Бл. Димитровъ и Д-ръ Т. Дедовъ.

АЛГЕБРА

ЗА ПЪРВИ КЛАСЪ

НА

Мжжкитѣ и дѣвическитѣ пълни и непълни гимназии.

Поправено издание споредъ най-послѣдната програма, изработена отъ Висшия Учебенъ Съвѣтъ прѣзъ мѣсецъ юлий 1910 година.

Одобрена отъ Министерството на Народната Просвѣта съ заповѣдь № 2584 отъ 20 Августъ 1910 год.

Трето издание. **Цѣна 1·50 лева.**

СОФИЯ
Печатница П. Глушковъ
1910.

Прѣдговоръ къмъ третото издание.

Това издание се отличава отъ първитѣ двѣ издания по това, че е нагласено споредъ най-послѣдната учебна програма, приета отъ висшия учебенъ съвѣтъ въ сесията му прѣзъ това лѣто. За тая цѣль се изоставиха намиране на най-голѣмъ общъ дѣлитель чрѣзъ послѣдователно дѣление и дѣление многочленъ на многочленъ, а се въведоха степени съ показатель отрицателенъ и нула, биномъ отъ първа степень (понятие за функция) и пропорционални величини.

Съотвѣтни измѣнения се направиха и въ сборника за I класъ.

София, 25.VIII. 1910 год.

Съставителитѣ.

СЪДЪРЖАНИЕ.

Случайни важни опущения.

На стр. 66 (редъ 5 отгорѣ) и на страница 78 (редъ 24 отгорѣ и редъ 27 отгорѣ) думата **рационаленъ** да се изпусне.

Извлѣчение отъ програмата по математика, приета отъ висшия учебенъ съвѣтъ прѣзъ юлий 1910 г.

Класъ I.

А. Мжжка гимназия.

I. Реаленъ отдѣлъ.

Алгебра.

Рационални цѣли и дробни абсолютни числа и дѣйствия съ тѣхъ. Алгебрични числа и дѣйствия съ тѣхъ. Алгебрични изрази. Едночленъ и многочленъ; подобни едночлени. Събиране и изваждане едночлени и многочлени. Умножение на едночлени и многочлени; частни случаи отъ умножение на многочлени. Дѣление на едночлени, понятие за нулевъ и отрицателенъ показатель. Дѣление многочленъ на едночленъ; най-прости случаи отъ дѣление многочленъ на многочленъ и въ връзка съ това най-прости случаи отъ разлагане на множители. Намиране най-малко общо кратно на прости изрази чрѣзъ разлагане на множители. Алгебрични дроби.

Отношения и пропорции.

Уравнения отъ първа степень съ едно неизвѣстно (числени и буквени). Рѣшение на съставени уравнения и задачи съ условия за съставяне такива.

Измѣнения на двучлена $ax+b$. Неравенства отъ първа степень. Понятие на функция.

II. Полукласически отдѣлъ.

Сжщо както въ реалния отдѣлъ.

III. Класически отдѣлъ.

Алгебра.

Рационални цѣли и дробни абсолютни числа и дѣйствия съ тѣхъ. Алгебрични числа и дѣйствия съ тѣхъ. Алгебрични изрази. Едночленъ и многочленъ, подобни многочлени. Събиране и изваждане едночлени и многочлени. Умножение на едночлени и многочлени, частни случаи отъ умножение на многочлени. Дѣление на едночлени, понятие на нулевъ и отрицателенъ показатель. Дѣление многочленъ на едночленъ; най-прости случаи отъ дѣление многочленъ на многочленъ и въ връзка съ това най-прости случаи отъ разлагане на множители. Намиране най-малко общо кратно на прости изрази чрѣзъ разлагане на множители. Алгебрични дроби.

Отношения и пропорции.

Б. Дѣвическа гимназия.

I. Реаленъ отдѣлъ.

Сжщо както въ реалния отдѣлъ на мжжка гимназия.

II. Полукласически отдѣлъ.

Сжщо както въ класическия отдѣлъ на мжжка гимназия.

ГЛАВА I.

Цѣли числа и дѣйствия съ тѣхъ.

§ 1. Цѣли числа.

1. Натурални числа.

Редътъ на цѣлитѣ числа 1, 2, 3, 4, 5, ... се нарича *натураленъ* (естественъ) редъ на числата. Всѣко число отъ този редъ се нарича *натурално число* и се получава съ (изключение на първото) отъ прѣдилещето си число, като се притури къмъ него числото едно. Натуралниятъ редъ на числата нѣма послѣдно число, спр., редътъ е безкраенъ (защо?).

2. Бѣлѣжене на числата.

Числата се бѣлѣжатъ не само съ цифри (*частни числа*), но и съ буквитѣ на нѣкоя азбука (*общи числа*), напр., съ буквитѣ a, b, c, d, ... или A, B, C, D, ... или α, β, γ, δ . . . . Всѣка буква може да означава кое да е число, но въ дадена задача една и сѫща величина се бѣлѣжи винаги съ една и сѫща буква. Съ общитѣ числа се разсѫждава така, както и съ частнитѣ числа.

3. Равни и неравни числа.

Едно число може да бѫде *равно* на друго, *по-голѣмо* или пъкъ *по-малко* отъ него. За да покажемъ, че числото a е равно на числото b, пишемъ *равенството* $a=b$. Числата a и b, които съставятъ равенството, се наричатъ *страни* на равенството (a—лѣва и b—дѣсна страна). За да покажемъ, че е по-голѣмо a отъ числото b и c — по-малко отъ числото d, пишемъ *неравенствата* $a>b$ и $c<d$. Числата, които съставятъ неравенството, се наричатъ *страни* на

неравенството (a и c — лѣви; b и d — дѣсни страни) и по-малкото число се пише на върха на знака, а по-голѣмото — въ отвора му.

Знакътъ $=$ е въведенъ отъ английския математикъ Рекордъ (1552 г.), а знаковетѣ $>$ (по-голѣмо) и $<$ (по-малко) сѫ въведени отъ английския математикъ Харіотъ (XVII в.).

§ 2. Дѣйствия.

Отъ дадени нѣколко числа a, b, c . . . . може да се състави друго ново число; начинътъ, съ който се намира това число, се нарича дѣйствие, а новото число—резултатъ.

A. Събиране.

1. Опредѣления и означения.

Събирането е дѣйствие, по което отъ двѣ и повече числа се съставя трето число, което съдържа толкова единици, колкото съдържатъ даденитѣ числа заедно.

Ако даденитѣ числа сѫ *a* и *b* и третото число *c*, то пишемъ $a+b=c$. Числата *a* и *b* се наричатъ събираеми, а резултатътъ *c* — сума.

Знакътъ $+$ е въведенъ въ изчислението отъ германския математикъ Рудолфъ (XVI в.); прѣди него на мѣсто $+$ писали сѫ p.

Ако даденитѣ събираеми сѫ повече отъ двѣ, то събираме първото число съ второто: получения резултатъ съ третото; новия резултатъ — съ четвъртото и т. н. Такъво събиране се нарича послѣдователно събиране. Сумата на числата a, b, c, d, e се бѣлѣжи така

$$\{[(a+b)+c]+d\}+e,$$ дѣто знаковетѣ $\{\ \}$, $[\ ]$, $(\ )$,

които се наричатъ скоби, показватъ, че затвореното въ тѣхъ трѣбва да се смѣта като едно число. При послѣдователното събиране скобитѣ се изоставятъ. Така, намѣсто

$$\{[(a+b)+c]+d\}+e$$

пишатъ

$$a+b+c+d+e.$$

Скобитѣ сѫ въведени отъ холандския математикъ Жирардъ (1629 г.)

2. Свойства на сумата.

a). Сумата на двѣ и повече числа не зависи отъ реда, по който се събиратъ тѣзи числа. Така $a+b=b+a$, защото въ всѣка отъ сумитѣ $a+b$ и $b+a$ се съдържатъ всичкитѣ единици на числата *a* и *b*.

Примѣръ. $37+28=28+37=65$.

Това е комутативниятъ законъ на събирането.

b). Сумата на двѣ и повече числа се притуря къмъ нѣкое число, като се притурятъ къмъ това число събираемитѣ й едно слѣдъ друго въ произволенъ редъ.

Така, $a+(b+c)=(a+b)+c=(a+c)+b$.

Примѣръ. $50+(30+45)=(50+30)+45=(50+45)+30=125$.

Това е асоциативниятъ законъ на събирането.

c). Обратно, двѣ и повече числа се притурятъ къмъ нѣкое число, като се притури тѣхната сума къмъ това число. Така,

$$50+30+45=50+75=125.$$

B. Изваждане.

1. Опредѣления.

Изваждането е дѣйствие, при което сѫ дадени сумата на двѣ събираеми, едното отъ събираемитѣ и се търси другото събираемо.

Дадената сума се нарича умаляемо, даденото събираемо — умалитель и търсеното събираемо разлика или остатъкъ.

Ако дадената сума е *a*, даденото събираемо *b* и търсеното *c*, то пишемъ $a-b=c$.

Знакътъ $-$ (минусъ) е въведенъ отъ Рудолфъ (XVI в.), порано намѣсто него писали сѫ *m*.

Отъ опрѣдѣлението на дѣйствието изваждане слѣдва, че умаляемото е равно на умалителя, събранъ съ разликата, сир. $(a-b)+b=a$.

2. Свойства на разликата.

a). Дадена сума се изважда, като се извадятъ събираемитѣ й едно слѣдъ друго въ произволенъ редъ. Така,

$a-(b+c)=a-b-c=a-c-b$, защото, като съберемъ разликата съ умалителя, получаваме умаляемото.

Примѣръ. $50-(35+10)=(50-35)-10=(50-10)-35=5$.

b). Разлика се притуря, като се притури умаляемото и се извади умалителя, или като се извади умалителя (ако може) и се притури умаляемото. Така,

$a+(b-c)=a+b-c=a-c+b$[1].

Примѣръ. $35+(17-3)=35+17-3=35-3+17=49$.

c). Разлика се изважда, като се извади умаляемото (ако може) и се притури умалителя, или като се притури умалителя и се извади умаляемото. Така,

$a-(b-c)=(a-b)$[2] $+c=(a+c)-b$, защото разликата, като се събере съ умалителя $b-c$, дава умаляемото a.

d). Дадено число нѣма да се измѣни, ако притуримъ къмъ него и слѣдъ това извадимъ едно и сѫщо число. Така,

$a+b-b=a-b+b=a$.

C. Умножение.

1. Опрѣдѣления и означения.

Да се умножи числото a на числото b, ще рече, числото а да се повтори b пѫти като събираемо. Числото a се нарича множимо, числото b—множител, а резултатътъ — произведение. Отъ тукъ: произведение е сума отъ равни събираеми. Произведението на числата a и b се бѣлѣжи така:

$a\times b$, $a\,.\,b$, ab.

[1] $a>c$.

[2] $a>b$.

Тѣзи означения сѫ въведени въ математиката въ XVII в. I-о отъ Утрехтъ, II-о отъ Лейбницъ, III-о отъ Хариотъ. Послѣдното означение се употрѣбява, когато и двѣтѣ дадени числа или пъкъ само едното отъ тѣхъ сѫ означени съ букви.

Отъ опрѣдѣлението слѣдва:

$a\,.\,2=a+a$,

$a\,.\,3=a+a+a$,

$a\,.\,4=a+a+a+a$,

$$a\,.\,b=\overbrace{a+a+a+\ldots\ldots+a}^{b\text{ пѫти}}.$$

Ако множимото е=1, произведението е равно на множителя.

$1\,.\,5=1+1+1+1+1=5$

$$\text{и } 1\,.\,a=\overbrace{1+1+1+\ldots+1}^{a\text{ пѫти}}=a.$$

Ако множительтъ е=1, произведението е равно на множимото.

$a\,.\,1=a$.

Ако множимото (или множительтъ) $=0$, произведението е $=0$.

$a\,.\,0=0$ и $0\,.\,a=0$,

и обратно, едно произведение е равно на нула, когато или множимото или множительтъ е равенъ на нула.

Знакътъ 0 (нула), съ който означаваме, че липсватъ единици отъ извѣстенъ редъ, е въведенъ отъ индийцитѣ, у които окрѫжностьта е служила, като символъ на празднина. Арабитѣ и до днесь употрѣбяватъ . (точка) намѣсто 0 (нула).

Произведение на повече отъ двѣ числа наричаме числото, което се получава, като се умножи първото число съ второто: получения резултатъ съ третото; получения резултатъ съ четвъртото и т. н. Такъво едно умножение се нарича послѣдователно умножение. Ако даденитѣ числа сѫ a, b, c и d, то послѣдниятъ резултатъ се бѣлѣжи така:

$[(ab)\,c]\,d$.

При послѣдователното умножение скобитѣ се изоставятъ. Така, намѣсто $\Big[(ab)c\Big]d$, пишатъ $abcd$.

2. Произведение на суми и разлики.

a). Сума се умножава съ нѣкое число, като се умножатъ събираемитѣ й съ това число. Така, $(a+b)c=ac+bc$.

Защото

$$(a+b)c=\overbrace{(a+b)+(a+b)+\ldots+(a+b)}^{c\ \text{пѫти}}=$$

$$=\overbrace{a+b+a+b+\ldots a+b}^{c\ \text{пѫти}}=\overbrace{a+a+a+\ldots+a}^{c\ \text{пѫти}}+\overbrace{b+b+b+\ldots+b}^{c\ \text{пѫти}}=ac+bc.$$

Примѣръ. $(25+35).5=25.5+35.5=125+175=300$.

Това е дистрибутивниятъ законъ на умножението.

b). Разлика се умножава съ нѣкое число, като се умножатъ умаляемото и умалителя съ това число. Така,

$(a-b)c=ac-bc$, защото

$$(a-b)c=\overbrace{(a-b)+(a-b)+\ldots+(a-b)}^{c\ \text{пѫти}}=$$

$$\overbrace{a+a+\ldots+a}^{c\ \text{пѫти}}-(\overbrace{b+b+b\ldots+b}^{c\ \text{пѫти}})=ac-bc.$$

Примѣръ. $(25-15).3=25.3-15.3=75-45=30$.

c). Сума се умножава на сума, като се умножи всѣко число отъ едната сума съ всѣко число отъ другата сума. Така, $(a+b).(c+d)=ac+bc+ad+bd$, защото $(a+b)(c+d)=(a+b)c+(a+b)d=ac+bc+ad+bd$.

Примѣръ. $25.36=(20+5)(30+6)=20.30+5.30+20.6+5.6=600+150+120+30=900$.

3. Свойства на произведението.

a). Произведението на двѣ числа нѣма да се измѣни, ако множимото вземемъ за множи-

тель и множителя за множимо. Така, $ab=ba$, защото

$$ab=\overbrace{(1+1+1+\ldots+1)}^{a\ \text{пѫти}}.b=$$

$$\overbrace{b+b+b+\ldots+b}^{a\ \text{пѫти}}=ba.$$

На това основание множимото и множителя се наричатъ производители или множители на произведението.

Примѣръ. $5.7=7.5$.

Това е комутативниятъ законъ на умножението.

b). Дадено число се умножава съ произведението на двѣ дадени числа, като се умножи най-напрѣдъ съ първото отъ тия числа и полученията резултатъ се умножи съ второто число.

Така, $a(bc)=(ab)c$, защото

$$a(bc)=a(\overbrace{b+b+\ldots+b}^{c\ \text{пѫти}})=$$

$$=\overbrace{ab+ab+\ldots ab}^{c\ \text{пѫти}}=(ab)c.$$

Примѣръ. $5.(2.6)=(5.2).6=60$.

Това е асоциативниятъ законъ на умножението.

c). Послѣдователното умножение съ двѣ числа може да се замѣни чрѣзъ умножение съ произведението на тия числа.

Така. $a.b.c=a(bc)$.

Примѣръ. $26.25.4=26(25.4)=26.100=2600$.

Послѣднитѣ двѣ свойства сѫ въ сила и за произведения отъ произволно число множители.

d) Редътъ на послѣдователнитѣ умножения е произволенъ. Така $abcdef\ldots=afdbce\ldots$

Примѣръ. $125.375.4.8=(125.4)(375.8)$
$=500.300=15000$.

4. Изваждане на общъ множитель извънъ скоби.

Понеже $(a+b+c)d=ad+bd+cd$,

то и $ad+bd+cd=(a+b+c)d=d(a+b+c)$,

спречъ, ако събираемитѣ на една сума иматъ общъ множитель, то този множитель може да се извади извънъ (прѣдъ или задъ) скоби. Такава една замѣна на сума отъ произведения съ едно само произведение се нарича изваждане на общъ множитель извънъ скоби.

Примѣри.

1. $19.58+27.58+24.58=(19+27+24).58.$
2. $5x+7x+9x=(5+7+9)x=21x.$
3. $2x+4x+2x+8n+5n=(5+4+2)x+(8+$ $+5)n=11x+13n.$

5. Коефициентъ.

Произведенията $a.2$; $a.3$; $a.4$; . . . . . могатъ се замѣни съ 2a. 3a, 4a, ... (комутативенъ законъ). Цифрениятъ множитель, който стои прѣдъ буквения, се нарича коефициентъ на буквения множитель. Така, въ сумата

$$2a+3c+5x+1h$$

коефициентитѣ сж: 2 на a, 3 на c, 5 на x и 1 на h. Коефициентътъ 1, обикновено, не се пише.

Д. Дѣление.

1. Опрѣдѣления и означения.

Дѣлението е дѣйствие, при което сж дадени произведението на 2 множителя, единъ отъ множителитѣ и се дири другия множитель. Даденото произведение се нарича дѣлимо, даденията множитель — дѣлитель, а множительтъ, който се дири — частно. Ако a е дѣлимото, b — дѣлительтъ и c частното, то

$$a:b=c, \text{ или } \frac{a}{b}=c.$$

, Първото означение е въведено отъ Лейбницъ, а второто се срѣща у Леонардо Пиза, познатъ подъ името Фибоначи (XIII в.)

Отъ опрѣдѣлението слѣдва, че $a=bc$, т. е., дѣлимото е равно на дѣлителя умноженъ съ частното.

Ако $\frac{a}{b}$ е означеното частно на числата a и b, то $\frac{a}{b}\cdot b=a$.

2. Свойства на частното.

a). Едно число се раздѣля съ произведението на двѣ числа, като се раздѣли съ едното отъ тѣзи числа и получения резултатъ се раздѣли съ другото число. Така, $a:(bc)=(a:b):c=(a:c):b$, защото частното умножено съ дѣлителя, дава дѣлимото.

$$[(a:b):c]\,bc=\{[(a:b):c]\,c\}\,b=(a:b)\,b=a.$$

Примѣръ. $70:(7.5)=(70:5):7=(70:7):5=2.$

b). Произведение на двѣ и повече числа се раздѣля съ нѣкое число, като се раздѣли единъ кой и да е отъ множителитѣ му на това число. Така, $(ab):c=(a:c).b=a(b:c)$, защото $[(a:c).b].c=\{(a:c).c\}b=ab.$

Примѣръ. $(21.14):7=(21:7).\ 14=21.(14:7)=$ $=21.2=42.$

c). Едно число нѣма да се измѣни, ако го умножимъ и раздѣлимъ съ едно и сжщо число.

Това слѣдва отъ равенството $\frac{a}{b}\cdot b=a.$

Е. Степенуване.

1. Опрѣдѣления и означения.

Степень е произведение отъ равни множители. Напр., $a.a$; $b.b.b$; $c.c.c.c.$, и т. н. сж степени. За краткость, степеньта се бѣлѣжи съ двѣ числа: съ основа — това е числото, що се повтаря за множитель и съ показатель — това е числото, що показва, колко пжти основата се повтаря като множитель. Така степеньта $\overbrace{a.a.a...a}^{n \text{ пѫти}}$ се бѣлѣжи съ a^n и се изговаря *a* степенувано на *n*. Тукъ основата е *a* и показательтъ *n*.

Примѣръ. 3.3.3.3 е степень, която за краткость се бѣлѣжи съ 3^4, дѣто основата е 3 и степениятъ показатель 4; тази степень е равна на 81.

Степень съ показатель 1 е равна на основата. Напр. $a^1=a$; $7^1=7$. Степениятъ показатель 1 не се пише. Степень съ показатель 2 се нарича квадратъ, съ показатель 3 — кубъ, съ показатель 4 — биквадратъ. Основата на степеньта и показателя си размѣнятъ мѣстата, безъ да се измѣни степеньта, само въ единъ случай: $2^4=4^2$; въ всѣки другъ случай

$$a^n \gtrless n^a.$$

По-рано (Михайлъ Штифелъ) сѫ писали 1.a, 1.a.a, 1.a.a.a и т. н. вмѣсто a, a^2, a^3. Сегашното означение е въведено отъ Ларошъ (1520 г.) и е разпространено отъ Декартъ (1590—1650 г).

2. Свойства на степеньта.

a) Степени съ обща основа се умножаватъ, като се напише общата основа съ показатель, равенъ на сумата отъ показателитѣ.

Така, $a^m. a^n.=a^{m+n}$, защото

$$a^m. a^n = \overbrace{a.a.a...a}^{m \text{ пѫти}} \; \overbrace{a.a.a...a}^{n \text{ пѫти}} = \overbrace{a.a....a}^{m+n \text{ пѫти}} = a^{m+n}$$

Примѣри. a) $3^2.3^4.=3^6$. b) $(x+z)^4.(x+z)^6=(x+z)^{10}$.

Това е повторителниятъ законъ или законътъ на показателитѣ при степенуването.

b) Степени съ обща основа се дѣлятъ, като се напише общата основа съ показатель, равенъ на разликата отъ показателитѣ на дѣлимото и дѣлителя, при условие, че тази разлика е възможна. Така,

$a^m: a^n=a^{m-n}$ защото $a^{m-n}\, a^n=a^{(m-n)+n}=a^m$ $(m>n)$.

