което гарантира съществуването на успоредник $ABCD$, ъгълът между диагоналите на който е 45° От

$$\left|\begin{array}{l} x^2+y^2=\dfrac{a^2+b^2}{2}\\ xy=\dfrac{a^2+b^2}{2\sqrt{2}}\end{array}\right.$$

изразяваме

$$\left|\begin{array}{l} (x+y)^2=\dfrac{a^2(\sqrt{2}+1)-b^2(\sqrt{2}-1)}{2}\geq 0\\ (x-y)^2=\dfrac{a^2(\sqrt{2}-1)+b^2(\sqrt{2}+1)}{2}>0.\end{array}\right.$$

Вече е ясно, че $x+y$ и $|x-y|$ са определени, а тогава и x и y са определени.

Към задача 10. Това, че геометричната конструкция не е възможна, става ясно от пресмятането на дължината на страната на ромба веднъж чрез страната CD в $\triangle CDM$: $a^2=CD^2=28$; втори път чрез медианата през M в същия триъгълник: $a^2 = AD^2 = m_M^2 = 19$. Всъщност, отново задачата опира до изследване на система $\left| \begin{array}{l} x^2+y^2-xy=a^2 \\ x^2+y^2+xy=4a^2, \end{array} \right.$ в която $x = MD,\ y = MC$.

Към задача 10.1. От косинусовата теорема за $\triangle AMD$ и $\triangle BMC$ имаме

$$\left| \begin{array}{l} 16 = \dfrac{5}{4}a^2 - a^2\cos\alpha \\ 36 = \dfrac{5}{4}a^2 + a^2\cos\alpha, \end{array} \right.$$

откъдето последователно получаваме

$$a^2 = \frac{104}{5},\ \ \cos\alpha = \frac{13}{20} > \frac{1}{2} = \cos 60^\circ.$$

Към задача 10.2. За $x = MD,\ y = MC$ по косинусовата теорема за $\triangle AMD$ и $\triangle BMC$ имаме

$$\left| \begin{array}{l} x^2 = \dfrac{5}{4}a^2 - a^2\cos\alpha \\ y^2 = \dfrac{5}{4}a^2 + a^2\cos\alpha, \end{array} \right.$$

откъдето

$$x^2+y^2 = \frac{5}{2}a^2 \geq 2xy \iff xy \leq \frac{5}{4}a^2.$$

(Равенство се достига, точно когато $x = y$, т.е. когато $ABCD$ е квадрат.) Сега по косинусовата теорема за $\triangle DCM$ имаме

$$\cos\varphi = \frac{x^2+y^2-a^2}{2xy} = \frac{\frac{5}{2}a^2-a^2}{2xy} \geq \frac{\frac{3}{2}a^2}{5a^2} = \frac{3}{5} > \frac{1}{2} = \cos 60^\circ,$$

което означава $\varphi < 60^\circ$.

Цитиране

[1] Андреев, М. Процесът на обучението. Университетско издателство *Св. Кл. Охридски*. София, 1996.

[2] Савова, Б. Условия за съществуване на геометрични фигури. Обучението по математика и информатика, бр. 1, 1989.

[3] Лазаров, Б. Доказателство чрез пример. Обучението по математика и информатика, бр. 1, 1993.

[4] Коларов, К., Хр. Лесов. Сборник от задачи по геометрия VII–XII клас. Изд. *Интеграл*, Добрич, 2004.

[5] Lazarov, B. Building Mathematics Competence via Multiple Choice Competitions. Journal of the Korean Society of Mathematical Education. Vol. 14. No. 1.