Бл. Димитровъ и Д-ръ Т. Дедовъ.

АЛГЕБРА

ЗА ВТОРИ КЛАСЪ

НА

МЪЖКИТѢ И ДѢВИЧЕСКИТѢ ПЪЛНИ И НЕПЪЛНИ ГИМНАЗИИ.

Поправено издание споредъ най-последната програма, изработена отъ Висшия Учебенъ Съветъ презъ месецъ юлий 1910 година.

Одобрена отъ Министерството на Народната Просвѣта съ заповѣдь № 2584 отъ 20 Августъ 1910 год.

Второ издание. **Цѣна 1·50 лева.**

СОФИЯ
Печатница П. Глушковъ
1910.

Прѣдговоръ къмъ второто издание.

Това издание се отличава отъ първото издание по това, че е нагласено споредъ най-послѣдната учебна програма, приета отъ висшия учебенъ съвѣтъ въ сесията му прѣзъ това лѣто. За тая цѣль се изоставиха: рѣшение на системи отъ първа степень по начина на Безу и чрѣзъ детерминанти, изслѣдване на уравнението $ax+b=0$, неопрѣдѣлени уравнения, кубове и кубични корени на числа и многочлени, максимумъ и минимумъ на тричлена ax^2+bx+c, а се въведе графично изслѣдване рѣшението на квадратното уравнение съ една неизвѣстна.

Съотвѣтни измѣнения се направиха и въ сборника за II класъ.

София, 25.VIII. 1910 год.

Съставителитѣ.

СЪДЪРЖАНИЕ.

Глава I.

Уравнения отъ първа степень съ двѣ и повече неизвѣстни.

Глава II.

Степенуване.

Глава III.

Коренуване.

Глава IV.

Ирационални изрази.

Извлѣчение отъ програмата по математика, приета отъ висшия учебенъ съвѣтъ прѣзъ юлий 1910 г.

Класъ II.

А. Мжжка гимназия.

I. Реаленъ отдѣлъ.

Алгебра.

Повторение. Рѣшение на системи уравнения отъ първа степень съ двѣ и повече неизвѣстни; изслѣдване рѣшенията на такива системи.

Основни теореми върху степени и корени съ цѣли и положителни показатели. Квадрати на многочлени и десетични числа. Квадратенъ коренъ отъ многочлени и десетични числа. Понятие за ирационално и имагинерно число въ врѣзка съ понятието за коренъ; по-прости ирационални изрази.

Уравнения отъ втора степень. Квадратни уравнения съ едно неизвѣстно, свойства на коренитѣ. Рѣшение на уравнения, приводими къмъ квадратно. Задачи за уравнения отъ втора степень.

Измѣнения на тричлена ax_2+bx+c и неговото графическо прѣдставяне; неравенства отъ втора степень.

Рѣшение на по-прости системи уравнения отъ втора степень съ двѣ неизвѣстни.

II. Полукласически отдѣлъ.

Сжщо както въ реалния отдѣлъ, но по-кратко.

Алгебра.

Уравнения отъ първа степень съ едно неизвѣстно (числени и буквени). Рѣшение на съставени уравнения и задачи за съставяне такива. Рѣшение на системи уравнения отъ първа степень съ двѣ и повече неизвѣстни (безъ способа на Безу).

Повдигане едночлени въ степень и извличане отъ тѣхъ корени. Повдигане многочленъ въ квадратъ; извличане квадратенъ коренъ отъ числа. Понятие за ирационални изрази.

Уравнения отъ втора степень. Квадратни уравнения. Биквадратни уравнения. Най-прости системи уравнения отъ втора степень.

Б. Дѣвическа гимназия.

I. Реаленъ отдѣлъ.

Сжщо както въ реалния отдѣлъ на мжжка гимназия.

II. Полукласически отдѣлъ.

Сжщо както въ класическия отдѣлъ на мжжка гимназия.