Ако $m=n$, то $a^m:a^m=1$.

c). Произведение се степенува, като се

степенуватъ по отдѣлно множителитѣ му. Така,

$(ab)^5=a^5.\,b^5$, защото

$$(ab)^5=(ab)(ab)(ab)(ab)(ab)=ab.ab.ab.ab.ab=$$
$$=a.a.a.a.a.b.b.b.b.b.=a^5b^5.$$

Примѣръ. $(5.7)^2=5^27^2$.

Обратно, $a^5b^5=(ab)^5$ и $5^27^2=(5.7)^2$ и т. н.

d). Степень се степенува, като се умножатъ показателитѣ. Така, $(a^2)^3=a^6$, защото $(a^2)^3=a^2a^2a^2=a^{2+2+2}=a^6$.

Обратно, $a^{bc}=(a^b)^c=(a^c)^b$, отъ което пъкъ слѣдва, че редътъ на послѣдователнитѣ степенувания е произволенъ.

F. Прави и обратни дѣйствия.

1. Опредѣления.

Събирането, умножението и степенуването се наричатъ прави дѣйствия, а изваждането, дѣлението и още други двѣ дѣйствия (кореннуване и логаритмуване), за които ще говоримъ по-нататъкъ, — обратни дѣйствия. При послѣднитѣ дѣйствия, по даденъ резултатъ и едно отъ даденитѣ числа на правото дѣйствие, търси се другото дадено число.

2. Прави дѣйствия.

При дѣйствието събиране събираемитѣ изобщо сѫ различни едно отъ друго. Ако събираемитѣ сѫ равни, имаме умножение. Ако множителитѣ на едно произведение сѫ равни, имаме степенуване. Отъ събирането произлиза умножението, а отъ умножението — степенуването.

3. Обратни дѣйствия.

Ако сѫ дадени сумата на двѣ събираеми и едното събираемо и се търси другото събираемо, имаме изваждане; затова изваждането е обратно дѣйствие на събирането

Ако сѫ дадени произведението на двѣ числа и единъ отъ множителитѣ и се търси другия множитель, имаме дѣление. Дѣлението е обратно дѣйствие на умножението.

Ако сѫ дадени степеньта и показателя ѝ и се търси основата — имаме коренуване.

Ако сѫ дадени степеньта и основата ѝ и се търси показателя— имаме логаритмуване.

Коренуването и логаритмуването сѫ обратни дѣйствия на степенуването.

На събирането и умножението отговаря по едно обратно дѣйствие, понеже сѫ комутативни дѣйствия; напротивъ на степенуването отговарятъ двѣ обратни дѣйствия: коренуване и логаритмуване, защото степенуването не е комутативно дѣйствие.

ГЛАВА II.

Най-голѣмъ общъ дѣлитель и най-малко общо кратно.

§ 3. Опрѣдѣления.

1. Ако a, дѣлено на b, дава частно q, т. е., ако $a=bq$, то казватъ, че a е кратно на b. Въ този случай числото b се нарича дѣлитель на числото a. Така, 38 е кратно на 2 и 19, защото $38:2=19$ и $38:19=2$. Числата 2 и 19 сѫ дѣлители на 38.

Ако a не е кратно на b, то при дѣлението се получава частно q и остатъкъ $r<b$. Въ този случай

$$a=bq+r.$$

Числото q се нарича непълно частно.

Така, $27:7=3+$ост. 6, или $27=3.7+6$; тукъ непълното частно е 3.

2. Числото, което дѣли нѣколко числа, се нарича общъ дѣлитель на тѣзи числа. Така, 12 е общъ дѣлитель на числата 36, 60 и 84.

Нѣколко дадени числа могатъ да иматъ много общи дѣлители. Така, числата 36, 60 и 84 иматъ за дѣлители 12, 6, 4, 3, 2. Най-голѣмиятъ отъ общитѣ дѣлители се нарича най-голѣмъ общъ дѣлитель.

3. Двѣ или повече числа, на които най-голѣмиятъ общъ дѣлитель е числото 1, се наричатъ взаимно-прости числа. Така 7 и 13; 28, 39 и 40 сѫ взаимно прости числа.

4. Числото, което се дѣли на нѣколко дадени числа, се нарича общо кратно на тѣзи числа. Така, 60 е общо кратно на числата 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30.

Нѣколко дадени числа могатъ да иматъ много общи кратни; така, 2, 3, 5 иматъ общи кратни: 30, 60, 90 и т. н. Най-малкото отъ общитѣ кратни на нѣколко числа се нарича *най-малко общо кратно* на тѣзи числа. Най-малкото общо кратно на 2, 3 и 5 е числото 30.

5. Число, що се дѣли само на 1 и на себе си, се нарича *първоначално* или *просто число*.

6. Всѣко число, което не е първоначално, се нарича *съставно* или *сложно число*. Всѣко съставно число може да се прѣдстави, като произведение отъ първоначалнитѣ си множители. Такъво едно прѣдставяне на съставното число се нарича *разлагане на първоначални множители*. Какъ става това разлагане и какъ се располага въ този случай дѣйствието може да се види отъ слѣдния примѣръ.

756	2
378	2
189	3
63	3
21	3
7	7
1	1

$756 = 2^2.\ 3^3.\ 7.$

§ 4. Най-голѣмъ общъ дѣлитель.

Най-голѣмия общъ дѣлитель на нѣколко дадени числа се намира, като се разложатъ дадени тѣ числа на първоначалнитѣ имъ множители и се състави произведение отъ общитѣ множители, взети съ най-малкия си показатель. Така, на числата $1620 = 2^2.\ 3^4.\ 5$; $6048 = 2^5.\ 3^3.\ 7$ най-голѣмъ общъ дѣлитель е $108 = 2^2.\ 3^3$.

§ 5. Най-малко общо кратно.

Най-малкото общо кратно на нѣколко дадени числа се намира, като се разложатъ даденитѣ числа на първоначалнитѣ имъ множители и се състави произведение отъ разнитѣ множители, взети съ най-голѣмия си показатель. Така, на числата.

$$150 = 2.\ 3.\ 5^2,$$
$$135 = 3^3.\ 5,$$
$$216 = 2^3.\ 3^3$$

най-малкото общо кратно е $2^3.\ 3^3,\ 5^2$.

Ако едно отъ даденитѣ числа е кратно на другитѣ, то това число ще бѫде общо кратно на даденитѣ числа.

Така, на 3, 4 и 12 най-малкото общо кратно е 12. Ако ли даденитѣ числа сѫ взаимно прости числа, то най-малкото имъ кратно е равно на тѣхното произведение. Така, на 2, 3 и 5 най-малкото общо кратно е 30.

ГЛАВА III.

Дробни числа и дѣйствия съ тѣхъ.

§ 6. Дробни числа.

1. Дробна единица и дробно число.

Ако раздробимъ единицата на нѣколко равни части, то всѣка отъ тия части се нарича *дробна единица*. Числото на дробнитѣ единици се нарича *дробь* или *дробно число*.

Напр., ако единицата е раздробена на 7 равни части, то всѣка часть е дробна единица, а една, двѣ и нѣколко дробни единици сѫ дроби или дробни числа.

Дробитѣ се бѣлѣжатъ съ 2 числа: съ *знаменатель*, който показва на колко части е раздѣлена единицата и съ *числитель*, който показва, колко такива части сѫ взети. Така, на дробьта $\frac{a}{b}$ числительтъ е a и знаменательтъ — b.

Числительтъ и знаменательтъ се наричатъ съ общо име *членове на дробьта*. Дробьта се нарича *правилна*, когато числительтъ е по-малъкъ отъ знаменателя и *неправилна*,—когато числительтъ е по-голѣмъ отъ знаменателя.

За разлика отъ дробнитѣ числа, на които основната единица е часть отъ цѣлата единица, натуралнитѣ числа, на които основната единица е цѣлата единица, се наричатъ *цѣли числа*. Цѣлитѣ и дробнитѣ числа се наричатъ съ едно име *рационални числа* Общиятъ видъ на рационалнитѣ числа е дробь, защото $a = \frac{an}{n}$ и отъ тукъ слѣдствието: *правилата на смѣтането съ цѣлитѣ и дробнитѣ числа сѫ едни и сѫщи*.

2. Нѣкои отъ свойствата на дробитѣ.

а) *Дробьта е означено частно*. Така $\frac{a}{b} = a : b$, защото да раздѣлимъ a, на b, ще рече, да раздѣлимъ послѣдователно всѣка отъ единицитѣ на a съ b; но $b^{\text{а}}$ часть на 1 е $\frac{1}{b}$ (§ 6,1); слѣдователно, $b^{\text{а}}$ часть на a единици ще е a пѫти по $\frac{1}{b}$ или дробьта $\frac{a}{b}$.

Спорeдъ това $\frac{a}{b}.b=a$ (§ 2, Д, 1).

На това основание, ако дѣлимото, дѣлено на дѣлителя, дава освѣнъ частно и нѣкой остатъкъ, то остатъкътъ се бѣлѣжи съ дробь, числительтъ на която е равенъ на остатъка, а знаменательтъ — на дѣлителя.

Примѣръ. $58:9=6+\frac{4}{9}$. Сѫщо: ако a, дѣлено на b, дава частно q и остатъкъ r, то $a:b=c+\frac{r}{b}$, отдѣто $a=(c+\frac{r}{b})\,b=bc+\frac{br}{b}=bc+r$.

b) **Дадена дробь не се измѣня** (измѣня се само видътъ ѝ), **ако умножимъ или раздѣлимъ членоветѣ ѝ съ едно и сѫщо число.** Така,

$$\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}\text{ и отъ тукъ }\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}\text{, защото }\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{b}.bm}{bm}=\frac{\left(\frac{a}{b}.b\right)m}{bm}=\frac{am}{bm}.$$

На първото свойство се основава привеждането на дробитѣ къмъ еднакъвъ знаменатель, а на второто — съкращаването имъ. При първото дѣйствие работимъ съ най-голѣмия общъ дѣлитель на членоветѣ на дробьта, а при второто — съ най-малкото общо кратно на знаменателитѣ.

7. Дѣйствия съ дробитѣ.

А. Събиране.

1. Опредѣления.

Да съберемъ двѣ и повече дроби ще рече да намѣримъ число, цѣло или дробно, което да сѫдържа толкова единици или части отъ единицата, колкото ги има въ даденитѣ дроби. Даденитѣ дроби се наричатъ **събираеми**, а резултатътъ **сума**.

2. Събиране на дроби.

Дроби съ еднакъвъ знаменатель се събиратъ, като се съберать числителитѣ имъ и подъ сбора се напише общия знаменатель; ако дробитѣ нѣматъ еднакъвъ знаменатель, привеждаме ги прѣдварително въ дроби съ еднакъвъ знаменатель и послѣ ги събираме. Така,

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b};$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{adf}{bdf}+\frac{cbf}{bdf}+\frac{ebd}{bdf}=\frac{adf+bcf+bde}{bdf}.$$

Примѣри. $\frac{3}{20}+\frac{5}{20}+\frac{9}{20}=\frac{3+5+9}{20}=\frac{17}{20}$.

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{7}+\frac{5}{8}=\frac{112}{168}+\frac{96}{168}+\frac{105}{168}=\frac{112+96+105}{168}=\frac{313}{168}.$$

3. Смѣсени числа.

Смѣсеното число, което е сборъ отъ цѣло число и дробь, може да се замѣни само съ дробь. Така,

$$a+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c},\text{ защото}$$

$$a+\frac{b}{c}=\frac{ac}{c}+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}.$$

Примѣръ. $5+\frac{3}{7}=\frac{5\,.\,7+3}{7}=\frac{38}{7}$.

4. Свойства на сумата.

Каквито свойства има сумата на цѣлитѣ числа, такива сѫщо свойства има и сумата на дробнитѣ числа. Доказателството е лесно.

В. Изваждане.

1. Опредѣление.

Изваждането е дѣйствие, при което сѫ дадени сумата на двѣ дроби и една отъ тѣзи дроби и се търси другата дробь.

Дадената сума се нарича умаляемо, дадената дробь — умалитель и търсената — разлика или остатъкъ.

2. Изваждане на дроби.

Дроби съ еднакъвъ знаменатель се изваждатъ, като се извади отъ числителя на умаляемото числителя на умалителя и се напише подъ разликата общия знаменатель; ако дробитѣ нѣматъ еднакъкъ знаменатель, привеждаме ги прѣдварително въ еднакъвъ знаменатель и послѣ ги изваждаме. Така,

$$\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}, \text{ защото}$$

$$\frac{a-b}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a-b+b}{c}=\frac{a}{c};$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}=\frac{ad-bc}{bd}.$$

Примѣри. $\frac{5}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5-3}{7}=\frac{2}{7};$

$$\frac{6}{7}-\frac{3}{4}=\frac{24-21}{28}=\frac{3}{28}.$$

3. Свойства на разликата.

Каквито свойства има разликата на цѣлитѣ числа, такива сѫщо свойства има и разликата на дробнитѣ числа. Доказателството е лесно.

C. Умножение.

1. Умножение на дробь съ цѣло число.

Да умножимъ дробь съ цѣло число ще рече да вземемъ дробьта толкова пѫти като събираемо, колкото единици има въ цѣлото число. Така,

$$\frac{3}{5}\cdot 4=\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}=\frac{12}{5};$$

$$\frac{a}{b}\cdot c=\overbrace{\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\ .\ .\ .+\frac{a}{b}}^{\text{c пѫти}}=\frac{\overbrace{a+a+a\ .\ .\ .+a}^{\text{c пѫти}}}{b}=\frac{ac}{b}.$$

Слѣдователно, дробь се умножава съ цѣло число, като се умножи съ цѣлото число числителя и подъ произведението се напише знаменателя.

2. Умножение на цѣло число съ дробь.

Да умножимъ цѣло число на дробь ще рече да раздѣлимъ цѣлото число на толкова равни части, колкото единици има въ знаменателя на дробьта и да вземемъ отъ тѣзи части толкова, колкото ги има въ числителя на сѫщата дробь.

Така,

$$a\times\frac{b}{c}=\frac{a}{c}\times b=\frac{ab}{c}.$$

Слѣдователно, цѣло число се умножава съ дробь, като се умножи цѣлото съ числителя и подъ произведението се напише знаменателя.

3. Умножение на дробь съ дробь.

Дробь се умножава на дробь, като се умножатъ по отдѣлно числителитѣ и знаменателитѣ и първото произведение се раздѣли на второто. Така,

$\frac{a}{b}\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$, защото $\frac{1}{d}$ отъ $\frac{a}{b}$ е равно на $\frac{a}{bd}$, а пъкъ $\frac{c}{d}$ = c пѫти повече отъ $\frac{1}{d}$, спр. $\frac{a}{bd}\cdot c=\frac{ac}{bd}$.

Примѣръ. $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7}=\frac{15}{28}.$

4. Произведение на нѣколко дроби.

Произведение на нѣколко дроби наричаме дробьта, която се получава, ако умножимъ първата дробь съ втората, получения резултатъ съ третата, новия резултатъ съ четвъртата и т. н. Така,

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}=\frac{ac}{bd}\cdot\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}.$$

5. Степенуване на дробь.

Дробь се степенува, като се степенуватъ членоветѣ ѝ.

Така, $\left(\frac{a}{b}\right)^5 = \frac{a^5}{b^5}$, защото $\left(\frac{a}{b}\right)^5 = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} =$

$$= \frac{a\,.\,a\,.\,a\,.\,a\,.\,a}{b\,.\,b\,.\,b\,.\,b\,.\,b} = \frac{a^5}{b^5}.$$

6. Свойства на произведението.

Каквито свойства иматъ произведенията на цѣлитѣ числа, такива сжщо свойства иматъ и произведенията на дробнитѣ числа. Доказателството е лесно.

D. Дѣление.

1. Опрѣдѣления.

Дѣлението е дѣйствие, при което сж дадени произведението на двѣ дроби, едната отъ тѣхъ и се търси другата. Даденото произведение се нарича **дѣлимо**, дадената дробь — **дѣлитель** и търсената дробь **частно**.

2. Дѣление на дробь съ цѣло число.

Дробь се дѣли на цѣло число, като се умножи знаменателя ѝ съ цѣлото число или, ако е възможно, като се раздѣли числителя ѝ съ това число. Така, $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$,

защото $\frac{a}{bc}\,.\,c = \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ и $\frac{a}{b} : c = \frac{a:c}{b}$, защото

$$\frac{a:c}{b}\,.\,c = \frac{(a:c)c}{b} = \frac{a}{b}.$$

Примѣръ. $\frac{12}{25} : 3 = \frac{12}{75} = \frac{4}{24}$, или $\frac{12}{25} : 3 = \frac{12:3}{25} = \frac{4}{25}$.

3. Дѣление на цѣло число съ дробь.

Цѣло число се дѣли на дробь, като се умножи цѣлото съ знаменателя и подъ произведението се напише числителя на дробьта. Така,

$$a : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}, \text{ защото } \frac{ac}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{acb}{bc} = a.$$

Примѣръ. $9 : \frac{4}{7} = \frac{9 \times 7}{4} = \frac{63}{4}$.

4. Дѣление на дробь съ дробь.

Дробь се дѣли на дробь, като се умножи числителя на дѣлимото съ знаменателя на дѣлителя и знаменателя на дѣлимото съ числителя на дѣлителя и се раздѣли първото произведение съ второто. Така,

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}, \text{ защото } \frac{ad}{bc}\cdot\frac{c}{d} = \frac{adc}{bcd} = \frac{a}{b}.$$

Примѣръ. $\frac{5}{7} : \frac{3}{4} = \frac{5\,.\,4}{3\,.\,7} = \frac{20}{21}$.

Освѣнъ това, ако е възможно, дробь се дѣли на дробь, като се раздѣли числителя на дѣлимото съ числителя на дѣлителя и знаменателя на дѣлимото съ знаменателя на дѣлителя.

Примѣръ. $\frac{8}{15} : \frac{4}{5} = \frac{8:4}{15:5} = \frac{2}{3}$.

5. Обратни числа.

Отъ частнитѣ $\frac{a}{b} : 1$ и $1 : \frac{a}{b}$, отъ които първото е $= \frac{a}{b}$ и второто $= \frac{b}{a}$, едното се нарича **обратно число** на другото. Спорѣдъ това, обратното число на $\frac{5}{7}$ е $\frac{7}{5}$, на $\frac{3}{4}$ е $\frac{4}{3}$ и т. н.. Сжщото е и при цѣлитѣ числа; така, обратното число на 5 е $\frac{1}{5}$ и на $\frac{1}{5}$ е 5. Съ помощьта на обратнитѣ числа частното може да се замѣни съ произведение и произведението съ частно. Така, $5\,.\,\frac{1}{7} = 5 : 7$; $5 : \frac{1}{7} = 5\,.\,7$; $a\,.\,\frac{1}{b} = a : b$ и $a : \frac{1}{b} = ab$.

6. Десетични дроби.

Дробнитѣ единици, които се получаватъ отъ дѣлението на цѣлата единица на десеть сто, хиляда и пр. равни части, се наричатъ десетични дробни единици. Число, съставено отъ десетични дробни единици, се нарича десетична дробь.

Десетичнитѣ дроби сѫ въведени въ математиката отъ Stevin (1585 г.).

§ 8. Десетична бройна система.

Числата, именувани и написани по извѣстенъ законъ, съставятъ една нумерациона (бройна) система.

При нумерационитѣ системи се употрѣбяватъ единици отъ разни редове, отъ които всѣка съдържа единицата отъ прѣдидещия си редъ едно и сѫщо число пѫти.

При десетичната бройна система числото на единицитѣ отъ единъ редъ, нужно за да се образува една единица отъ най-близкия по горенъ редъ, е 10. Числото 10 се нарича основа на десетичната бройна система. Единицитѣ отъ първия редъ се наричатъ прости единици; десеть прости единици образуватъ една единица отъ втори редъ или десетица; десеть десетици образуватъ една стотица и т. н.

Като вървимъ отъ дѣсно къмъ лѣво, прѣминаваме отъ по-доленъ редъ къмъ по-горенъ, безъ да можемъ да достигнемъ до краенъ редъ.

Всѣка цифра има 2 значения: основно и редово. Основното значение показва броя на единицитѣ, отбѣлѣзани съ тази цифра, а редовото — значението ѝ въ зависимость отъ реда, дѣто е тя. Така, въ числото 256 основното значение на 5 е 5, а редовото — десетици. Понеже при прѣмѣстването на една цифра на единъ редъ отдѣсно на лѣво редовото ѝ значение се увеличава 10 пѫти, то при прѣмѣстването ѝ отъ лѣво на дѣсно на единъ редъ, редовото ѝ значение се намалява 10 пѫти.

Ако нѣкое число N съдържа a единици отъ първи редъ b — отъ втори, c — отъ трети, d — отъ четвърти и т. н., то, като сборъ отъ единици отъ първи редъ, това число може се написа така:

$$N = . \ . \ . \ . \ . + d.10^3 + c.10^2 + b.10 + a.$$

Примѣри.

$$7253 = 7.10^3 + 2.10^2 + 5.10 + 3,$$

$$50350 = 5.10^4 + 0.10^3 + 3.10^2 + 5.10 + 0.$$

При десетичнитѣ дроби десетата часть отъ основната единица образува единицата на съсѣдния по-доленъ редъ; тя се нарича десета; десетата часть на десетата образува единицата на съсѣдния ѝ по-доленъ редъ; тя се нарича стотна; десетата часть на стотната се нарича хилядна и т. н.

Разлика въ пишенето на цѣлитѣ числа и десетичнитѣ дроби нѣма; но за да се знае, коя часть отъ числото е цѣла и коя дробна, отдѣляме тѣзи части съ точка, наречена десетична точка. Точката се пише между редоветѣ на проститѣ единици и десетицитѣ.

Примѣръ.

$$7235{\cdot}84 = 7.10^3 + 2.10^2 + 3.10 + 5.1 + \frac{8}{10} + \frac{4}{10^2}.$$

Изобщо,

$$N = . \ . \ . \ . + d.10^3 + c.10^2 + b.10 + a + \frac{k}{10} + \frac{l}{10^2} + \ . \ . \ . \ .$$

дѣто a, b, c, . . . k, l сѫ цифри отъ десетичната система.

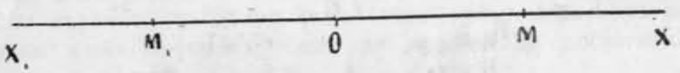
ГЛАВА IV.

Релативни числа и дѣйствия съ тѣхъ.

§ 9. Релативни числа.

1. Релативни величини.

Положението на точката M отъ правата XX_1 нѣма да бѫде опрѣдѣлено, ако се знае само разстоянието ѝ OM отъ друга една точка O на сѫщата права, защото на такъво сѫщо разстояние отъ O се намира и точката M_1; трѣбва слѣдов., да се каже още, дали M лежи на дѣсно или на лѣво отъ O.



Датата на едно събитие нѣма да бѫде опрѣдѣлена, ако се знае само числото на годинитѣ, които отдѣлятъ това събитие отъ друго, напр., отъ Р. Хр.; защото такива дати има двѣ: една прѣдъ Р. Хр. и друга слѣдъ Р. Хр.; трѣбва слѣдователно, да се каже още, дали събитието се е сбѫднало прѣди или слѣдъ Р. Хр.

Температурата нѣма да бѫде опрѣдѣлена, ако се знае само числото на градуситѣ ѝ, защото на това число съотвѣтствуватъ двѣ температури: едната надъ нулата и друга подъ нея; трѣбва слѣдов., да се каже още, дали градуситѣ сѫ отчетени надъ или подъ нулата.

Отъ тѣзи примѣри, а сѫщо и отъ много други, се вижда, че има величини, които могатъ да се мѣрятъ въ двѣ различни посоки; такива величини се наричатъ **релативни величини**.

2. Релативни числа.

Мѣрнитѣ числа на релативнитѣ величини трѣбва да бѫдатъ снабдени съ особени знакове, които да показватъ и

посоката на измѣрваната величина: за такива знакове се взиматъ пакъ знаковетѣ + и —, които сѫ знаковетѣ за събиране и изваждане. Спорѣдъ това, ако $+5^0$ означава 5^0 надъ нулата, то -5^0 ще означава 5^0 подъ нулата; ако + 200 год. означава 200 год. слѣдъ Р. Хр., то — 200 год. ще означава 250 год. прѣди Р. Хр.; ако + 50 м. означава разстояние отъ 50 м. на дѣсно отъ точка 0, която лежи на правата XX_1, то — 50 м., ще означава 50 м. на лѣво отъ 0; ако + 200 лв. означава печалба, то — 200 лв. ще означава 200 лв. загуба и пр. Различаваме, слѣдов., два вида числа: числа съ + (плюсъ) и числа съ — (минусъ) прѣдъ тѣхъ. Първитѣ числа ще наричаме **положителни**, а вторитѣ **отрицателни**. Положителнитѣ и отрицателнитѣ числа се наричатъ съ общо име **релативни или алгебрични числа**.

3. Абсолютна величина на алгебричното число. Равни и неравни алгебрични числа.

Алгебричното число, както казахме, се състои отъ аритметично число и отъ знакъ; аритметичното число, безъ знака му, се нарича **абсолютна величина** на алгебричното число.

Така, на +5 и — 5 абсолютната величина е 5.

Между алгебричнитѣ числа се брои и нулата, но прѣдъ нея, обикновено, не се пише никакъвъ знакъ.

Алгебричнитѣ числа, които иматъ равни абсолютни величини и еднакви знакове, се наричатъ **равни алгебрични числа**. Напр., + 5 и + 5, —3 и —3 сѫ равни алгебрични числа.

Алгебричнитѣ числа, които иматъ равни абсолютни величини, но различни знакове, се наричатъ **противоположни алгебрични числа**. Напр. +5 и —5 сѫ противоположни числа.

Названията **положителни** и **отрицателни** числа сѫ въведени най-напрѣдъ отъ Виетъ (I-а половина на XVI в.).

Карданъ е наричалъ отрицателнитѣ числа **фиктивни**, а положителнитѣ **сѫщински числа**. Декартъ е най-много спомогналъ за всеобщото употрѣбление на алгебричнитѣ числа. Изчисления съ числа, снабдени съ разни знакове, срѣщаме въ дрѣвностьта у Диофанта (V в. сл. Р. Хр.).

§ 10. Дѣйствия.

А. Събиране.

1. Векторъ.

Ако едно тѣло се движи по отсѣчката AB, то това тѣло може да измине пѫтя AB, като се движи по посока отъ A къмъ B, или пъкъ като се движи въ обратна посока;

и въ двата случая тѣлото ще измине единъ и сѫщъ пѫть.

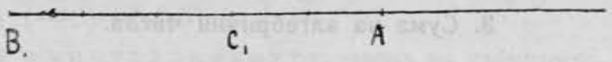
Но, за да знаемъ не само изминатата дължина, а още и посоката на движението, ще си послужимъ съ вектори.

Векторъ е дължина изходена по опредѣлена посока. Точката, отъ която тръгва тѣлото, се нарича *начало на вектора*, а точката, въ която пристига, — *край на вектора*. Ако векторътъ има посока отъ A къмъ B, означаватъ го съ $\overline{AB}$, а ако има посока отъ B къмъ A — съ $\overline{BA}$. Векторътъ, на който началото A се слива съ края B, е равенъ на нула (изминатиятъ пѫть е=0). Ако една отъ посокитѣ на правата вземемъ за положителна, другата тогава ще е отрицателна, то на вектора ще съотвѣтствува положително число, когато е изминатъ въ положителна посока и отрицателно — когато е изминатъ въ отрицателна посока. Ако посоката отъ A къмъ B вземемъ за положителна и мѣрното число на AB е=3, то векторътъ $\overline{AB}=+3$ и векторътъ $\overline{BA}=-3$. Изобщо, *на всѣки векторъ съотвѣтствува само едно съвсѣмъ опредѣлено алгебрично число. Обратно, на всѣко алгебрично число отговаря само единъ съвсѣмъ опредѣленъ векторъ.*

2. Сума на вектори.

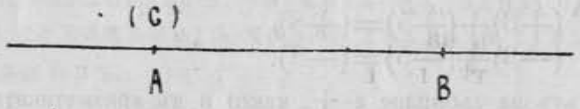
а). *Векторитѣ сѫ два.* Нека $\overline{AB}=+3$ и $\overline{BC}=-5$; подвижното тѣло тръгва отъ A, движи се на дѣсно, изминава 3 м. и стига въ B; повръща се назадъ, изминава 5 метра и стига въ C, на 2 м. на лѣво отъ A. Векторътъ

$\overline{AC}=-2$, който отдѣля точката на тръгването A отъ точката на спирането C, се нарича *сума* на векторитѣ $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$. Слѣдов., *сумата на два вектора е векторъ, на който началото е начало на първия векторъ, а краятъ му е край на втория векторъ.* Сумата на векторитѣ $\overline{AB}=+3$ и $\overline{BC}=-5$ може се намѣри и по другъ начинъ. Подвижното тѣло тръгва отъ A, движи се на лѣво, изминава 5 м. ($\overline{AB_1}=-5$), повръща се назадъ



изминава 3 м. ($\overline{B_1C_1}=+3$) и стига въ C_1 на 2 м. на лѣво отъ A. И въ двата случая векторитѣ сѫ едни и сѫщи $+3$ и -5 и сумата имъ е една и сѫща: $\overline{AC}=\overline{AC_1}=-2$. Слѣдов., *сумата на два вектора не зависи отъ реда, по който се изхождатъ тѣзи вектори.*

Ако $\overline{AB}=+3$ и $\overline{BC}=-3$, то $\overline{AB}+\overline{BC}=0$: тѣлото



тръгва отъ A, движи се на дѣсно, изминава 3 м. и стига въ B; повръща се назадъ, изминава пакъ 3 м. и стига въ A; спр. тамъ отъ дѣто бѣ тръгнало. Слѣдов., *сумата на два противоположни вектора е равна на нула.*

Тукъ резултатътъ ни посочва не изминатия пѫть, а разстоянието на което най-послѣ се намира подвижното тѣло отъ началото; физическата умора не се взима подъ внимание.

б) *Векторитѣ сѫ повече отъ два.* Нека $\overline{AB}=+3$, $\overline{BC}=-5$ и $\overline{CD}=+4$. Подвижното тѣло тръгва отъ A и се движи на дѣсно; изминава 3 м. и стига въ B; повръща се назадъ, изминава 5 м. и стига въ C; повръща се назадъ изминава 4 м. и стига въ D, на 2 м. отъ A. Векторътъ $\overline{AD}=+2$, който отдѣля точката на тръгването

отъ точката на стигането, се нарича *сума на векторитѣ* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$, изминати послѣдователно. И тукъ сумата е векторъ, на който началото е начало на първия векторъ и краятъ му — край на втория векторъ.

Намѣсто по този редъ, векторитѣ могатъ да бѫдатъ изминати и по другъ редъ; напр., по реда $+4, -5$ и $+3$; резултатътъ ще е пакъ сѫщия: $+2$. Слѣдов., сумата на нѣколко вектори не зависи отъ реда, по който се изхождатъ тѣзи вектори.

Сѫщото е и когато векторитѣ сѫ повече отъ три.

3. Сума на алгебрични числа.

Казаното за векторитѣ ни навожда къмъ слѣднитѣ опрѣдѣления.

a) Сумата на 2 числа съ еднакви знакове има знака на събираемитѣ си; абсолютната ѝ величина е = на сумата отъ абсолютнитѣ величини на тѣзи събираеми.

Примѣри.

$$(+3)+(+5)=(+8),$$
$$(-3)+(-5)=(-8).$$

Знакътъ за събиране е $+$, както и въ аритметиката, но за да не се смѣсва този знакъ и знакътъ $+$ за положителнитѣ числа, поставя се алгебричното число въ скоби.

b). Сумата на 2 числа съ различни знакове има знака на събираемото съ по-голѣмата абсолютна величина; абсолютната величина на сумата е = на разликата отъ абсолютнитѣ величини на събираемитѣ ѝ.

Примѣри.

$$(-3)+(+5)=(+2),$$
$$(+3)+(-5)=(-2).$$

c). Сумата на двѣ противоположни числа е=0.

Примѣри.

$$(+3)+(-3)=0.$$
$$(-3)+(+3)=0.$$

d). Ако едно отъ даденитѣ числа е = 0, то сумата е=на другото число.

Примѣри.

$$(+4)+0=(+4),$$
$$(-4)+0=(-4).$$

4. Свойства на сумата.

a). Сумата на 2 числа не зависи отъ реда, по който се събиратъ тѣзи числа.

Примѣръ.

$$(+5)+(-3)=(+2),$$
$$(-2)+(+5)=(+3).$$

Това е комутативниятъ законъ на събирането.

b). Сумата на нѣколко числа не зависи отъ реда, по който се събиратъ тѣзи числа.

Примѣръ.

$$(+2)+(-3)+(-5)=(-3)+(-5)+(+2)=$$
$$(-5)+(+2)+(-3)=(-6).$$

c). Нѣколко отъ числата на една сума могатъ да се замѣнятъ чрѣзъ тѣхната сума.

Примѣръ.

$$(+3)+(-5)+(-2)+(+7)=[(+3)+(-5)]+$$
$$[(-2)+(+7)=(-2)+(+5)=(+3).$$

Това е асоциативниятъ законъ на събирането.

d). Всичкитѣ положителни числа могатъ да се замѣнятъ чрѣзъ сумата имъ и всичкитѣ отрицателни числа — сѫщо чрѣзъ сумата имъ и така полученитѣ суми да се притурятъ една къмъ друга.

$$(+3)+(-5)+(-7)+(-3)+(+9)=[(+3)+(+9)]+$$
$$+[(-5)+(-7)+(-3)]=(+12)+(-15)=(-3).$$

Сумата на нѣколко алгебрични числа се означава още и като се напишатъ числата едно слѣдъ друго съ отличителнитѣ имъ знакове $+$ и $-$, като се изоставятъ скобитѣ и знака за събирането. Така, намѣсто $(+4)+(+5)+(-2)+(-3)$, пишатъ $+4+5-2-3$.

5. Примѣри за приходи и разходи.

Понеже приходитѣ на едно лице се притурятъ къмъ онова що има, а разходитѣ му се изваждатъ, то приходитѣ се зиматъ за положителни, а разходитѣ за отрицателни числа. Слѣдъ нѣколко операции, лицето ще узнае каква сума има, като притури алгебрично приходитѣ и разходитѣ къмъ първоначалния си капиталъ

а). Нѣкой си е ималъ наличность въ касата си 100 лв; слѣдъ това той е вписалъ въ книгитѣ си слѣднитѣ пера: $+12$, -25, $+7$, -50 лв.: колко лева има той слѣдъ това въ касата?

Той е ималъ 100 лева: притуря къмъ тѣхъ 12 лева и му ставатъ 112: изважда 25 лева и му оставатъ 80 лв.: притуря 7 лева и му ставатъ 94 лева; най-послѣ изважда 50 лева и му оставатъ 44 лева.

Правилото за събиране на алгебрични числа ни дава:

$$(+100)+(+12)+(-25)+(+7)+(-50)=+44;$$

спр. сѫщия резултатъ.

b). Нѣкой си е ималъ 100 лева, а платилъ за стока 125 лева. Колко лева му оставатъ още?

Той е ималъ 100 лева, а е изхарчилъ 125 лева, спр. изхарчилъ е 25 лева повече отъ това, що ималъ: слѣдов., той е задлъжнѣлъ съ 25 лева.

Правилото за събиране на релативни числа ни дава:

$$(+100)+(-125)=-25;$$

спр. сѫщия резултатъ.

c). Нѣкой си ималъ 25 лева дългъ; получилъ е 50 лева; колко лева има той слѣдъ това?

Съ полученитѣ 50 лева лицето изплаща дълга си отъ 25 лева и задържа оставалитѣ 25 лева; слѣдов., той ще има 25 лева.

Споредъ правилото за събиране на релативнитѣ числа, имаме:

$$(-25)+(+50)=+25;$$

спр. сѫщия резултатъ.

d). Нѣкой си е ималъ -25 лв.; слѣдъ това вписалъ въ книгитѣ си -10 лева; каква сума има той слѣдъ това вписване?

Лицето е имало 25 лв. дългъ; направило е още 10 лв. дългъ; слѣдов., той има 35 лв. дългъ, спр. -35 лв. Споредъ правилата за събиране на релативни числа, имаме:

$$(-25)+(-10)=(-35);$$

спр. сѫщия резултатъ.

Отъ провѣрката, която направихме при рѣшенитѣ погорѣ примѣри, става явно, че правилата за събирането на положителнитѣ и отрицателнитѣ числа даватъ резултати точни и напълно съобразни съ реалностьта.

В. Изваждане.

1. Опрѣдѣления.

Изваждането е дѣйствие, при което се дава сумата на двѣ числа, едно отъ числата и се дири второто число.

Дадената сума се нарича умаляемо, даденото число — умалитель и търсеното число — разлика или остатъкъ.

Това дѣйствие, което въ аритметиката не всѣки пѫть е възможно, тукъ, при релативнитѣ числа, е възможно всѣкога.

2. Разлика на двѣ релативни числа.

Разликата на двѣ релативни числа е = на сумата отъ умаляемото и противоположното число на умалителя. Така, ако b' е противоположното число на b, то $a-b=a+b'$,

защото $a+b'+b=a+(b'+b)=a+0=a$.

Примѣри.

$$(+4)-(+3)=(+4)+(-3)=(+1).$$
$$(-4)-(-3)=(-4)+(+3)=(-1).$$
$$(-2)-0=(-2)+0=(-2).$$

3. Противоположни суми.

Ако двѣ суми сѫ съставени отъ съотвѣтно противоположни събираеми, то двѣтѣ суми сѫ противоположни. Така, ако

$$S=(+3)+(-5)+(-9)+(+16),$$
$$S_1=(-3)+(+5)+(+9)+(-16),\text{ то}$$
$$S=[(+3)+(+16)]+[(-5)+(-9)]=(+19)+(-14)=(+5);$$
$$S_1=[(-3)+(-16)]+[(+5)+(+9)]=(-19)+(+14)=(-5);$$

спр. S и S_1 сѫ противоположни суми.

4. Изваждане на сума.

Сума се изважда, като се извадятъ събираемитѣ ӣ едно слѣдъ друго въ произволенъ редъ. Така,

$$a-(b+c+d)=a-b-c-d, \text{ защото}$$

$$a-(b+c+d)=a+(b'+c'+d')=a+b'+c'+d'=$$
$$=a+(-b)+(-c)+(-d)=a-b-c-d, \ (\S\ 10,\ 3).$$

5. Алгебрична сума.

Редъ отъ алгебрични числа, съединени съ знацитѣ $+$ и $-$, се нарича алгебрична сума. Така,

$$(+4)-(+2)+(-1)-(-12)$$

е алгебрична сума.

Числата, които съставятъ сумата, взети съ съотвѣтния имъ съединителенъ знакъ, се наричатъ членове на сумата. Така, членоветѣ на написаната сума сѫ:

$$+4,\ -(+2),\ +(-1),\ -(-12).$$

6. Свойства на алгебричната сума.

a). Всѣка алгебрична сума може да се прѣдстави като сума на алгебрични числа. Така,

$$(+4)-(+2)+(-1)-(-12)=(+4)+(-2)+(-1)+$$
$$(+12)=4-2-1+12.$$

Отъ това слѣдва, че всичкитѣ теореми за сумитѣ на алгебричнитѣ числа сѫ приложими и за алгебричнитѣ суми и затова:

b). Въ всѣка алгебрична сума можемъ да измѣнимъ реда на членоветѣ ӣ. Така,

$$a-b+c-d-e=-b+a-d-e+c= \ . \ . \ .$$

Знакътъ $+$ прѣдъ първия членъ не се пише.

c). Въ всѣка алгебрична сума можемъ да замѣнимъ нѣколко члена съ тѣхната сума. Така,

$$4+2-1+12-7=4+2+(-1+12-7)=4+2+4=10.$$

d). Алгебрична сума се притуря, като се притурятъ послѣдователно членоветѣ ӣ, взети съ знацитѣ си. Така,

$$a+(b-c-d)=a+b-c-d;$$
$$8+(15-6-2)=8+15-6-2.$$

e). Алгебрична сума се изважда, като се притурятъ послѣдователно членоветѣ ӣ, взети съ обратни знакове. Така,

$$a-(c-d+e)=a-c+d-e;$$
$$8-(3-5-7)=8-3+5+7.$$

7. Скоби.

Послѣднитѣ двѣ прѣдложения ни даватъ правила, за да можемъ да разкриваме и да въвеждаме скоби. Така, разликата

$$(a+b)-(c-d+e)$$

е равна на алгебричната сума

$$a+b-c+d-e.$$

Това прѣобразуване на първия изразъ въ втория е туй, що наричаме разкриване на скоби.

Обратно, ако втория изразъ:

$$a+b-c+d-e)$$

замѣнимъ съ първия:

$$(a+b)-(c-d+e),$$

то казваме, че въвеждаме скоби.

При разкриване или при въвеждане на скоби, ако прѣдъ скобитѣ има $+$, членоветѣ въ скобитѣ си запазватъ знацитѣ, ако ли има $-$, тѣзи членове измѣняватъ знацитѣ си.

Съ въвеждане или разкриване на скоби единъ изразъ може да се прѣобразува въ другъ и всѣка алгебрична сума може да се прѣдстави като разлика на двѣ суми съ положителни членове. Така,

$$3-2+5-6+15-8=3+5+15-2-6-8=$$
$$=(3+5+15)-(2+6+8).$$

8. Относителна величина на релативнитѣ числа.

Нека сѫ дадени двѣ алгебрични числа a и b, на които разликата $a-b$ не е нула. Ако разликата $a-b$ е положителна, казваме, че числото a е по-голѣмо отъ b; ако разликата $a-b$ е отрицателна, казваме, че числото a е по-малко отъ b.

Отъ това слѣдва:

a). Всѣко положително число е по-голѣмо отъ нула и отъ всѣко отрицателно число. Така, $(+14)$ е по-голѣмо отъ (-6), защото разликата $(+14)-(-6)$ е положително число.

$$(+14)-(-6)=(+14)+(+6)=(+20).$$

По тази причина $a > o$ означава, че a е положително число.

b). Всѣко отрицателно число е по-малко отъ нула и отъ всѣко положително число. Така, (-6) е по-малко отъ $(+2)$, защото $(-6)-(+2)=(-6)+(-2)=(-8)$ и (-6) е по-малко отъ 0, защото $(-6)-0=6+0=6$.

По тази причина $a < o$ означава, че a е отрицателно число.

c). Отъ двѣ положителни числа това е по-голѣмо, което има по-голѣма абсолютна величина.

d). Отъ двѣ отрицателни числа това е по-голѣмо, което има по-малка абсолютна величина. Така, (-7) е по-малко отъ (-3), защото

$$(-7)-(-3)=(-7)+(+3)=(-4).$$

9. Геометрично прѣдставяне на алгебричнитѣ числа.

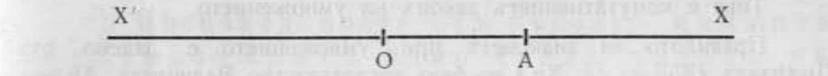
Като имаме прѣдъ видъ тѣзи теореми, лесно ще можемъ да наредимъ нѣколко дадени числа въ такъвъ редъ, щото всѣко число да е по-малко отъ всички числа, които стоятъ на дѣсно отъ него и по-голѣмо отъ всички числа, които сѫ на лѣво отъ него. Напр., числата

$$+4,-\frac{1}{3},+5,-12,+\frac{3}{2},\ 0,-6,-1$$

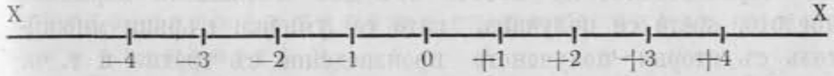
можемъ нареди така:

$$-12,-6,-1,-\frac{1}{3},\ 0\ ,\ \frac{3}{2},+4,+5.$$

Въ аритметиката най-малкото число е нулата и редътъ на аритметичнитѣ числа е неограниченъ само въ една посока: редътъ на алгебричнитѣ числа е неограниченъ въ двѣ посоки. За да прѣдставимъ реда на числата геометрично, нека земемъ неограничената права X′ X, като приемемъ посоката X′ X за положителна, а точката O на X′ X за постоянна.



На алгебричното число a ще съотвѣтствува само една точка A на X′ X, ако $\overline{OA}=a$. Ако A е на дѣсно отъ O, $\overline{OA}$ е положително. Когато числото a расте, точката A се мѣсти въ положителна посока; обратно, ако числото a намалява, точката A се мѣсти въ отрицателна посока. Слѣдователно, точката A може да се отдалечава отъ O неограничено и въ двѣтѣ посоки. Ако означимъ върху правата X′ X само точкитѣ, които съотвѣтствуватъ на цѣлитѣ числа, ще получимъ редъ точки, неограниченъ и въ двѣтѣ посоки.



C. Умножение.

1. Произведение на двѣ алгебрични числа.

Произведение на двѣ алгебрични числа наричаме числото, абсолютната величина на което е произведение отъ абсолютнитѣ величини на двѣтѣ числа, а знакътъ му е + или — споредъ това, дали двѣтѣ числа иматъ еднакви или различни знакове. Ако нѣкое отъ числата е нула, то и произведението е нула.

Умножаванитѣ числа се наричатъ множители на произведението.

Примѣри.

$$(+4) \cdot (+3) = +12,$$
$$(+4) \cdot (-3) = -12,$$
$$(-4) \cdot (+3) = -12,$$
$$(-4) \cdot (-3) = +12,$$
$$(+4) \cdot 0 = 0,$$
$$0 \cdot (-4) = 0.$$

Правило за знаковетѣ. Два еднакви знака даватъ $+$, два различни знака даватъ $-$.

Отъ опредѣлението и отъ правилото за знаковетѣ слѣдва, че ако a и b сж алгебрични числа, то $ab = ba$.

Това е комутативниятъ законъ на умножението.

Правилото за знаковетѣ при умножението е дадено отъ Диофантъ (355 г. сл. Хр.), но безъ доказателство. Великиятъ Айлеръ (1707 г.) въ своята алгебра дава слѣдното доказателство: $(-a)(-b)$ дава или $+ab$ или $-ab$; трети резултатъ не може да има. Резултатътъ не може да е $-ab$, защото това произведение произлиза или отъ $(-a)(+b)$, или отъ $(+a)(-b)$. Слѣдов. $(-a)(-b) = +ab$. Виждаме, че това не е вече доказателството на Крампъ въ неговата Arithmétique universelle, което гласи: Теоремата, спорѣдъ която произведението на два отрицателни множители е положително, се основава на познатото граматично правило: „двойното отрицание потвърдява“. Послѣдното доказателство не издържа сериозна критика.

2. Произведение на повече отъ два множители.

Произведение на повече отъ два множители наричаме числото, което се получава, като се умножи първия множитель съ втория, полученото произведение съ третия и т. н. Абсолютната величина на произведението е произведение отъ абсолютнитѣ величини на даденитѣ множители, а знакътъ му е $+$ или $-$ споредъ това дали броятъ на отрицателнитѣ множители е четно или нечетно число. Ако единъ отъ множителитѣ е нула, то и произведението е нула.

Примѣри.

$$(+3) \cdot (+2)(+5) \cdot (+7) = +210,$$
$$(+3) \cdot (-2)(-5) \cdot (+7) = +210,$$
$$(-3) \cdot (+2)(+5) \cdot (+7) = -210,$$
$$(-3) \cdot (+2)(-5) \cdot (-7) = -210,$$
$$(-3) \cdot (+2) \quad 0 \cdot (-7) = 0,$$
$$0 \cdot (+2)(-7) = 0.$$

3. Свойства на произведението.

Понеже абсолютната величина на произведението зависи само отъ абсолютнитѣ величини на множителитѣ, а знакътъ — само отъ числото на отрицателнитѣ множители, то, както и при абсолютнитѣ числа:

a). Произведението на нѣколко релативни множители независи отъ реда на умножаването на тия множители и отъ тукъ:

b). Послѣдователното умножение съ двѣ и повече числа може да се замѣни чрѣзъ умножение съ произведението на тѣзи числа.

c). Произведението отъ нѣколко множители се умножава съ едно число, като се умножи съ това число само единъ отъ тѣзи множители.

Примѣри.

1. $(+5) \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot (+7) = +420.$
2. $(+5) \cdot [(-4) \cdot (-3 \cdot (+7)] = (+5) \cdot (+84) = +420.$
3. $[(+5) \cdot (-4) \cdot (-3)] \, (+7) = (+35) \cdot (-4) \cdot (-3) = (+5) \cdot (-28) \cdot (-3) = +420.$

4. Умножение на алгебрична сума съ нѣкое число.

Алгебрична сума се умножава съ нѣкое число, като се умножи съ това число всѣки отъ членоветѣ й.

Понеже всѣка алгебрична сума може да се замѣни съ сума на алгебрични числа, то ще докажемъ теоремата за послѣднитѣ суми.

1. Сумата съдържа двѣ събираеми.

Ще докажемъ, че

$(b+c)\,a = a\,(b+c) = ab + ac$. Нека A, B и C сж абсолютнитѣ величини на a, b и c.

a). Ако b и c иматъ еднакви знакове, то и $(b+c)$ има сжщия знакъ; слѣдов., а $(b+c)$, ab и ac иматъ сжщо еднакви знакове; значи, че $a(b+c)$ и $ab+ac$ иматъ сжщо еднакви знакове. Остава да докажемъ, че $a\,(b+c)$ и $ab+ac$ иматъ равни абсолютни величини.

Абсолютната величина на $b+c$ е $B+C$, а на $a(b+c)$ е $A(B+C)$; сжщо абсолютната величина на $ab+ac$ е $AB+AC$, а знаемъ, че $A(B+C)=A.B+A.C$.

b). Ако b и c иматъ различни знакове и $B>C$, то $b+c$ има знака на b и $a(b+c)$ има знака на ab; освѣнъ това $A.B>A.C$ и $ab+ac$ има знака на ab; значи $a(b+c)$ и $ab+ac$ иматъ еднакви знакове. Остава да докажемъ, че $a(b+c)$ и $ab+ac$ иматъ равни абсолютни величини.

Абсолютната величина на $a(b+c) = A(B-C)$ и абсолютната величина на $ab+ac = AB-A.C$, а знаемъ, че $A(B-C)=A.B-A.C$.

Слѣдов., винаги: $a(b+c)=ab+ac$.

Примѣри. 1. $(5-8)(-3)=-15+24=+9$.
2. $(-12-31)(-5)=+60+155=215$.
3. $(-9+23)(+4)=-36+92=+56$.

Равенството $a(b+c)=ab+ac$ изразява така нарѣчения дистрибутивенъ законъ на умножението на релативнитѣ числа.

II. Сумата съдържа нѣколко събираеми.

Въ този случай

$$(a+b+c+d)m=(a+b+c)m+dm=(a+b)m+$$
$$+cm+dm=am+bm+cm+dm.$$

Примѣръ. $(-6+5-2+4)(-7)=+6.7-5.7+2.7-4.7$.

5. Умножение на алгебрични суми.

Двѣ алгебрични суми се умножаватъ, като се умножи всѣки членъ отъ едната сума съ всѣки членъ отъ другата сума.

Нека умножимъ сумитѣ $(a+b+c)$ и $(d+e)$. Считаме сумата $(d+e)$ за извършена, сир., като едно число и умножаваме, както и по-горѣ.

$$(a+b+c)(d+e)=a(d+e)+b(d+e)+c(d+e)=$$
$$=ad+ae+bd+be+cd+ce.$$

Примѣръ.

$$(4-3)(-6-1)=-4.6+3.6-4.1+3.1=$$
$$=-24+18-4+3.$$

6. Изваждане на общъ множитель извънъ скоби.

Понеже

$(a+b+c+d)m=am+bm+cm+dm$, то и

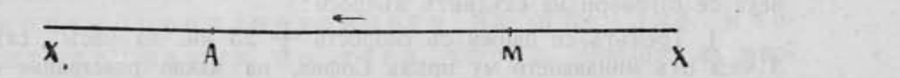
$am+bm+cm+dm=(a+b+c+d)m$: сир., ако членоветѣ на една сума сж произведения съ общъ множитель, то този множитель може да се извади извънъ скоби. Замѣната на сума отъ произведения съ едно само произведение се нарича изваждане на общъ множитель извънъ скоби.

Примѣри.

1. $3a+6a-7a=(3+6-7)a$.
2. $3a-2b+6a+5b-7a-8b=(3+6-7)a+(-2+5-8)b$.

7. Провѣрка на правилото за знаковетѣ.

Задача. Едно подвижно тѣло се движи по правата X_1X равномѣрно съ дадена скорость; въ даденъ моментъ то минава прѣзъ точката A на правата; кое мѣсто на правата заема това тѣло въ другъ даденъ моментъ? Рѣшение. Нека v е скоростьта на тѣлото сир., пжтьтъ изминатъ отъ него въ единица врѣме и нека тази ско-



рость е положителна, когато тѣлото се движи отъ лѣво къмъ дѣсно и отрицателна, когато се движи въ обратна посока. Нека t е врѣмето, което се съдържа между момента, когато тѣлото е минало прѣзъ точката A и момента на минаването му прѣзъ точката M, която се търси. Ще считаме врѣмето t за положително, ако тѣлото стига въ M, слѣдъ като мине прѣзъ A и за отрицателно — въ противенъ случай. Найпослѣ, нека означимъ съ x разстоянието AM; това разстояние е положително, когато M е на дѣсно отъ A и отрицателно, когато M е на лѣво отъ тази точка.

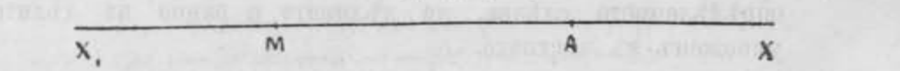
При тази задача различаваме четири различни случаи.

a) Тѣлото се движи по посоката X_1X и се търси мѣстото му слѣдъ t единици врѣме, считано отъ момента на минаването му прѣзъ A. Въ този случай v и t сж положителни и точката M, очевидно, е на дѣсно отъ A. Слѣдов., x е положителна величина.

$$x=vt=(+v).(+t).$$

b). Тѣлото се движи пакъ по посоката X_1X и се търси мѣстото му въ опрѣдѣлено врѣме t, но по-рано отъ онова на минаването му прѣзъ A. Въ този случай v е положително и t — отрицателно; точката M е на лѣво отъ точката A и слѣдов., x е отрицателна величина.

$$x=-vt==(+v).(-t).$$

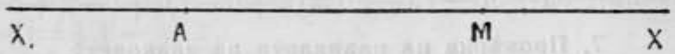


c). Тѣлото се движи по посоката XX_1 и стига въ M слѣдъ прѣминаването му прѣзъ A. Въ този случай v е отрицателно и t е

положително; x е отрицателна величина, защото M е на лѣво отъ A.

$$x = -vt = (-v) . (+t).$$

d). Тѣлото се движи по посоката XX_1 и стига въ M прѣди да мине прѣзъ A; x е положителна величина, защото M е на дѣсно



отъ A; v е отрицателна величина, а сѫщо и t. Слѣдователно,

$$x = +vt = (-v) . (-t).$$

Примѣри.

Едно лице пѫтува съ трена по желѣзнопѫтната линия Царибродъ—София—Пловдивъ; като се земе тази посока за положителна, нека се отговори на слѣднитѣ въпроси:

I. Тренътъ се движи съ скорость + 25 км. на часъ; слѣдъ 3 часа отъ минаването му прѣзъ София, на какво разстояние отъ София ще се намира това лице?

Отг. (+25). (+3)=+75 км.

II. Тренътъ изминава + 25 км. на часъ; 3 часа прѣди да замине прѣзъ София, на какво разстояние отъ София е било лицето? Отг. (+25). (—3)=—75 км.

III. Тренътъ се движи съ скорость—25 км. на часъ; слѣдъ 3 часа отъ минаванено му прѣзъ София, на какво разстояние отъ София е лицето? Отг. (—25) (+3)= —75 км.

IV. Тренътъ се движи съ —25 км. на часъ; 3 часа прѣди да стигне София, дѣ се намира лицето? Отг. (—25). (—3)=75 км.

D. Дѣление.

1. Опрѣдѣления.

Да дѣлимъ едно число на друго, ще рече да намѣримъ трето число, което умножено съ второто, да даде първото. Така, $(+12):(-4) = (-3)$, защото $(-3) . (-4) = (+12)$. Първото число се нарича дѣлимо, второто — дѣлитель и третото — частно. Отъ опрѣдѣлението слѣдва, че дѣлимото е равно на дѣлителя умноженъ съ частното.

2. Частно.

Абсолютната величина на частното на двѣ числа е частно на абсолютнитѣ величини на тѣзи числа; частното е положително, когато даденитѣ числа иматъ еднакви знакове и отрицателно, когато знаковетѣ на тѣзи числа сѫ различни. Това слѣдва отъ опрѣдѣлението на дѣлението.

Примѣри.

1). (—12):)—4) = (+3).
2). (—30):)+5) = (—6).
3). (+30):)—6) = (—5).

Частното a:b е възможно само тогава, когато b не е равно на нула; въ противенъ случай частното нѣма смисъль.

E. Степень на алгебрично число.

1. Опрѣдѣления.

Степень на едно алгебрично число се нарича произведението на нѣколко множители, равни на това число. Числото на множителитѣ се нарича показатель на степеньта, а множительтъ, който се повтаря, — основа.

Степеньта се бѣлѣжи, както и при абсолютнитѣ числа.

2. Знакъ за степенитѣ.

a). Степень, на която показательтъ е четно число, е положително число, защото тази степень е произведение отъ четно число множители съ еднаквъ знакъ.

Примѣри.

1). $(+3)^4 =)+3) . (+3) . (+3) . (+3) = (+81)$,
2). $(-3)^4 =)-3) . (-3) . (-3) . (-3) = (+81)$.

b). Степень, на която показательтъ е нечетно число, има знакъ еднаквъ съ знака на основата, защото, споредъ това дали даденото число е положително или отрицателно, тази степень е произведение отъ нечетно число положителни или отрицателни множители.

Примѣри.

1), $(+2)^3 = (+2) . (+2) . (+2) = (+8)$,
2). $(-2)^3 = (-2) . (-2) . (-2) = (-8)$.

3. Дѣление на степени съ еднакви основи.

Нека ни е дадено да раздѣлимъ a^m съ a^n. Тукъ могатъ се прѣдстави слѣднитѣ два случая:

a). $m>n$. Ако $m=n+p$, то

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^{n+p}}{a^n}=\frac{a^n.a^p}{a^n}=a^p=a^{m-n}.$$

b). $m=n$. Въ този случай

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^m}{a^m}=1;$$

отъ друга страна

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-m}=a^0,$$

слѣдов.,

$$a^0=1.$$

Бѣлѣжка. Степень, на която показательтъ е нула, е безъ смисълъ, защото се иска основата да се повтори нула пѫти за множитель: ето защо на такава степень трѣбва да се гледа, като на резултатъ, полученъ при дѣление на степени съ еднакви основи и равни показатели и който резултатъ е равенъ на 1.

c). $m<n$. Ако $n=m+p$, то

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^m}{a^{m+p}}=\frac{a^m}{a^m.a^p}=\frac{1}{a^p};$$

отъ друга страна

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^m}{a^{m+p}}=a^{m-m-p}=a^{-p};$$

слѣдов.,

$$a^{-p}=\frac{1}{a^p}.$$

Бѣлѣжка. Степень, на която показательтъ е отрицателенъ, е безъ смисълъ, защото не може основата да се повтори отрицателно число пѫти за множитель. Това може да се види още и отъ разликата $m-n$, която при $m<n$ има смисълъ само въ случая, когато m и n сѫ релативни числа. Макаръ степенитѣ съ отрицателни показатели да се подчиняватъ на сѫщитѣ закони, както и степенитѣ съ положителни показатели, все пакъ степень съ отрицателенъ показатель добива смисълъ само, като се прѣдстави въ видъ на дробь, която има за числитель 1, а за знаменатель — сѫщата степень, но съ положителенъ показатель.

Първитѣ слѣди отъ изчисления съ показатели се срѣщатъ у *Архимеда* (287—212 пр. Хр.). Отрицателнитѣ показатели сѫ въведени отъ *Stifel* (1456—1567). По-нататъшното развитие на учението за степенитѣ се дължи на *Simon Stevin* (род. 1548 год.), *Неперъ* и *Нютонъ* (1612—1726 г.). Послѣдниятъ е установилъ общото понятие на степень.

F. Алгебрични дроби.

1. Опрѣдѣления.

Дробь, на която членоветѣ сѫ алгебрични числа, се нарича алгебрична дробь. Така,

$$\frac{-1}{4}, \frac{6}{5}, \frac{72}{-6}$$

сѫ алгебрични дроби.

Величинитѣ на тѣзи дроби, спорѣдъ правилото за частното, сѫ:

$$-\frac{1}{4}, \frac{6}{5}, -\frac{72}{60}=-\frac{6}{5}.$$

Числата, които влизатъ въ дробьта, се наричатъ нейни членове. Числото надъ чертата се нарича числитель, а онова подъ чертата — знаменатель.

2. Свойства и дѣйствия.

Лесно е да се види, че алгебричнитѣ и абсолютнитѣ дроби иматъ едни и сѫщи свойства и че при дѣйствията съ алгебричнитѣ дроби се работи, както и при абсолютнитѣ дроби.

Така, ако a, b, c, d, сѫ алгебрични числа, то

I. $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}$ и $\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}$.

Примѣръ. $\frac{-6}{-5}=\frac{-12}{-10}=\frac{6}{5}$.

II. $\frac{a}{m}-\frac{b}{m}-\frac{c}{m}+\frac{d}{m}=\frac{a-b-c+d}{m}$.

Примѣръ. $\frac{-1}{+4}+\frac{+3}{-5}-\frac{-1}{-7}=$

$$=\frac{(-1).(-5).(-7)+(+3).(+4).(-7)-(-1).(+4).(-5)}{(+4).(-5).(-7)}$$

$$=\frac{(-35)+(-84)-(+20)}{(+140)}=\frac{(-35)+(-84)+(-20)}{140}$$

$$=\frac{-139}{140}=-\frac{139}{140}.$$

III. $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$.

Примѣри.

1). $\frac{3}{-4}.\frac{5}{6}=\frac{15}{-24}=-\frac{15}{24}=-\frac{5}{8}$;

2). $\frac{3}{-4}.\frac{-5}{6}=\frac{-15}{-24}=\frac{5}{8}$;

3). $\frac{3}{-4}.\frac{-5}{-6}=\frac{-15}{+24}=-\frac{5}{8}$;

IV. $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a.d}{b.c}$.

Примѣри.

1). $\frac{3}{4}:\frac{-5}{-6}=\frac{3}{4}.\frac{-6}{-5}=\frac{-18}{-20}=\frac{9}{10}$;

2). $\frac{3}{-4}:\frac{-5}{6}=\frac{3.\ 6}{-4.-5}=\frac{18}{20}=\frac{9}{10}$;

3). $\frac{-3}{-4}:\frac{5}{-6}=\frac{-3}{-4}.\frac{-6}{5}=\frac{18}{-20}=-\frac{9}{10}$.

6. Свойства на неравенствата.

a). Къмъ двѣтѣ страни на едно неравенство можемъ да прибавимъ или извадимъ едно и сѫщо число.

Така, ако $a>b$, то $a+c>b+c$, защото отъ $a-b>0$ слѣдва: $a-b=a-b+c-c=a+c-b-c=(a+c)-(b+c)>0$, т. е., $a+c>b+c$.

Примѣръ. $+4>-3$, $+4+(-6)>-3+(-6)$, или $-2>-9$.

b). Ако умножимъ или раздѣлимъ двѣтѣ страни на едно неравенство съ едно и сѫщо число (различно отъ нула), неравенството не се измѣня, ако числото е положително, а ако това число е отрицателно, неравенството мѣнява вида си.

Така, нека $a>b$, спр. $a-b>0$. Ако умножимъ $a-b$ съ c, то произведението $(a-b)c=ac-bc$ ще е положително или отрицателно споредъ това дали c е положително или отрицателно.

Примѣръ.

$$6>-3,\ 6(+2)>(-3)(+2);\ 6(-2)<(-3)(-2).$$

ГЛАВА V.

Алгебрични изрази.

§ 11. Видове алгебрични изрази.

1. Алгебрични изрази.

Съвокупность отъ букви и числа, съединени съ знаковетѣ на разнитѣ дѣйствия, които трѣбва да се извършатъ въ извѣстенъ редъ, се нарича алгебриченъ изразъ.

Така,

$$3a^4bc + \frac{a^3d}{b+c} \text{ и } \frac{2ad-ab(c+d)}{4a+3b}$$

сж алгебрични изрази.

2. Числена величина на алгебриченъ изразъ.

Числена величина на единъ изразъ се нарича числото, което ще се получи, като се замѣнятъ буквитѣ му съ частни числа и се извършатъ означенитѣ дѣйствия.

Числената величина на израза $3a^2-5b+2c$, при $a=-2$, $b=1$, $c=5$ е:

$3.(-2)^2-5.1+2.5=12-5+10=17.$

При други значения на буквитѣ, числената величина на израза е друга.

3. Еквивалентни изрази.

Алгебрични изрази, които при равни частни значения на еднаквитѣ букви, иматъ равни числени величини, се наричатъ еквивалентни изрази. Така, изразитѣ

$(a+b)\ c$ и $ac+bc$; $(a+b)^2$ и $a^2+2ab+b^2$

сж еквивалентни изрази, защото, напр., при $a=+2$, $b=-3$ и

$c=+4$, имаме: 1). $(a+b)\ c=(2-3)\ .\ 4=(-1)\ .\ 4=-4$;
$ac+bc=2\ .\ 4-3\ .\ 4=8-12=-4.$
2). $(a+b)^2=(2-3)^2=(-1)^2=+1$;
$a^2+2ab+b^2=(+2)^2+2\ .\ (+2)\ .\ (-3)+(-3)^2=4-12+9=+1.$

4. Цѣли и дробни изрази.

Единъ изразъ се нарича цѣль, относително една отъ буквитѣ си, когато тази буква не влиза като дѣлитель въ този изразъ; въ противенъ случай изразътъ, относително тая буква, се нарича дробенъ. Така, изразитѣ:

$$\frac{a^5+2b}{c-b},\ 5a^2b-\frac{a+b}{b-2c}$$

сж цѣли относително *a* и дробни — относително *b* и *c*. Изразъ, който е цѣль относително всичкитѣ си букви, се наричъ изобщо цѣлъ алгебриченъ изразъ. Така,

$$3a-5b^2+\frac{2}{7}ab \text{ и } 5a^2-3ab+\frac{b^2}{2}$$

сж цѣли алгебрични изрази.

5. Едночленъ.

Изразъ, въ който послѣдното по реда си дѣйствие не е събиране или изваждане, се нарича едночленъ или мономъ. Така,

$$3a^2b,\ \frac{3ab}{c},\ 6(a+b-c)\ d$$

сж едночлени.

6. Степень на цѣлъ едночленъ.

Степень на цѣлъ едночленъ, относително една отъ буквитѣ му, се нарича показательтъ на тая буква въ едночлена. Така, едночленитѣ

$$3a^2b,\ 7a^2bc^3$$

сж отъ втора степень относително *a* и отъ първа — относително *b*.

7. Измѣрение на цѣлъ едночленъ.

Измѣрение на цѣлъ едночленъ се нарича сумата отъ показателитѣ на всичкитѣ букви, които влизатъ въ този едночленъ. Така, едночленитѣ:

$$3a^2bc,\ 5ab^2c,\ 3abc^2$$

сж отъ четвърто измѣрение.

8. Коефициенти на едночленитѣ.

Цифрениятъ множитель на единъ едночленъ се нарича коефициентъ на едночлена. Коефициентътъ се пише прѣдъ (отлѣво на) едночлена. Така на едночлена

$$5ab^2c^2$$

коефициентътъ е 5.

Коефициентътъ на едночленъ, прѣдъ който нѣма никакъвъ цифренъ множитель, е единица; коефициентътъ 1 не се пише, а се подразбира.

Ако коефициентътъ е нула, то и едночленътъ е нула.

Коефициентътъ може да бжде положителенъ, отрицателенъ, цѣлъ и дробенъ.

По нѣкога едночленътъ се разгледва само относително нѣкои отъ буквитѣ си; останалитѣ букви въ този случай се разгледватъ като частни числа и произведението на послѣднитѣ съ цифрения множитель, ако го има, се зима за коефициентъ на едночлена. Така, коефициентитѣ на едночленитѣ:

$$3abx^2y,\ \frac{7}{2}ab^2xy,\ -ax^2y^3,\ -xy^3,\ -\frac{1}{2}ax^3y^2,\ x^3y^5,$$

относително x и y сж съотвѣтно: $3ab, \frac{7}{2}ab^2, -a, -1, -\frac{1}{2}a, 1$.

9. Подобни едночлени.

Едночлени, които се различаватъ само по коефициентитѣ си, се наричатъ подобни едночлени. Така едночленитѣ

$$4a^2bc^3,\ -\frac{5}{7}a^2bc^3 \text{ и } -a^2bc^3$$

сж подобни едночлени.

10. Многочлени.

Изразъ, който съдържа нѣколко едночлени, съединени съ знаковетѣ + и —, се нарича многочленъ или полиномъ.

Едночленитѣ, взети съ знаковетѣ прѣдъ тѣхъ, се наричатъ членове на многочлена. Така, изразътъ

$$\frac{4ab}{c}+2a^3-\frac{3a^2c}{2b}+15$$

е многочленъ, на който членоветѣ сж:

$$\frac{4ab}{c},\ 2a^3,\ -\frac{3a^2c}{2b} \text{ и } 15.$$

Многочленъ, който съдържа два члена, се нарича двучленъ или биномъ.

Многочленъ, който съдържа три члена, се нарича тричленъ или триномъ.

Многочленъ, който съдържа повече отъ три члена, се нарича изобщо полиномъ или многочленъ.

Многочленътъ е алгебрична сума (§ 10, В, 5), затова свойствата на многочлена сж сжщи, както тия на алгебричната сума.

11. Степень на цѣлъ многочленъ.

Степень на цѣлъ многочленъ, относително нѣкоя отъ буквитѣ му, се нарича степеньта на този неговъ едночленъ, относително сжщата буква, въ който тази буква има най-голѣмъ показатель. Така, многочленътъ

$$3a^2+5abc-13c^2$$

е отъ втора степень относително *a* и *c* и отъ първа относително *b*.

12. Измѣрение на цѣлитѣ многочлени.

Измѣрение на цѣлъ многочленъ се нарича измѣрението на този неговъ едночленъ, въ който сумата отъ показателитѣ на буквитѣ му е най-голѣма. Така, многочленътъ

$$5a^3b-3a^2b^3+7a^2b^2$$

е отъ пето измѣрение.

13. Еднородни цѣли многочлени.

Многочленъ, на който членоветѣ сѫ отъ едно и сѫщо измѣрение, се нарича еднороденъ или хомогененъ многочленъ. Така,

$$3a^3 + \frac{5}{2}a^2b - 7b^3$$

е хомогененъ многочленъ отъ трето измѣрение.

14. Наредени цѣли многочлени.

Нареденъ многочленъ по възходяща или низходяща степень на една отъ буквитѣ му, напр. *x*, се нарича такъвъ многочленъ, въ който членоветѣ слѣдватъ така единъ слѣдъ другъ, че показателитѣ на тази буква или се увеличаватъ отъ първия членъ (отъ началото) къмъ послѣдния (къмъ края) или пъкъ се намаляватъ. Така, многочленътъ $1 + 5x - 3x^2 + 7x^3$ е нареденъ по възходяща степень на буквата *x*, а многочленътъ $ax^4 - 3bx^3 + c$ е нареденъ по низходяща степень на сѫщата буква. Буквата, по степенитѣ на която е нареденъ многочленътъ, се нарича главна буква; членътъ, въ който тази буква има най-малъкъ показатель (или пъкъ липсва въ него), се нарича нисши членъ, а членътъ, въ който показательтъ ѝ е най-голѣмъ — висши членъ.

15. Алгебрично дѣйствие.

Дѣйствието, чрѣзъ което единъ алгебриченъ изразъ може да се замѣни съ другъ еквивалентенъ нему, се нарича алгебрично дѣйствие.

§ 12. Дѣйствия съ цѣли едночлени и многочлени.

А. Събиране.

Наименованията: събираемо, сума, както и означението на дѣйствието, сѫ сѫщитѣ, както и при събирането на абсолютнитѣ числа.

1. Събиране на едночлени.

Едночлени се събиратъ, като се напишатъ единъ слѣдъ другъ съ съотвѣтнитѣ имъ знакове.

Така,

$$5a^3b - 3a^2b^3 + 7a^2b^2$$

е сума на едночленитѣ

$$5a^3b, -3a^2b^3, +7a^2b^2.$$

Сумата на нѣколк едночлена е многочленъ.

2. Събиране на многочлени.

Многочлени се събиратъ, като се напишатъ послѣдователно членоветѣ имъ единъ слѣдъ другъ съ съотвѣтнитѣ имъ знакове (§ 10, B, 6, d). Така, на многочленитѣ

$$a + b - c;\ a' - b' + c';\ a'' - b'' + c''$$

сумата е

$$a + b - c + a' - b' + c' + a'' - b'' + c''.$$

Сумата на нѣколко многочлена е пакъ многочленъ.

3. Привеждане на подобни членове.

Ако въ многочлена, който се получава при събирането на едночленитѣ и многочленитѣ и, изобщо, въ кой и да е многочленъ има подобни членове, то тѣзи членове могатъ да се съединяватъ и замѣняватъ чрѣзъ сумата имъ (§ 10, B, 6, c), (§ 10, C, 6). Така,

$$3a^2b - 7a^2b + 5a^2b = (3 - 7 + 6)a^2b = 2a^2b;$$
$$5a^3b + a^4 - 3a^3b + 2a^4 = (a^4 + 2a^4) + (5a^3b - 3a^3b) =$$
$$= (1 + 2)a^4 + (5 - 3)a^3b = 3a^4 + 2a^3b.$$

Сумата на подобнитѣ едночлени е едночленъ подобенъ съ тѣзи едночлени: коефициентътъ на тази сума е сума отъ коефициентитѣ на едночленитѣ, взети тѣзи коефициенти съ знаковетѣ на съотвѣтнитѣ имъ членове.

Замѣната на нѣколко подобни члена чрѣзъ сумата имъ се нарича привеждане на подобни членове.

Примѣри.

1). Съберѝ едночленитѣ: $+3a^2$, $-5a^2$, $+7c^2$, $-8a^2$, $+6a^2$, $+8c^2$!

Рѣшение. Написваме едночленитѣ единъ слѣдъ другъ съ съотвѣтнитѣ имъ знакове и правимъ привеждане.

$$3a^2-5a^2+7c^2-8a^2+6a^2-8c^2=(3a^2-5a^2-8a^2+$$
$$+6a^2)+(7c^2-8c^2)=-4a^2-c^2$$

2). Съберѝ многочленитѣ:

$a^2+2ab+b^2$, $3a^2-6ab+2b^2$, $4a^2-10ab-4b^2$!

Рѣшение.

$$a^2+2ab+b^2+3a^2-6ab+2b^2+4a^2-10ab-4b^2=$$
$$=(a^2+3a^2+4a^2)+(2ab-6ab-10ab)+(b^2+2b^2-4b^2)=$$
$$=8a^2-14ab-b^2.$$

4. Събиране на наредени многочени.

Написваме многочленитѣ единъ подъ другъ така, че подобнитѣ членове да образуватъ вертикални колони и събираме членоветѣ на всѣка колона.

Примѣръ.

$$\begin{array}{rrrrr}
1 & +3x & -5x^2 & ,, & +x^4 \\
2 & ,, & +3x^2 & -6x^3 & +7x^4 \\
,, & 7x & -8x^2 & +x^3 & +11x^4 \\
\hline
3 & +10x & -10x^2 & -5x^3 & +19x^4
\end{array}$$

B. Изваждане.

Наименованията: умаляемо, умалитель, разлика, както и означението на дѣйствието сѫ сѫщитѣ, както и при изваждането на абсолютнитѣ числа.

Изваждане на многочлени.

Многочленъ се изважда, като се притурятъ послѣдователно членоветѣ му, взети съ обратни знакове (§ 10, B, 6, e).

Примѣри.

1). $(5x+4y-3z)-(4x-3y+5z)=5x+4y-3z-4x=$
$+3y-5z=x+7y-8z.$

2). $(y^2-3y+1)-(y^2+6y+7)=y^2-3y+1-y^2-6y-$
$-7=-9y-6.$

3). Да се намѣри $A+B-C$, ако

$A=1+ax-bx^2$,
$B=3-ax+3bx^2$,
$C=9+3ax-bx^2$.

Рѣшение.

$$\begin{array}{rrr}
1 & +\ ax & -\ bx^2 \\
3 & -2ax & +3bx^2 \\
-9 & -3ax & +\ bx^2 \\
\hline
-5 & -4ax & +3bx^2.
\end{array}$$

C. Умножение.

Наименованията: множимо, множитель (или съ общо име множители), произведение, както и означението на дѣствието, сѫ сѫщитѣ както и при умножението на абсолютнитѣ числа.

1. Умножение на едночлени.

а). Два едночлена се умножаватъ, като се състави произведението отъ всичкитѣ множители на двата едночлена, взети тѣзи множители въ произволенъ редъ (§ 10, C, 3, a, b).

Така,

$$4x^3y^3z\,.\,3xyt^2=4x^3y^3z3xyt^2=4\,.\,3\,.\,x^3\,.\,x\,.\,y^3\,.\,y\,.\,z\,.\,t^2$$
$$=12x^4y^4zt^2.$$

Отъ тукъ:

Произведението на два едночлена е едночленъ, на който коефициентътъ е произведение отъ коефициентитѣ на двата едночлена, а буквената часть е произведение отъ буквенитѣ части на тѣзи едночлени.

При умножението на буквенитѣ части показателитѣ на еднаквитѣ множители се събиратъ, а множителитѣ, които ги има само въ единъ отъ едночленитѣ, пишатъ се въ произведението безъ измѣнение.

Правилото за знаковетѣ, дадено при умножението на релативнитѣ числа, е въ сила и тукъ (§ 10, С, 1).

Примѣри.

$3a^2b \cdot 4ab^2c = 12a^3b^3c.$

$3abc \cdot (-7a^2b^2d) = -21a^3b^3cd.$

$(-5ac) \cdot (-2a^3d^2) = 10a^4cd^2.$

b). Умножението на нѣколко едночлени става по сѫщия начинъ.

Примѣри.

$a^2bc^4 \cdot 2a^3b^2c \cdot 6bc^2d = 12a^5b^4c^7d.$

$2a^2b \cdot (-5ab^2) \cdot (-4c^2d^3) = 40a^3b^3c^2d^3.$

Правилото за знаковетѣ, дадено при умножението на релативнитѣ числа, е въ сила и тукъ (§ 10, С, 2).

c). Степеньта или измѣрението на произведението е сума отъ степенитѣ или измѣренията на едночленитѣ. (Защо?).

2. Умножение на многочленъ съ едночленъ.

Многочленъ се умножава съ едночленъ, като се умножи всѣки членъ на многочлена съ дадения едночленъ (§ 10, С, 4).

Примѣръ.

$(5a^2b - 3ab^2 + 7b^3).(-3ab) = 5a^2b(-3ab) - 3ab^2.$
$(-3ab) + 7b^3(-3ab) = -15a^3b^2 + 9a^2b^3 - 21ab^4.$

3. Умножение на многочленъ съ многочленъ.

Многочленъ се умножава съ многочленъ, като се умножи всѣки членъ на единия многочленъ съ всичкитѣ членове на другия многочленъ (§ 10,С,5).

Примѣръ.

$(3a^2b - 5ab^2).(a^3 - 2b^3) = 3a^5b - 5a^4b^2 - 6a^2b^4 + 10ab^5.$

4. Умножение на наредени многочлени.

Написваме множителя подъ множимото и теглимъ подъ него черта; написваме подъ чертата произведението на множимото съ първия членъ на множителя, като оставяме праздно мѣсто тамъ, дѣто липсва нѣкоя степень на главната буква; подъ това произведение написваме произведението на множимото съ втория членъ на множителя, като внимаваме, щото подобнитѣ членове да додатъ единъ подъ другъ; така постѫпваме и по-нататъкъ, додѣто получимъ и произведението на множимото съ послѣдния членъ на множителя, слѣдъ което теглимъ черта и събираме тъй съставенитѣ частни произведения.

Примѣри.

1. Да се намѣри произведението на многочленитѣ:

$$4x - x^2 + 2x^3 - 3 \text{ и } x^2 - 15 + x.$$

Рѣшение. Нареждаме многочленитѣ по низходящитѣ степени на x и ги умножаваме, както е казано по-горѣ.

$$\begin{array}{rrrrrr}
2x^3 & -\ x^2 & +\ 4x & -\ 3 & & \\
 & x^2 & -\ x & +\ 15 & & \\
\hline
2x^5 & -\ x^4 & +\ 4x^3 & -\ 3x^2 & & \\
 & -\ 2x^4 & +\ x^3 & -\ 4x^2 & +\ 3x & \\
 & & +\ 30x^3 & -\ 15x^2 & +\ 60x & -\ 45 \\
\hline
2x^5 & -\ 3x^4 & +\ 35x^3 & -\ 22x^2 & +\ 63x & -\ 45.
\end{array}$$

2. Умножй многочленитѣ

$$a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \text{ и } a^2 + 2ab + b^2!$$

Рѣшение.

$$\begin{array}{rrrrrrr}
a^4 & -\ 4a^3b & +\ 6a^2b^2 & -\ 4ab^3 & +\ b^4 & & \\
 & & a^2 & +\ 2ab & +\ b^2 & & \\
\hline
a^6 & -\ 4a^5b & +\ 6a^4b^2 & -\ 4a^3b^3 & +\ a^2b^4 & & \\
 & +\ 2a^5b & -\ 8a^4b^2 & +\ 12a^3b^3 & -\ 8a^2b^4 & +\ 2ab^5 & \\
 & & +\ a^4b^2 & -\ 4a^3b^3 & +\ 6a^2b^4 & -\ 4ab^5 & +\ b^6 \\
\hline
a^6 & -\ 2a^5b & -\ a^4b^3 & +\ 4a^3b^3 & -\ a^2b^4 & -\ 2ab^5 & +\ b^6.
\end{array}$$

3. Умножи многочленитѣ

a^2+ab+b^2 и $a-b$!

Рѣшение.

$$\begin{array}{r} a^2+ab+b^2 \\ a-b \\ \hline a^3+a^2b+ab^2 \\ -a^2b-ab^2-b^3 \\ \hline a^3 \quad ,, \quad ,, \quad -b^3. \end{array}$$

По сжщия начинъ се умножаватъ и наредени многочлени съ буквени коефициенти.

5. Произведението на два многочлена е винаги многочленъ.

Ако даденитѣ многочлени сж наредени по низходящитѣ степени на главната буква и множимото има *m*, а множительтъ *n* члена, то произведението би трѣбвало да има *mn* члена; но въ произведението има подобни членове и за това броятъ на членоветѣ му ще е по-малъкъ отъ *mn*; най-малкиятъ брой на членоветѣ въ това произведение е два, защото висшиятъ членъ на произведението, което е произведение отъ висшитѣ членове на множимото и множителя, нѣма подобенъ членъ за себе си; сжщото е и съ нисшия членъ на сжщото произведение. Отъ тукъ: Произведението на два многочлена е винаги многочленъ (най-малко двучленъ) и никой пжть не е едночленъ.

6. Забѣлѣжителни произведения.

a). Квадратъ на бинома $a+b$.

$$\begin{array}{r} (a+b)^2 = a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \qquad \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2. \end{array}$$

b). Квадратъ на бинома $a-b$.

$$\begin{array}{r} (a-b)^2 = a-b \\ a-b \\ \hline a^2-ab \qquad \\ -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2. \end{array}$$

c). Кубъ на бинома $a+b$.

$$\begin{array}{r} (a+b)^3 = (a+b)^2\,(a+b) = a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \qquad \\ +a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \end{array}$$

d). Кубъ на бинома $a-b$.

$$\begin{array}{r} (a-b)^3=(a-b)^2\,(a-b)=a^2-2ab+b^2 \\ a-b \\ \hline a^3-2a^2b+ab^2 \qquad \\ -a^2b+2ab^2-b^3 \\ \hline a^3-3a^2b+3ab^2-b^3. \end{array}$$

e). Произведение на биномитѣ $a+b$ и $a-b$.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \qquad \\ -ab-a^2 \\ \hline a^2 \quad ,, \quad -b^2. \end{array}$$

Изговорете тия забѣлѣжителни произведения!

Като се приложи правилото за умножение на многочленитѣ, лесно се провѣряватъ и произведенията:

f). $(a^2+ab+b^2)\,(a-b)=a^3-b^3$,

$(a^3+a^2b+ab^2+b^3)(a-b)=a^4-b^4$

и т. н.

$(a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+\ldots+a^n b^{m-n-1}+\ldots+b^{m-1})$
$(a-b)=a^m-b^m$,

дѣто m е произволно цѣло число.

g). $(a^2-ab+b^2)\,(a+b)=a^3+b^3$,

$(a^3-a^2b+ab^2-b^3)\,(a+b)=a^4-b^4$,

$(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)\,(a+b)=a^5+b^5$,

и т. н.

$(a^{m-1}-a^{m-2}b+a^{m-3}b^2-+\ldots\pm a^n b^{m-n-1}\mp\ldots\pm b^{m-1})$
$(a+b)=a^m\pm b^m$,

дѣто знаковетѣ въ първия множитель слѣдватъ по реда $+, -, +, - \ldots$ а знакътъ $\pm$ въ дѣсната страна е или $+$ или $-$ споредъ това дали *m* е нечетно или четно число.

Всичкитѣ членове на многочленъ отъ m^{-a} степень, когато m е цѣло неопрѣдѣлено число, не могатъ се написа, защото не се знае броя имъ; но ако слѣдващитѣ единъ слѣдъ другъ членове на нареденія многочленъ се получаватъ единъ отъ другъ по опрѣдѣленъ законъ, то достатъчно е, да се напишатъ само нѣколко отъ първитѣ членове (за да изпъкне закона на образуването имъ) и послѣдния членъ, а не написанитѣ членове да се замѣнятъ съ точки. По нѣкога се пише и n-ий членъ на многочлена и се нарича общъ членъ, защото отъ него се получаватъ всичкитѣ членове на многочлена, като се замѣни n съ 0, 1, 2, 3, и т. н.

D. Дѣление.

Наименованията: дѣлимо, дѣлитель, частно и означаването на дѣйствието сѫ сѫщитѣ, както и при дѣлението на абсолютнитѣ числа.

1. Дѣление на едночлени.

Понеже дѣлимото е произведение отъ дѣлителя и частното, то частното на два едночлена, ако го има, съдържа:

1). Частното на коефицентитѣ на дѣлимото и дѣлителя;

2). Общитѣ букви на дѣлимото и дѣлителя, всѣка една отъ тѣхъ снабдена съ показатель равенъ на разликата отъ показателитѣ ѝ въ дѣлимото и дѣлителя;

3). Буквитѣ, които се съдържатъ само въ дѣлимото, съ сѫщитѣ имъ показатели.

Общитѣ букви на дѣлимото и дѣлителя, ако иматъ равни показатели, въ частното не се пишатъ (частното имъ е $=1$).

Споредъ това

$$30a^6b^7c^8d^3 : 6a^4b^3c^8 = 5a^2b^4d^3,$$

защото

$$5a^2b^4d^3 . 6a^4b^3c^8 = 30a^6b^7c^8d^3.$$

2. Невъзможно дѣление на едночлени.

Едночленитѣ нѣматъ частно въ слѣднитѣ два случая:

a). Когато въ дѣлителя има букви, що ги нѣма въ дѣлимото.

b). Когато показательтъ на нѣкоя буква отъ дѣлителя е по-голѣмъ отъ показателя на сѫщата буква въ дѣлимото. Частнитѣ:

$$8a^2b : 4ac \text{ и } 15ab^2 : 5a^2b^3$$

сѫ невъзможни частни.

3. Знакъ на частното.

Правилото за знаковетѣ, дадено при умножението, е въ сила и тукъ, защото дѣлението е дѣйствие обратно на умножението.

4. Дѣление на многочленъ съ едночленъ.

Многочленъ се дѣли на едночленъ, като се раздѣли, ако може, всѣки членъ на многочлена съ едночлена. Така,

$$\frac{a+b+c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}, \text{ защото}$$

$$\left(\frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}\right) . m = \frac{a}{m} . m + \frac{b}{m} . m + \frac{c}{m} . m = a + b + c.$$

Примѣръ.

$$(5a^3b - 4a^2b^3) : 2ab = \frac{5}{2}a^2 - 2ab^2.$$

5. Невъзможно дѣление.

Дѣлението е невъзможно, когато всичкитѣ членове на дѣлимото, или пъкъ само нѣкои отъ тѣхъ, сѫ недѣлими съ дѣлителя.

6. Забѣлѣжителни частни при дѣление на многочлени.

Да се раздѣли многочлена P на многочлена R, ще рече да се намѣри трети многочленъ Q, който умноженъ съ R да дава P. Намирането на многочлена Q не е всѣкога възможно, затова тукъ ще се ограничимъ само съ нѣкои частни случаи на възможно дѣление.

Отъ забѣлѣжителнитѣ произведения (§ 12, C, 6) слѣдватъ непосрѣдствено слѣднитѣ случаи на дѣление:

a). $(a^2 \pm 2ab + b^2) : (a \pm b) = a \pm b$;

b). $(a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3) : (a \pm b) = a^2 \pm 2ab + b^2$;

c). $(a^2 - b^2) : (a \pm b) = a \mp b$;

d). $(x^3 - a^3) : (x - a) = x^2 + ax + x^2$;

$(x^4 - a^4) : (x - a) = x^3 + ax^2 + a^2x + a^3$;

$(x^5 - a^5) ; (x - a) = x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4$;

и т. н.

Изобщо, $(x^m - a^m) : (x - a) = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \dots + a^n x^{m-n-1} + \dots + a^{m-1}$, дѣто m е произволно цѣло число.

e). $(x^3 + a^3) : (x + a) = x^2 - ax + x^2$;

$(x^4 - a^4) : (x + a) = x^3 - ax^2 + a^2x - a^3$;

$(x^5 + a^5) : (x + a) = x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4$;

и т. н.

Изобщо, $(x^m \pm a^m) : (x + a) = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - + \dots \pm a^n x^{m-n-1} \mp \dots \pm a^{m-1}$, дѣто знакътъ $\pm$ въ дѣлимото е или $+$ или $-$ споредъ това дали m е нечетно или четно число.

Отъ това се вижда:

1). Че всичкитѣ членове на частното, сѫ положителни, когато дѣлительтъ е разлика, а сѫ $+, -, +, -, \dots$ когато дѣлительтъ е сборъ.

2). Че въ частното показателитѣ на първата основа се намаляватъ, а на втората се увеличаватъ съ 1, като при това показательтъ на първия членъ отъ частното е съ 1 по-малъкъ отъ показателя на първия членъ на дѣлимото; сѫщото е и съ показателя на послѣдния членъ отъ частното.

Отъ приведенитѣ примѣри заключаваме, че

1-о. $x^m - a^m$ винаги се дѣли съ $x - a$.

2-о. $x^m - a^m$ се дѣли съ $x + a$, когато m е четно число, а при нечетно m — не се дѣли.

3-о, $x^m + a^m$ се дѣли на $x + a$, когато m е нечетно число, а при четно m — не се дѣли.

4-о. $x^m + a^m$ не се дѣли съ $x - a$.

За по-лесно запомняне случаитѣ, кога бинома отъ вида $x^m \pm a^m$ се дѣли на бинома $x \pm a$, трѣбва да се спомни слѣдното: 1) биноми съ най-малъкъ нечетенъ показатель сѫ: $x + a$ и $x - a$, които се дѣлятъ съотвѣтно на $x + a$ и $x - a$; 2) биноми съ най-малъкъ четенъ показатель сѫ $x^2 + a^2$ и $x^2 - a^2$, отъ които първиятъ не се дѣли нито съ $x + a$, нито съ $x - a$, а вториятъ се дѣли и съ $x + a$ и съ $x - a$.

ГЛАВА VI.

Най-голѣмъ общъ дѣлитель и най-малко общо кратно.

§ 13. Разлагане на множители.

Да се разложи цѣлъ алгебриченъ изразъ на множители, ще рече да се прѣдстави този изразъ въ видъ на произведение отъ други цѣли алгебрични изрази, които по-нататъкъ немогатъ да се разлагатъ.

1. Разлагане на едночлени.

Едночленитѣ се разлагатъ, като се разложатъ само тѣхнитѣ коефициенти.

Примѣри.

1). $35\, a^2 b^3 = 5.\ 7.\ a^2 b^3$.

2). $150mn^2 = 2.3.5^2.\ mn^2$.

2. Разлагане на многочлени.

1-о. Нѣкои отъ многочленитѣ се разлагатъ съ помощьта на равенствата:

$$an + bn + \dots = (a + b + \dots)\, n;$$
$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2;$$
$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3;$$
$$a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b);$$
$$a^{2n+1} - b^{2n+1} = (a - b)\ (a^{2n} + a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 + \dots + b^{2n});$$
$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)\ (a - a^{2n-1}b + a^{2n-2}b^2 - \dots \pm b^{2n});$$
$$a^{2n} - b^{2n} = (a^n + b^n)\ (a^n - b^n).$$

Примѣри.

1. $8a^2n^5x^5 - 10an^4x^7 + 4an^3x^4 = 2an^3x^4(4an^3x - 5nx^3 + 2)$.

2. $4a^2+12ab+9b^2=(2a)^2+2\,.\,2a\,.\,3b+(3b)^2=(2a+3b)^2.$

3. $n^3-2n^2+n=n\,(n^2-2\,n+1)=n\,(n-1)^2.$

4. $36x^2-\frac{9}{4}y^2=(6x)^2-\left(\frac{3}{2}y\right)^2=\left(6x+\frac{3}{2}y\right)\left(6x-\frac{3}{2}y\right).$

5. $x^{n-m}-x^{n+m}=x^{n-m}\,(1-x^{2m})=x^{n-m}\,(1+x^m)\,(1-x^m).$

6. $x^4+x^2y^2+y^4=x^4+x^2y^2+x^2y^2-x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+$
$+y^4-x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(xy)^2=x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy).$

7. $27x^3-8p^3=(3x)^3-(2y)^3=(3x-2y)\,(9x^2+6xy+4y^2).$

8. $a^4-b^4=(a^2)^2-(b^2)^2=(a^2+b^2)\,(a^2-b^2)$
$=(a^2+b^2)\,(a+b)\,(a-b).$

II-о. Разлагането на многочленитѣ става още чрѣзъ съединяване членоветѣ на многочлена на групи, които да могатъ да се разлагатъ на множители; общитѣ множители, ако ги има, се изваждатъ извънъ скоби.

Примѣри.

1. $ac+bc+ad+bd=(ac+bc)+(ad+bd)=(a+b)c$
$+(a+b)d=(a+b)\,(c+d).$

2. $3ax+3bx+4az+4bz+a+b=(3ax+3bx)+$
$+(4az+4bz)+(a+b)=3x(a+b)+4z(a+b)+(a+b)=$
$=(3x+4z+1)\,(a+b).$

3. $x^4+xy^3+x^3y+y^4=(x^4+xy^3)+(x^3y+y^4)=$
$=x(x^3+y^3)+y(x^3+y^3)=(x^3+y^3)\,(x+y)=$
$(x+y)^2\,(x^2-xy+y^2).$

4. $12ac-6bc-8ab+4b^2=2\,(3c-2b)\,(2a-b).$

5. $8x^{n+2}-4x^{n+1}y-2x^2y+20x^{n+1}\,z+xy^2-5xyz=$
$=x(4x^n-y)\,(2x-y+5z).$

§ 14. Най-голѣмъ общъ дѣлитель.

1. Опредѣления.

Цѣлиятъ алгебриченъ изразъ, който дѣли два и повече цѣли алгебрични изрази, се нарича **общъ дѣлитель** на тѣзи изрази, Нѣколко дадени изрази може да иматъ нѣколко общи дѣлители.

Изрази, които нѣматъ общъ дѣлитель, се наричатъ **взаимно-прости изрази**. **Най-голѣмъ общъ дѣлитель** на нѣколко дадени изрази се нарича този дѣлитель, който, като дѣли дадениятѣ изрази, дава частни взаимно-прости по-между си.

Най-голѣмиятъ общъ дѣлитель се намира чрѣзъ разлагане на прости множители.

2. Най-голѣмъ общъ дѣлитель на цѣли едночлени.

Разлагаме едночленитѣ на проститѣ имъ множители и съставяме произведение отъ множителитѣ, които сж общи на всичкитѣ едночлени; така съставеното произведение е най-голѣмъ общъ дѣлитель на даденитѣ едночлени.

Примѣри.

1. На еднчленитѣ

$$18abd=2\,.\,3^2\,.\,a\,.\,b\,.\,d.$$
$$27bcd=3^3\,.\,b\,.\,c\,.\,d$$

най-голѣмиятъ общъ дѣлитель е 3^2bd.

2. На едночленитѣ

$$21x^2y^4z^8=3\,.\,7\,.\,x^2y^4z^8,$$
$$32x^5y^36^4=2^5\,.\,x^5y^3z^4.$$

най-голѣмиятъ общъ дѣлитель е $x^2y^3z^4$.

3. На едночленитѣ

$$32\,a^m\,b^{2n}=2^5\,a^m\,b^{2n},$$
$$8\,a^{2m}\,b^n=2^3\,a^{2m}\,b^n$$
$$26\,a^{2m}\,b^{2n}=2\,.\,13\,.\,a^{2m}\,b^{2n}$$

най-голѣмиятъ общъ дѣлитель е $2\,a^m\,b^{2n}$.

3. Най-голѣмъ общъ дѣлитель на цѣли многочлени.

Разлагаме многочленитѣ на проститѣ имъ множители и съставяме произведение отъ множителитѣ, които сж общи на всичкитѣ многочлени; това произведение е търсениятъ най-голѣмъ общъ дѣлитель на даденитѣ многочлени.

Примѣръ.

На многочленитѣ:

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = x^2(x-3) - (x-3) = (x-3)(x^2-1) =$$
$$= (x-3)(x+1)(x-1);$$
$$x^3 + 3x^2 - x - 2 = x^2(x+2) - (x+2) =$$
$$(x+2)(x^2-1) = (x+2)(x+1)(x-1)$$

най-голѣмиятъ общъ дѣлитель е $(x+1)(x-1) = x^2-1$.

§ 15. Най-малко общо кратно.

1. Опрѣдѣления.

Цѣлъ изразъ, който се дѣли на нѣколко дадени цѣли изрази, се нарича общо кратно на тѣзи изрази. Дадени нѣколко изрази иматъ много общи кратни. Това общо кратно, което при дѣлението си съ дадени тѣ изрази дава взаимно-прости частни, се нарича най-малко общо кратно на тѣзи изрази.

2. Най-малко общо кратно на цѣли едночлени и многочлени.

Най-малкото общо кратно се намира чрѣзъ разлагане на прости множители.

Разлагаме дадените изрази на проститѣ имъ множители и съставяме произведение отъ разнитѣ множители, като ги взимаме съ най-високата имъ степень; това произведение е търсеното най-малко общо кратно на даденитѣ изрази.

Примѣри.

1. Най-малкото общо кратно на изразитѣ:

$$25a^3b^4c^5 = 5^2 . a^3b^4c^5$$
$$\text{и } 20a^5b^2c^6 = 2^2 . 5 . a^5b^2c^6$$

е $2^2.5^2a^5b^4c^6$.

2. Най-малкото общо кратно на изразитѣ:

$$42a^mx^{2n} = 2 . 3 . 7a^mx^{2n};$$
$$35a^{m-1}x^{n+1} = 5.7a^{m-1}x^{n+1};$$

$$14a^{m-2}x^{n-3} = 2.7a^{m-2}x^{n-3}$$

е $2 . 3 . 5 . 7a^mx^{2n}$.

3. Най-малкото общо кратно на изразитѣ:

$$x^2 - 4y^2 = (x+2y)(x-2y);$$
$$\text{и } x^2 - 4xy + 4y^2 = (x-2y)^2$$

е $(x+2y)(x-2y)^2$.

4. Най-малкото общо кратно на изразитѣ:

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x+1)^2(x-1),$$
$$\text{и } x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$$
$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-2)(x+1)(x-1)$$

е $(x+1)^2(x-1)(x-2)$.

5. Най-малкото общо кратно на изразитѣ:

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1),$$
$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2-x+1),$$
$$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$$
$$\text{и } x^6 - 1 = (x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$$

е $(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1) = x^6 - 1$.

Полезно е, при сложнитѣ изрази най-малкото кратно да се оставя като означено произведение.

ГЛАВА VII.

Рационални дроби и дѣйствия съ тѣхъ.

§ 16. Рационални дроби.

1. Опредѣления.

Дробь, на която членоветѣ сѫ цѣли рационални алгебрични изрази, се нарича рационална дробь.

Така,

$$\frac{2a^2b}{3b^3c},\ \frac{a-b}{c+d},\ \frac{5x^2+3x-1}{x^2-1}$$

сѫ рационални дроби.

Измѣрение на рационална дробь се нарича измѣрението на този отъ членоветѣ ѝ, който има по-голѣмо измѣрение.

Така, отъ горнитѣ дроби първата е отъ четвърто, втората отъ първо и третата отъ второ измѣрение.

2. Свойства и дѣйствия.

Рационалнитѣ дроби иматъ сѫщитѣ свойства, както и алгебричнитѣ дроби, затова и дѣйствията съ тѣхъ се извършватъ тъй, както и съ послѣднитѣ.

Рационалнитѣ дроби могатъ да се съкратяватъ, като се раздѣлятъ членоветѣ на всѣка съ съотвѣтния най-голѣмъ общъ дѣлитель; сѫщо, могатъ да се привеждатъ въ дроби съ общъ знаменатель, стига да намѣримъ най-малкото общо кратно на отдѣлнитѣ знаменатели.

Примѣри.

1). $$\frac{15xy-25y^2}{9x^2-30xy+25y^2}=\frac{5y(3x-5y)}{(3x-5y)^2}=\frac{5y}{3x-5y}.$$

2). $$\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}+\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{(x+y)^2-(x-y)^2+x^2+y^2}{x^2-y^2}$$

$$=\frac{x^2+y^2+2xy-x^2-y^2+2xy+x^2+y^2}{x^2-y^2}$$

$$=\frac{x^2+4xy+y^2}{x^2-y^2}.$$

3). $$\left(\frac{2x+3y}{3x-4y}-\frac{2x-3y}{3x+4y}\right).\frac{9x^2-16y^2}{17(y-x)}$$

$$=\frac{(2x+3y)(3x+4y)-(2x-3y)(3x-4y)}{(3x-4y)(3x+4y)}.\frac{9x^2-16y^2}{17(y-x)}$$

$$=\frac{34xy}{9x^2-16y^2}.\frac{9x^2-16y^2}{17(y-x)}$$

$$=\frac{34xy(9x^2-16y^2)}{(9x^2-16y^2).17(y-x)}=\frac{2xy}{y-x}.$$

ГЛАВА VIII.

Пропорции.

§ 17. Геометрична пропорция.

1. Опредѣления.

Отношение на двѣ величини (числа, изрази) се нарича числото (израза), съ което трѣбва да се умножи едната отъ тѣхъ, за да се получи другата. Така, на 12 и 3 отношението е 4, защото $4 . 3 = 12$; на 5 и 7 отношението е $\frac{5}{7}$, защото $\frac{5}{7} . 7 = 5$; на a и b отношението е $\frac{a}{b}$, защото $\frac{a}{b} . b = a$ и т. н. Явно е, че за да намѣримъ отношението на двѣ величини, трѣбва да раздѣлимъ едната на другата и затова знакътъ на отношението е, както и при дѣлението. Споредъ това отношенията на a и b, на 12 и 3 и т. н. се бѣлѣжатъ така: $a : b$ или $\frac{a}{b}$, $12 : 3$ или $\frac{12}{3}$ и т. н. Числото (изразътъ), съ което се умножава едната величина за да се получи другата, се нарича показатель на отношението. Така, на отношението $12 : 3$ показательтъ е 4; на $5 : 7$ показательтъ е $\frac{5}{7}$; на $(a^2 - b^2) : (a - b)$ показательтъ е $a + b$ и т. н. Равнитѣ отношения иматъ и равни показатели. Показательтъ на отношението, когато е частно число, показва колко пѫти едната величина се съдържа въ другата.

Съединението на двѣ равни отношения съ знака $=$ се нарича пропорция (геометрична) *). Така, ако $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ сѫ равни отношения, то

*) Нарича се така, защото има голѣмо приложение въ геометрията.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ или } a : b = c : d$$

е пропорция, която, обикновено, се чете така: a се отнася къмъ b, както c къмъ d или, по кратко, a къмъ b, както c къмъ d. Числата a, b, c, d се наричатъ членове на пропорцията: a — първи, b — втори, c — трети и d — четвърти членъ; a и d — крайни (външни), b и d — срѣдни (вътрѣшни); a и c — прѣдидещи, b и d — слѣдващи членове; $a : b$ — първо и $c : d$ второ отношение.

2. Главно свойство.

Въ всѣка пропорция произведението отъ крайнитѣ членове е $=$ на произведението отъ срѣднитѣ членове. Така, ако $a : b = c : d$, то $ad = bc$. За да докажемъ това, привеждаме дробитѣ $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ въ еднакъвъ знаменатель, сравняваме ги и отхвърляме равния знаменатель.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d};\ \frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd};\ ad = bc.$$

На това свойство се основава опрѣделението на кой и да е членъ отъ пропорцията. Единъ отъ крайнитѣ членове е равенъ на произведението отъ срѣднитѣ членове, дѣлено съ другия краенъ членъ; единъ отъ срѣднитѣ членове е равенъ на произведението отъ крайнитѣ членове, дѣлено съ другия срѣденъ членъ. Така, членътъ x въ пропорцинтѣ

$$3 : 4 = 6 : x;\ x : 9 = 5 : 15;\ 7 : x = 14 : 10;\ 12 : 6 = x : 5$$

е съотвѣтно равенъ на $\frac{4 . 6}{3} = 8$; $\frac{5 . 9}{15} = 3$; $\frac{7 . 10}{14} = 5$; $\frac{5 . 12}{6} = 10$.

3. Съставяне на пропорции отъ двѣ равни произведения.

Ако произведението на двѣ числа (изрази) е равно на произведението на други двѣ числа (изрази), то отъ тѣзи 4 числа (изрази) може да се състави пропорция. Така, ако

$a \cdot d = b \cdot c$, то $a : b = c : d$. За да докажемъ това, дѣлимъ двѣтѣ страни на даденото равенство съ bd и съкратяваме.

$$ad = bc;\ \frac{ad}{bd} = \frac{bc}{db};\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ или } a : b = c : d.$$

Множителитѣ на едното произведение сж крайни, а на другото — срѣдни членове на пропорцията.

4. Видове на пропорцията $a : b = c : d$.

Като се основаваме на главното свойство на пропорцитѣ, можемъ написа:

$$\begin{aligned} a : b &= c : d \\ a : c &= b : d \\ d : b &= c : a \\ d : c &= b : a \\ b : a &= d : c \\ b : d &= a : c \\ c : a &= d : b \\ c : d &= a : b. \end{aligned}$$

Тѣзи 8 вида на дадената пропорция се получаватъ, като се размѣстятъ срѣднитѣ членове по между имъ, крайнитѣ по-между имъ, срѣднитѣ и крайнитѣ заедно.

5. Производни пропорции.

Ако $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = q$, то $a = bq$ и $c = dq$, отдѣто

$$a + c = (b + d)q$$

и още $\frac{a+c}{b+d} = q = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ . . . . . . (1).

Сжщо:

$$\frac{a-c}{b-d} = \frac{c}{d} \text{ . . . . . . (2).}$$

Отъ (1) и (2) слѣдва:

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} \text{ . . . . . . (3),}$$

$$\frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d} \text{ . . . . . . (4).}$$

Пропорцитѣ (1), (2), (3) и (4) се наричатъ производни пропорции. Прочетй ги!

Чрѣзъ размѣстване на срѣднитѣ членове на пропорцията

$$a : b = c : d$$

намираме:

$$a : c = b : d,$$

отдѣто, споредъ казаното по-горѣ слѣдва:

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \text{ . . . . . (5),}$$

$$\frac{a-b}{c-d} = \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \text{ . . . . . (6),}$$

$$\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d} \text{ . . . . (7),}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \text{ . . . . . (8)}$$

Пропорцитѣ (5), (6), (7) и (8) сж сжщо производни пропорции. Прочетй ги!

6. Сложни пропорции.

Чрѣзъ умножаване на съотвѣтнитѣ членове на пропорцитѣ:

$$\begin{aligned} a : b &= c : d, \\ a_1 : b_1 &= c_1 : d_1, \\ a_2 : b_2 &= c_2 : d_2, \\ &\dots\dots \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

намираме пропорцията:

$$aa_1a_2 \dots : bb_1b_2 \dots = cc_1c_2 \dots : dd_1d_2 \dots,$$

която се нарича сложна пропорция. Сложна пропорция се намира и чрѣзъ дѣление на съотвѣтнитѣ членове на двѣ пропорции.

Като умножимъ m пжти само на себе си всѣко отъ отношенията на пропорцията $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, намираме $\frac{a^m}{b^m} = \frac{c^m}{d^m}$, което показва, че ако двѣ отношения сж равни, то тѣ сж равни и тогава, когато степенуваме членоветѣ имъ на едно и сжщо число.

7. Равни отношения.

Ако

$$\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=\ldots=q\text{; спр., } a=a_1q, b=b_1q, c=c_1q\ \ldots,$$

то

$$a+b+c+\ldots=(a_1+b_1+c_1+\ldots)q, \text{ отдѣто}$$

$$\frac{a+b+c+\ldots}{a_1+b_1+c_1+\ldots}=q=\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}\ldots,$$

което показва, че като съберемъ почленно нѣколко равни отношения, получаваме отношение, което е равно на всѣко едно отъ даденитѣ отношения.

8. Верижна пропорция, срѣдна геометрична на двѣ и повече величини.

Пропорцията

$\frac{a}{m}=\frac{m}{b}$ или $\frac{m}{a}=\frac{b}{m}$, на която срѣднитѣ или крайнитѣ членове сж равни по между си, се нарича верижна пропорция. Членътъ m се нарича срѣдна геометрична на членоветѣ a и b. Отъ свойствата на пропорцията слѣдва, че $m^2=ab$; спр., квадратътъ на срѣдната геометрична на двѣ величини е $=$ на произведението на тѣзи величини. Изобщо, ако сж дадени n величини: $a, b, c, d, \ldots$, то срѣдната геометрична x на тѣзи величини се опрѣдѣля отъ равенството

$$x^n=a\,.\,b\,.\,c\,.\ldots.$$

9. Аритметична пропорция.

Равенството $a-b=c-d$, въ което $a>b$ и $c>d$, се нарича аритметична пропорция. Числата (изразитѣ) a, b, c, d... се наричатъ членове на пропорцията: a и d—крайни, b и c—срѣдни. Въ всѣка аритметична пропорция сумата на крайнитѣ членове е равна на сумата отъ срѣднитѣ. Така, въ пропорцията $a-b=c-d$ имаме $a+d=b+c$. Доказва се чрѣзъ притурване къмъ двѣтѣ страни на равенството $a-b=c-d$ сумата $b+d$.

Аритметичната пропорция

$$a-y=y-b,$$

въ която срѣднитѣ, или $y-a=b-y$, въ която крайнитѣ членове сж равни по между си, се нарича верижна. Членътъ y се нарича срѣдна аритметична на членоветѣ a и b. Понеже

$$2y=a+b,$$

то $y=\frac{a+b}{2}$; спр., срѣдната аритметична на двѣ величини е равна на полусумата имъ.

Изобщо, срѣдната аритметична y на n величини $a, b, c, d, \ldots$ се опрѣдѣля съ равенството

$$y=\frac{a+b+c+d+\ldots}{n}.$$

10. Хармонична пропорция.

Равенството $\frac{a-z}{z-b}=\frac{a}{b}$, въ което $a>z>b$, се нарича хармонична пропорция, защото числата $1, \frac{4}{5}$ и $\frac{2}{3}$, които изразяватъ дължини на струни, що даватъ съвършенъ акордъ, удовлетворяватъ това равенство; членътъ y се нарича срѣдна хармонична на числата a и b.

Тритѣ вида пропорции — аритметична, геометрична и хармонична — сж били познати на Питагора, Платона и Аристотела. Въ „Началата“ на Евклида свойствата на пропорциитѣ се доказватъ геометрично съ прави линии. Изобщо, при Евклида и четири вѣка подиръ него е прѣобладавало геометричното направление: числата сж ги изобразявали съ линии и теоремитѣ за числата сж ги доказвали, като се основавали на геометрията. Каквото сж сега буквитѣ, това сж били тогава линиитѣ; чрѣзъ линиитѣ сж били обобщавани прѣдложенията за числата. Доказателствата на теоремитѣ за числата, пакъ чрѣзъ числа, пръвъ е далъ Никомахъ (около 100 г. подиръ Р. Хр); той е, слѣдов., турилъ основа на аритметичното направление, което е прѣобладавало до началото на XIII в., когато европейцитѣ сж се запознали съ арабската алгебра.

ГЛАВА IX.

Уравнения.

§ 18. Прѣобразуване на уравненията.

1. Равенства.

Съединението на два алгебрични изрази съ знака = се нарича **равенство**. Така,

$$5a-4b=7,$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$
$$8+6=17-3$$

сѫ равенства.

Двата израза се наричатъ **страни** на равенството; първата — **лѣва**, а втората — **дѣсна** страна на равенството.

Равенството, което е въ сила за всѣкакви частни значения на буквитѣ, се нарича **идентично равенство** или **тождество**. Така,

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$$
$$(a-b)c=ac-bc$$

сѫ тождества.

2. Уравнения.

Равенство, което е въ сила само за нѣкои частни значения на нѣкои отъ буквитѣ му, се нарича **уравнение**. Буквитѣ, на които се даватъ частни значения, се наричатъ **рѣшения** или **неизвѣстни**, а частнитѣ имъ значения — **рѣшения** или **корени** на уравнението. Така,

$$7x-5=4x+10$$

е уравнение, защото равенството е въ сила само за $x=5$. Числото 5 е коренъ на даденото уравнение.

Да се рѣши дадено уравнение, ще рече да се намѣрятъ неговитѣ корени.

Ако $x=a$ е коренъ на дадено уравнение, то казватъ, че a **удовлетворява** уравнението.

Едно уравнение може да съдържа **една или повече неизвѣстни величини**. Така, $2x-3=x+1$ е уравнение съ една неизвѣстна; $5x-7y=8$ е уравнение съ двѣ неизвѣстни; $2x-3y+z=5$ е уравнение съ три неизвѣстни.

Уравнението е **цѣло** или **дробно**, спорѣдъ това дали странитѣ му сѫ цѣли или дробни изрази, относително неизвѣстнитѣ. Така,

$$4x-\frac{3}{5}=\frac{2x}{3}+7+\frac{4x}{5}$$

е цѣло уравнение, а

$$\frac{x+2}{x+1}=\frac{5x}{x+2}-4$$

е дробно уравнение.

3. Еквивалентни уравнения.

За двѣ уравнения казватъ, че сѫ **еквивалентни**, когато иматъ едни и сѫщи корени; т. е., когато коренитѣ на едното уравнение удовлетворяватъ другото и обратно.

Дадено уравнение се прѣобразува въ еквивалентно нему уравнение съ помощьта на слѣднитѣ **теореми**.

а). **Ако прибавимъ къмъ двѣтѣ страни на дадено уравнение по единъ и сѫщъ изразъ C, получаваме еквивалентно уравнение.** Така, уравненията

$$A=B\ .\ .\ .\ .\ .\ (1)$$
$$\text{и}\ A+C=B+C\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

сѫ еквивалентни уравнения. Ще докажемъ това.

Ако за коренитѣ на уравнението (1) A и B сѫ равни, явно е, че за сѫщитѣ корени $A+C$ и $B+C$ сѫ сѫщо равни. Слѣдов., всѣки коренъ на уравнението (1) удовлетворява уравнението (2).

Обратно, всѣки коренъ на уравнението (2) удовлетворява уравнението (1), защото, ако за коренитѣ на уравнението (2) $A+C$ и $B+C$ сѫ равни, то за сѫщитѣ корени A и B ще сѫ сѫщо равни. Слѣдов., уравненията (1) и (2) сѫ еквивалентни. Така.

$$x+3=2-x^2 \text{ и } x+3+7=2-x^2+7,$$
$$2x+y=7 \text{ и } 2x+y-x^2=7-x^2$$

сѫ еквивалентни уравнения.

Слѣдствие 1. На всѣко уравнение може да се даде вида

$$A=0.$$

Като извадимъ отъ двѣтѣ страни на уравнението изразъ, равенъ на дѣсната страна на уравнението, ще получимъ еквивалентно уравнение, дѣсната страна на което е равна на нула. Подобно уравнение се нарича анулирано уравнение.

Слѣдствие 2. Всѣки членъ отъ едната страна на уравнението може да се прѣнесе въ другата му страна. Така, ако извадимъ отъ двѣтѣ страни на дадено уравнение нѣкой членъ, който се съдържа въ нѣкоя отъ странитѣ на уравнението, то този членъ ще изчезне отъ страната, дѣто е билъ и ще се яви въ другата страна съ обратенъ знакъ. Това дѣйствие се нарича прѣнасяне членове отъ едната страна на уравнението въ другата.

Примѣръ. Ако къмъ двѣтѣ страни на уравнението

$$5x-2-\frac{x}{3}=5-3x-\frac{2}{3}$$

прибавимъ $3x+2$, ще получимъ

$$5x-\frac{x}{3}+3x=5-\frac{2}{3}+2.$$

Древнитѣ араби наричали тия прѣобразувания на дадено уравнение algebra ve almocabala. Отъ тукъ е произлѣзла думата алгебра, която днесъ, употрѣбена въ по-тѣсна смисълъ, обхваща само теорията на алгебричнитѣ уравнения, а употрѣбена въ по-широка смисълъ, обхваща и общата аритметика.

b). Ако умножимъ или раздѣлимъ двѣтѣ страни на дадено уравнение съ единъ и сѫщъ

изразъ С,*) ще получимъ еквивалентно уравнение. Нека е дадено уравнението

$$A=B\ .\ .\ .\ (1).$$

Като умножимъ двѣтѣ страни съ С, ще получимъ уравнението

$$AC=BC\ .\ .\ .\ .\ (2).$$

За да докажемъ, че уравненията (1) и (2) сѫ еквивалентни, ще имъ дадемъ вида:

$$A-B=0\ .\ .\ .\ .\ .\ (3)$$
и
$$C(A-B)=0\ .\ .\ .\ .\ (4).$$

Всѣки коренъ на уравнението (3), като обръща $A-B$ въ нула, ще обръща и произведението $C(A-B)$ въ нула. Слѣдов., всѣки коренъ на (3) удовлетворява и (4).

Обратно, всѣки коренъ на (4) обръща произведението $C(A-B)$ въ нула; но тъй като числената величина на С е опрѣдѣлена и различна отъ нула, то $A-B$ трѣбва да се обръща въ нула. Слѣдов., всѣки коренъ на (4) удовлетворява и (3).

Явно е, че теоремата остава вѣрна и тогава, когато дѣлимъ двѣтѣ страни на уравнението съ единъ и сѫщъ изразъ; защото да дѣлимъ съ С, ще каже да умножимъ съ $\frac{1}{C}$ и ако числената величина на С е опрѣдѣлена и различна отъ нула, то и числената величина на $\frac{1}{C}$ е сѫщо опрѣдѣлена и различна отъ нула.

Казахме, че численатата величина на С трѣбва да бѫде опрѣдѣлена и различна отъ нула. Ще изслѣдваме случаитѣ, когато тия условия не могатъ се изпълни.

Ако за извѣстни значения на неизвѣстната С се обръща въ нула, то уравнението (2) ще се удовлетворява отъ всичкитѣ корени на уравнението (1); обратно, не всѣкога коренитѣ на (2) ще удовлетворятъ (1).

Примѣръ. Нека умножимъ двѣтѣ страни на уравнението

$$x-5=3x-7$$

съ $x-4$; полученото уравнение

$$(x-5)\ (x-4)=(3x-7)\ (x-4)$$

се удовлетволява за $x=1$. което е коренъ на даденото уравнение;

*) Само за тия значения на неизвѣстнитѣ, за които С има опрѣдѣлена числена величина, различна отъ нула.

но полученото уравнение допуща и рѣшението $x=4$, което не удовлетворява даденото уравнение.

Ако за извѣстни значения на неизвѣстнитѣ числената величина на C е неопрѣдѣлена, то всичкитѣ корени на (2) ще удовлетворяватъ (1); но възможно е, щото уравнението (2) да не допуща всичкитѣ корени на (1).

Примѣръ. Нека умножимъ двѣтѣ страни на уравнението

$$(x-5)(2x-3)=o$$

съ $\frac{1}{x-5}$; полученото уравнение

$$2x-3=o$$

се удовлетворява отъ рѣшението $x=\frac{3}{2}$, което е коренъ на даденото уравнение.

Отъ казаното слѣдва, че съ умножаване двѣтѣ страни на уравнението съ изразъ, на който числената величина за извѣстни значения на неизвѣстнитѣ става неопрѣдѣлена или нула, се унищожаватъ нѣкои корени, или пъкъ се въвеждатъ чужди корени.

И тъй, ако никой коренъ на уравнението (2) не обръща C въ нула и никой коренъ на уравнението (1) не обръща C въ неопрѣдѣлена величина, то доказаната теорема е вѣрна и уравненията (1) и (2) сѫ еквивалентни. Така, уравненията

$$\frac{3}{2x-5}=7 \text{ и } 3=7(2x-5)$$

сѫ еквивалентни уравнения.

c). Ако умножимъ двѣтѣ страни на дадено рационално дробно уравнение съ общия знаменатель на двѣтѣ страни, ще получимъ уравнение, което е еквивалентно на даденото.

На рационално дробно уравнение всѣкога може да се даде вида

$$\frac{A}{B}=0 \ . \ . \ . \ . \ (1),$$

дѣто A и B сѫ цѣли многочлени, относително неизвѣстнитѣ. Ако за никакви значения на неизвѣстнитѣ A и B не се обръщатъ едновременно въ нула, то за да може $\frac{A}{B}$ да е равно на нула, трѣбва и е достатъчно, щото A да е равно на нула. Тогава уравнението (1) е еквивалентно съ уравнението

$$A=0 \ . \ . \ . \ . \ (2).$$

Ако за извѣстни значения на неизвѣстнитѣ A и B се обръщатъ едновременно въ нула, то тия значения на неизвѣстнитѣ ще удовлетворяватъ (2), но може да не удовлетворяватъ (1), защото за тѣзи значения дробьта $\frac{A}{B}$ може и да не е равна на нула.

Да се намѣри уравнението (2), еквивалентно на (1), ще рече да се освободи уравнението отъ знаменателитѣ.

4. Степень на уравнението.

Нека е дадено уравнение, на което и двѣтѣ страни сѫ цѣли изрази, относително неизвѣстнитѣ. На това уравнение може да се даде вида

$$A=0. \ (\S\ 18,\ 3,\ слѣд.\ 1.).$$

Измѣрението на многочлена A, относително неизвѣстнитѣ, се нарича степень на уравнението. Така,

$$3x^2-4x+7=0$$

е уравнение отъ втора степень;

$$ax^2y-\frac{b^2}{c}xy+c^3x-d^3y=0$$

е уравнение отъ трета степень.

§ 19. Уравнения отъ първа степень съ една неизвѣстна.

1. Рѣшение на уравненията.

На всѣко уравнение отъ първа степень съ една неизвѣстна може да се даде вида

$$ax+b=o,$$

$$\text{или } ax=-b.$$

Ако a не е нула, то, като се раздѣлятъ двѣтѣ страни на последното уравнение на a, ще се получи

$$x=-\frac{b}{a},$$

което е рѣшение на даденото уравнение. Отъ това слѣдва правилото:

За да рѣшимъ дадено уравнение отъ първа степень съ една неизвѣстна, прѣнасяме всичкитѣ членове, които съдържатъ неизвѣстната, отъ едната страна на уравнението, а всичкитѣ извѣстни членове отъ другата му страна; правимъ привеждане на подобнитѣ членове и въ двѣтѣ страни и, ако слѣдъ това коефициентътъ на неизвѣстната е различенъ отъ нула, уравнението има само единъ коренъ, който ще намѣримъ, като раздѣлимъ двѣтѣ му страни съ този коефициентъ.

Примѣри.

1. $\frac{x}{3}-1+3x-\frac{1}{2}=\frac{2x}{3}-\frac{1}{3}+2-x.$

Като прѣнесемъ неизвѣстнитѣ членове отъ една страна и извѣстнитѣ отъ друга, получаваме

$$\frac{x}{3}+3x-\frac{2x}{3}+x=2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1$$

и слѣдъ привеждане на подобнитѣ членове:

$$\frac{11}{3}x=\frac{19}{6},$$

отдѣто $x=\frac{19}{6}:\frac{11}{3}=\frac{19}{22}.$

Ако уравнението съдържа дробни коефициенти, често пжти е по-удобно прѣдварително коефициентитѣ да се направятъ цѣли и тогава да се приложи горното правило.

2. $\frac{2x}{5}-3x+\frac{1}{5}=\frac{2}{3}-x-\frac{x}{15}.$

За да се освободимъ отъ знаменателитѣ, умножаваме двѣтѣ страни на даденото уравнение съ най-малкото общо кратно на тѣзи знаменатели и като приложимъ правилото, получаваме:

$$6x-45x+3=10-15x-x;$$
$$6x-45x+15x+x=10-3;$$
$$-23x=7;$$
$$x=-\frac{7}{23}.$$

2. Изслѣдване на уравнението $ax=b$.

Тукъ могатъ се прѣдстави слѣднитѣ случаи:

1. $a\neq0$ и $b\neq0$. Въ този случай x има едно опрѣдѣлено значение, което може да бжде положително или отрицателно.

2. $a\neq0$, $b=0$. Въ този случай уравнението зима вида $ax=0$ и се удовлетворява само отъ $x=0$. Слѣдов.,

$$x=\frac{b}{a}=\frac{0}{a}=0.$$

3. $a=0$, $b\neq0$. Въ този случай уравнението зима вида $0.x=b$ и не може да бжде удовлетворено отъ никое значение на x; спр., рѣшението е невъзможно. Отъ друга страна, имаме $x=\frac{b}{a}=\frac{b}{0}$.

Слѣдов., $\frac{b}{0}$ е признакъ за невъзможность.

Бѣлѣжка. Изразътъ $\frac{b}{0}$ се идентифицира съ знака ∞[1]), който е символъ на безконечность. На израза $\frac{b}{0}=\infty$ се давъ слѣдното тълкувание: ако знаменательтъ на една дробь се намалява, безъ да се измѣня числителя ѝ, то дробьта се увеличава и ако знаменательтъ почне да се приближава къмъ нула и стане по-малъкъ отъ всѣка най-малка, различна отъ нула, величина, която можемъ си прѣдстави, то дробьта ще стане по-голѣма отъ всѣка най-голѣма величина, която можемъ си прѣдстави. Приближаването на знаменателя къмъ нула може да стане или отъ къмъ областьта на положителнитѣ или пъкъ отъ онази на отрицателнитѣ числа; т. е., знаменательтъ, като се намалява, ще спазва знакъ, еднакъвъ съ тоя на числителя, или обратенъ на него. Слѣдов.,

$$\frac{b}{0}=\pm\infty \text{ и } \frac{b}{\pm\infty}=0.$$

1) Знакътъ ∞ е въведенъ въ употрѣбяване отъ английския математикъ Валисъ (1616—1703).

4. a=b=0. Въ този случай уравнението зима вида $0 . x=0$ и се удовлетворява отъ всѣка конечна величина за x; спр., рѣшението е неопрѣдѣлено. Отъ друга страна имаме

$$x=\frac{b}{a}=\frac{0}{0}.$$

Слѣдов., $x=\frac{0}{0}$ е символъ на неопрѣдѣленостьта.

Бѣлѣжка. Освѣнъ символътъ $\frac{0}{0}$, още и $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$ и др. сж сжщо символи на неопрѣдѣленость. Тия неопрѣдѣлени форми се срѣщатъ често при дирене численитѣ величини на дадени изрази. Въ подобни случаи трѣбва прѣдварително да извършимъ всички възможни упростявания, или да дадемъ другъ видъ на дадения изразъ, защото инъкъ търсената числена величина, безъ да бжде неопрѣдѣлена величина, зима неопрѣдѣленъ видъ.

Примѣри.

1. Дробьта $x=\frac{3a-6}{4a-8}$, при a=2, зима вида $\frac{6-6}{8-8}=\frac{0}{0}$; отъ друга страна

$$x=\frac{3(a-2)}{4(a-2)}=\frac{3}{4};$$

слѣдов., $x=\frac{3}{4}$, а не на $\frac{0}{0}$.

2. Дробьта $x=\frac{5a+2}{4a-3}$, при $a=\infty$, зима вида $\frac{\infty}{\infty}$; отъ друга страна

$$x=\frac{5a+2}{4a-3}=\frac{5+\frac{2}{a}}{4-\frac{3}{a}} \text{ и за } a=\infty,\ x=\frac{5}{4};$$

слѣдов., $x=\frac{5}{4}$, а не на $\frac{\infty}{\infty}$.

3. Изразътъ $x=\frac{4}{5a+2}\cdot\frac{15a+6}{2}$ при $a=\infty$, зима вида $0 . \infty$; отъ друга страна

$$x=\frac{4}{5a+2}\cdot\frac{15a+6}{2}=\frac{4.3(5a+2)}{2(5a+2)}=\frac{4.3}{2}=2.3=6.$$

3. Рѣшение на уравнения, които нагледъ не сж отъ първа степень.

Рѣшението на уравнения, които на пръвъ погледъ нѣматъ вида на уравнение отъ първа степень, се привежда често пжти въ рѣшение на уравнение отъ първа степень съ една неизвѣстна. Ще приведемъ нѣкои примѣри.

1. Уравнението

$$(x-1)(x-3)+3x-2=x^2-4$$

изглежда да е отъ втора степень; обаче, слѣдъ като го прѣработимъ, получаваме

$$-x+5=0,$$

отдѣто $x=5.$

2. По нѣкога, като освободимъ уравнението отъ знаменателитѣ, получаваме уравнение отъ първа степень. Така, слѣдъ привеждане въ еднакъвъ знаменатель, уравнението

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{2}{x-3}$$

зима вида

$$\frac{(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)-2(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}=0,$$

което е еквивалентно на даденото уравнение, освѣнъ за 1, 2 и 3, които обрѣщатъ знаменателя въ нула. Като прѣработимъ получаваме

$$3x+5=0,$$

отдѣто

$$x=-\frac{5}{3},$$

което е рѣшение на даденото уравнение, понеже не обрѣща знаменателя $(x-1)(x-2)(x-3)$ въ нула.

4. Прѣдметъ на алгебрата.

Слѣдъ като се запознахме съ рѣшението макаръ и на най-проститѣ уравнения, можемъ вече опрѣдѣли прѣдмета на алгебрата.

Алгебрата е наука, която има за цѣль да обобщи числата и дѣйствията съ тѣхъ и да даде правила за прѣобразуване на алгебричнитѣ изрази и за рѣшаване на уравненията.

5. Съставяне уравнения съ една неизвѣстна.

Въ всѣка задача се даватъ условия, които свързватъ нѣколко извѣстни и неизвѣстни величини; зависимостьта между извѣстнитѣ и неизвѣстнитѣ величини се изразява чрѣзъ равенство; такъво изразяване се нарича съставяне на уравнение.

Различнитѣ задачи изискватъ и различни начини за съставяне на уравнение; ето защо, не може да се даде никакво общо правило; ще посочимъ само слѣднитѣ сѫществени упѫтвания.

Величината, която се дири, или ако се диритъ повече зависими по между си величини, то една отъ тѣхъ се означава съ x. Нѣкоя отъ величинитѣ се изразява по два различни начина чрѣзъ даденитѣ величини и неизвѣстната (съ която се работи, като съ извѣстна); тия два израза се съединяватъ чрѣзъ знака на равенство. Двѣтѣ страни на съставеното уравнение носятъ сѫщото наименование, като избраната величина и затова наименованието се изоставя въ уравнението. За коя величина да се съставятъ равнитѣ два израза е въпросъ, който изисква по-близко запознаване съ условията на задачата; понѣкога се случва изборъ измежду нѣколко величини (въ малко случаи самата неизвѣстна); кой изборъ е най-удобенъ — това може да се усвои само чрѣзъ практика.

Обикновево съ x се означава величината, която се дири непосрѣдствено, но въ отдѣлни случаи, за прѣпорѫчване е, да се означава съ x друга нѣкоя величина, чрѣзъ която лесно се опрѣдѣля тая, що се дири.

Примѣръ 1. Едно лице иска да продаде часовника си чрѣзъ лотария и за тая цѣль издава извѣстно число лозове. Ако продава всѣки лозъ по 2 лева, той ще има загуба 8 лв.; но ако продава по 2·5 лв., той ще спечели 2 лева. Колко му струва часовникътъ и колко лоза е издалъ?

Рѣшение.

1). Нека часовникътъ струва x лв.; понеже като продава всѣки лозъ по 2 лв., ще има загуба 8 лв., той ще земе отъ всичкитѣ лозове не x лв., а 8 лева по малко; спр., x—8 лв.; числото на лозоветѣ е $\frac{x-8}{2}$. Спорѣдъ второто условие, като продава всѣки лозъ по 2·5 лв., той ще вземе не x лв., а x+2 лв.; числото на лозоветѣ е $\frac{x+2}{2\cdot 5}$. Слѣдов. уравнението е

$$\frac{x-8}{2}=\frac{x+2}{2\cdot 5},$$

отъ което намираме x=48 лв., а числото на лозоветѣ=20.

2. Нека числото на лозоветѣ е x. Спорѣдъ първото условие, лицето ще земе отъ x лоза по 2 лв., всичко 2x лв., а часовникътъ му струва не 2x лв., а 8 лв. повече, значи 2x+8. Спорѣдъ второто условие, той ще вземе 2·5x лева и часовникътъ му струва 2·5x—2 лв. Слѣдов., уравнението е

$$2x+8=2\cdot 5x-2,$$

отъ което ще намѣримъ x = 20; часовникътъ струва 2x+8=48 лв.

Примѣръ 2. Отъ станцията A тръгва къмъ станцията B тренъ, който въ всѣки 4 минути изминава 3 к. м. пѫть и отъ станцията B за станцията A тренъ, който изминава всѣки 5 мин. 6 км. Колко е разстоянието между станцитѣ A и B, когато се знае, че треноветѣ се срѣщнали на станцията, която се намира тъкмо по срѣдата между A и B и вторият тренъ е пѫтувалъ 7 мин. по-малко?

Рѣшение.

1). Нека разстоянието AB=x км. Първиятъ тренъ изминава 3 км. за 4 мин., а $\frac{x}{2}$ км. за $\frac{4x}{6}$ минути; вториятъ тренъ изминава 6 к. м. за 5 минути, а $\frac{x}{2}$ км. — за $\frac{5x}{12}$ минути. Понеже, вториятъ тренъ пжтувалъ 7 минути по-малко, то

$$\frac{4x}{6}=\frac{5x}{12}+8$$

е исканото уравнение, отъ което $x=28$ к. м.

2). Ако първиятъ тренъ срѣща втория слѣдъ x минути, то вториятъ ще пжтува до срѣщата само $x-7$ минути. Първиятъ тренъ изминава за 4 минути 3 к. м., а за x мин. — $\frac{3x}{4}$ к м.; вториятъ тренъ изминава за 5 мин. 6 к. м., а за $x-7$ мин. — $\frac{6(x-7)}{5}$ к.м. Понеже двата трена изминаватъ еднакъвъ пжть до срѣщата, то исканото уравнение е

$$\frac{3x}{4}=\frac{6(x-7)}{5},$$

което дава $x=18^2/_3$ мин. Първиятъ тренъ ще измине за $18^2/_3$ мин. 14 к. м.; слѣдов., разстоянието $AB=28$ к. м.

§ 20. Неравенства отъ първа степень съ една неизвѣстна.

1. Опрѣдѣления и означения.

Ако сж дадени два алгебрични изрази A и B, които съдържатъ бръквитѣ x, y, z . . . . . и се иска да се намѣрятъ за тия букви съотвѣтно величини, за които величината на A да е по-голѣма отъ величината на B, то казватъ, че се иска да се рѣши неравенсгвото

$$A>B.$$

x, y, z . . . . сж неизвѣстни, а системата отъ величини, която удовлетворява неравенството, е едно негово рѣшение. A и B сж двѣтѣ страни на неравенството.

За разлика на тия неравенства отъ численитѣ неравенства, наричатъ ги условни неравенства.

Двѣ неравенства сж еквивалентни, ако иматъ едни и сжщи рѣшения.

2. Рѣшение на неравенствата.

Дадено неравенство се прѣобразува въ еквивалентно нему съ помощьта на сжщитѣ теореми, съ които се прѣобразуватъ и уравненията, съ тая разлика само, че ако умножимъ двѣтѣ страни на дадено условно неравенство съ единъ и сжщъ изразъ, ще получимъ еквивалентно неравенство; това неравенство е отъ вида на първото, ако множительтъ*) е положителенъ и има видъ обратенъ на първото, ако множительтъ е отрицателенъ.

На всѣко условно неравенство отъ първа степень съ една неизвѣстна може да се даде вида

$$ax+b>0 \; . \; . \; . \; . \; . (1),$$

като се прѣнесатъ всичкитѣ членове въ едната страна на неравенството. Това неравенство е еквивалентно на

$$ax>-b \; . \; . \; . \; . \; . (2).$$

Ако a е положително:

$$x>-\frac{b}{a}$$

и ако a е отрицателно:

$$x<-\frac{b}{a}.$$

Последнитѣ рѣшения показватъ, че на x можемъ да даваме значения, които сж по-голѣми отъ $-\frac{b}{a}$, при $a>0$ и по-малки отъ $-\frac{b}{a}$, при $a<0$.

Въ случай, че $a=0$, неравенството (1) зима вида

$$b>0,$$

което може и не може да се удовлетворява за всѣкакви значения на x, споредъ това дали b е положително, или отрицателно. Слѣдов., неравенството или се удовлетворява за всѣкакво значение на x, или е невъзможно.

*) Трѣбва да се внимава, щото множительтъ да запазва постоянно единъ и сжщъ знакъ. Напр., може да е равенъ на $(x+1)^2$ или на сума отъ нѣколко квадрати и т. н.

Примѣръ. Да се рѣши неравенството

$$2x-\frac{x}{3}+\frac{1}{2}>3x-\frac{1}{3}+\frac{x}{6}.$$

Като се освободимъ отъ знаменателитѣ, ще получимъ послѣдователно слѣднитѣ еквивалентни неравенства:

$$12x-2x+3>18x-2+x;$$
$$12x-2x-18x-x>-2-3;$$
$$-9x>-5;$$
$$x<\frac{5}{9}.$$

§ 21. Биномъ отъ първа степень.

1. Понятие за функция.

Величина, която може да приема безбройно много значения, се нарича промѣнлива величина. Ако значенията, които приема промѣнливата величина сѫ произволни; спр., не зависятъ отъ нищо, то промѣнливата величина се нарича независима промѣнлива. Ако значенията на една промѣнлива величина зависятъ отъ произволнитѣ значения на друга независима промѣнлива величина, то казваме, че първата величина е функция на втората. Промѣнливата величина, която е функция на друга промѣнлива, се нарича още и зависима промѣнлива.

Напр., дължината на окрѫжностьта е функция на нейния радиусъ; лицето на трижгълникъ съ дадена основа е функция на неговата височина: дължината на желѣзенъ прътъ е функция на неговата температура и пр.

Примѣри. 1. Ако означимъ дължината на окрѫжностьта съ y и радиуса ѝ съ x, то $y=2\pi x$; т. е., дължината на окрѫжностьта е функция на нейния радиусъ.

2. Ако означимъ лицето на трижгълника съ y, основата — съ a и височината — съ x, то $y=\frac{ax}{2}$; спр., лицето на трижгълникъ съ дадена основа е функция на неговата височина.

3. Ако една точка се движи и изминава 4 м. въ секунда, то като означимъ пѫтя съ y и врѣмето (изразено въ

секунди) съ x, ще имаме $y=4x$; спр., пѫтьтъ е функция на врѣмето.

Зависимостьта на промѣнливата y отъ промѣнливата x се изразява чрѣзъ равенство, което ни дава възможность да изчисляваме величината на y, когато е дадена тая на x.

Най-проститѣ функции сѫ тия, въ които зависимата промѣнлива y е изразена чрѣзъ биномъ отъ първа степень, относително независимата промѣнлива x; такива функции се наричатъ линейни функции.

Напр., равенството

$$y=4x-5$$

опрѣдѣля една функция y на независимата x. Величината y зависи отъ x и, когато е дадена послѣднята, можемъ да изчислимъ първата. Биномътъ $4x-5$ е отъ първа степень относително x, затова функцията y е линейна функция.

Общиятъ видъ на биномъ отъ първа степень, относително x, е $ax+b$, затова и общиятъ видъ на линейната фунция y е

$$y=ax+b,$$

дѣто, a и b сѫ дадени величини и за разлика отъ промѣнливитѣ величини, тѣхъ наричаме постоянни величини.

2. Измѣнение на линейната функция.

Нека е дадена функцията

$$y=ax+b$$

и да дадемъ на x двѣ произволни значения x_1 и x_2, дѣто $x_1>x_2$. За тия двѣ значения на x функцията y приема съответно значенията y_1 и y_2, дѣто

$$y_1=ax_1+b$$
и
$$y_2=ax_2+b.$$

Тукъ могатъ се прѣдстави слѣднитѣ два случая:

1). $a>o$. Като умножимъ двѣтѣ страни на неравенството

$$x_1>x_2$$

съ a, ще получимъ неравенството

$$ax_1 > ax_2,$$

отдѣто $$ax_1 + b > ax_2 + b,$$

което показва, че $$y_1 > y_2.$$

Виждаме, че когато независимата x $\left\{\begin{matrix}\text{расте}\\ \text{намалява}\end{matrix}\right\}$, също и функцията $\left\{\begin{matrix}\text{расте}\\ \text{намалява}\end{matrix}\right\}$. Въ този случай казваме, че независимата промѣнлива и функцията се измѣняватъ въ една и сжща посока. Функция, която се измѣнява въ една и сжща посока съ независимата си промѣнлива, се нарича **растяща (възходяща)** функция.

2) $a < o$. Ако умножимъ двѣтѣ страни на неравенството

$$x_1 > x_2$$

съ *a*, ще получимъ неравенството

отдѣто $$ax_1 < ax_2,$$
$$ax_1 + b < ax_2 + b,$$

което показва, че $$y_1 < y_2.$$

Виждаме, че когато независимата x $\left\{\begin{matrix}\text{расте}\\ \text{намалява}\end{matrix}\right\}$, функцията *y* напротивъ $\left\{\begin{matrix}\text{намалява}\\ \text{расте}\end{matrix}\right\}$. Въ този случай казваме, че независимата и функцията се измѣняватъ въ обратна посока. Функция, която се измѣнява въ обратна посока на независимата си промѣнлива, се нарича **намаляюща (низходяща)** функция.

Бѣлѣжка. Функцията $y = ax + b$ можемъ направи $\left\{\begin{matrix}\text{по-голѣма}\\ \text{по-малка}\end{matrix}\right\}$ отъ всѣка дадена величина, като дадемъ на x съотвѣтни значения.

Това се вижда най-добрѣ отъ слѣднитѣ примѣри:

1). Нека е дадена функцията $y = \frac{x}{10} - 3$ и се иска *y* да е по-голѣмо отъ 1 милионъ. Рѣшаваме неравенството

$$\frac{x}{10} - 3 > 1{,}000{,}000$$

и намираме $$x > 10{,}000{,}030.$$

И така, за да бжде $y > 1{,}000{,}000$, трѣбва на *x* да даваме значения, по-голѣми отъ 10,000,030.

2). Ако е дадена функцията $y = 0{\cdot}2 - 0{\cdot}5x$ и искаме $y > 1{,}000{,}000$, то трѣбва

$$0{\cdot}2 - 0{\cdot}5x > 1{,}000{,}000,$$

отдѣто $$x < -1{,}999{,}999{\cdot}6.$$

И така, за да бжде $y > 1{,}000{,}000$, трѣбва на x да даваме значения, по-малки отъ $-1{,}999{,}999{\cdot}6$.

Нека да забѣлѣжимъ още, че функцията

$$y = ax + b$$

е равна на нула за онова значение на *x*, за което

$$ax + b = 0;$$

т. е., за $$x = -\frac{b}{a},$$

което е коренъ на бинома $ax + b$.

Заключение.

1). $a > 0$. Като даваме на *x* послѣдователно произволни значения, като започнемъ отъ отрицателни и твърдѣ голѣми по абсолютна стойность значения до положителни и твърдѣ голѣми значения, което изговаряме така: **като расте *x* отъ $-\infty$ до $+\infty$**, то функцията *y* **постоянно расте отъ $-\infty$ до $+\infty$**; слѣдов., функцията отначало е **отрицателна** до $x = -\frac{b}{a}$, дѣто е равна на **нула**, а слѣдъ това е **положителна**.

2). $a < 0$. Ако *x* **расте отъ $-\infty$ до $+\infty$**, функцията y **намалява отъ $+\infty$ до $-\infty$**; слѣдов., функцията отначало е **положителна** до $x = -\frac{b}{a}$, дѣто е равна на **нула**, а слѣдъ това е **отрицателна**.

3. Таблица за измѣненията на линейната функция.

За измѣненията на функцията $ax + b$ се съставя таблица отъ двѣ колони, въ първата отъ които се написватъ значенията на *x*, растящи послѣдователно отгорѣ надолу, а въ втората се вписватъ съотвѣтнитѣ значения на функцията.

$a>0$		$a<0$	
x	y	x	y
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
расте	расте	расте	намалява
$-\frac{b}{a}$	0	$-\frac{b}{a}$	0
расте	расте	расте	намалява
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Като се прочете таблицата отгорѣ надолу, ще се види какъ се измѣнява функцията.

§ 22. Пропорционални величини.

1. Право пропорционални величини.

Нека ни е далена функцията

$$y=ax.$$

Ако дадемъ на *x* значения:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n,$$

и съотвѣтнитѣ значения на *y* означимъ съ

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n,$$

то $y_1=ax_1,\ y_2=ax_2,\ y_3=ax_3, \ldots,\ y_n=ax_n$

и $\frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2}=\frac{y_3}{x_3}=\ldots=\frac{y_n}{x_n}=a;$

т. е., отношението на двѣ съотвѣтни значения е величина постоянна.

Такива двѣ величини, на които отношението отъ произволни двѣ съотвѣтни значения е величина постоянна, се наричатъ пропорционални величини, а постоянното отношение се нарича показатель на пропорционалностьта.

Примѣри.

1). Ако килограмътъ на нѣкоя стока струва m лв., то x кгр. ще струватъ mx лв.: затова функцията

$$y=mx$$

ни дава зависимостьта между стойностьта на стоката и нейното количество, отдѣто виждаме, че стойностьта на една стока е пропорционална съ нейното количество.

2). Ако единъ пѣшеходецъ изминава на часъ m км. пѫть, то за x ч. ще измине mx км.; затова функцията

$$y=mx$$

ни дава зависимостьта между врѣмето и изминатия прѣзъ това врѣме пѫть, отдѣто виждаме, че пѫтьтъ при равномѣрното движение е пропорционаленъ на врѣмето. Отношението на пропорционалностьта е равно на скоростьта.

Ако отношението на пропорционалностьта е 1, то величинитѣ сѫ равни.

2. Обратно пропорционални величини.

Нека е далена функцията

$$y=\frac{a}{x}.$$

Ако дадемъ на *x* значения:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n,$$

а съотвѣтнитѣ значения на *y* означимъ съ

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n,$$

то $y_1=\frac{a}{x_1},\ y_2=\frac{a}{x_2},\ y_3=\frac{a}{x_3}, \ldots,\ y_n=\frac{a}{x_n}$

и $x_1y_1=x_2y_2=x_3y_3=\ldots=x_ny_n=a;$

т. е., произведението на двѣ съотвѣтни значения е величина постоянна.

Такива двѣ величини, на които произведението отъ произволни двѣ съотвѣтни значения е величина постоянна, се наричатъ обратно пропорционални величини, а постоянното произведение се нарича показатель на обратната пропорционалность.

Примѣри.

1). Ако единъ работникъ може да извърши извѣстна работа за m дни, то x работника ще могатъ да извършатъ сѫщата работа за $\frac{m}{x}$ дни; затова функцията

$$y = \frac{m}{x}$$

ни дава зависимостьта между числото на работницитѣ и врѣмето, нуждно за извѣстна работа. Числото на работницитѣ е обратно пропорционално съ врѣмето.

2). Ако едно подвижно тѣло, като се движи съ единица скорость, изминава извѣстно разстояние за m часа, то съ скорость x би изминало сѫщото разстояние за $\frac{m}{x}$ часа; затова функцията

$$y = \frac{m}{x}$$

ни дава зависимостьта между врѣмето и скоростьта, отдѣто виждаме, че врѣмето за изминаване на извѣстенъ пѫть е е обратно пропорционално на скоростьта.

Ако показательтъ на обратната пропорционалность е 1, то величинитѣ сѫ обратни или реципрочни.