ГЛАВА I.
Уравнения отъ първа степень съ двѣ и повече неизвѣстни.

Опрѣдѣления.

§ 1. **Задача.** Сборътъ на двѣ числа е 25, а разликата имъ е 5; кои сж тия числа?

Рѣшение. Ако означимъ едното число съ x, то споредъ първото условие на задачата, другото число ще е $25-x$. Споредъ второто условие трѣбва

$$x-(25-x)=5,$$

отдѣто

$$x=15 \text{ и } 25-x=10.$$

Друго рѣшение. Понеже се пита за двѣ числа, то за рѣшението на задачата ще си послужимъ съ двѣ неизвѣстни. Нека числата сж x и y. Тогава споредъ условията на задачата трѣбва:

$$x+y=25 \text{ и } x-y=5.$$

Въ тѣзи двѣ уравнения x и y означаватъ едни и сжщи числа, затова величината на едната неизвѣстна отъ едното уравнение можемъ замѣни въ другото уравнение. Ако направимъ това, ще имаме:

$$y=25-x \text{ (отъ първото уравнение)}$$

и

$$x-(25-x)=5 \text{ (отъ второто уравнение)},$$

отдѣто

$$x=15 \text{ и } y=10.$$

§ 2. **Система отъ уравнения.** Нѣколко уравнения, въ които неизвѣстнитѣ означаватъ едни и сжщи числа, наричаме съвмѣстни уравнения, или казваме, че съставятъ система отъ уравнения. Напр., уравненията

$$\begin{cases} x+y=15 \\ x-y=5 \end{cases}$$

съставятъ система отъ двѣ уравнения.

Да рѣшимъ една система, ще рече да намѣримъ тѣзи значения на неизвѣстнитѣ, при които уравненията ѝ се обрѣщатъ въ тождества. Тѣзи значения съставятъ система отъ рѣшения (корени) на дадена система. Системи, които иматъ една и сжща система рѣшения, се наричатъ еквивалентни системи.

За рѣшаването на дадена система отъ уравнения има нѣколко начина. Цѣльта на тия начини е да се приведе дадената система въ друга система, на която числото на уравненията и числото на неизвѣстнитѣ сж съ единица по-малко.

Система отъ двѣ уравнения съ двѣ неизвѣстни.

§ 3. **Начинъ чрѣзъ замѣстване.** Нека е дадена системата

$$\begin{cases} 3x+y=15 \\ 5x-4y=8. \end{cases}$$

Рѣшаваме първото уравнение за y и намираме

$$y=15-3x.$$

Понеже y има еднакви значения и въ двѣтѣ уравнения, то като замѣстимъ въ второто уравнение y съ $15-3x$, ще получимъ

$$5x-4(15-3x)=8,$$

отдѣто

$$x=4.$$

Слѣдъ това:

$$y=15-3x=15-3.4=15-12=3.$$

Слѣдователно $x=4$ и $y=3$.

Правило. Рѣшаваме едното уравнение за една отъ неизвѣстнитѣ, като считаме другата неизвѣстна за дадена величина и намѣрения за нея изразъ замѣстваме въ другото уравнение; получаваме едно уравнение съ една неизвѣстна, която лесно опрѣдѣляме. Като замѣстимъ намѣреното число въ намѣрения по-рано изразъ за първата неизвѣстна, ще опрѣдѣлимъ и послѣдната неизвѣстна.

Начинътъ чрѣзъ замѣстване се употрѣбява съ полза особно, когато една отъ неизвѣстнитѣ влиза въ нѣкое отъ уравненията съ коефициентъ ± 1. Инъкъ, несгодностьта му състои въ това, че се получава уравнение съ знаменатели, които трѣбва отпослѣ да се прѣмахватъ

§ 4. **Начинъ чрѣзъ сравнение.** 1. Нека е дадена системата

$$\begin{cases} 5x+2y=29 \\ 2x-3y=4. \end{cases}$$

Рѣшаваме и двѣтѣ уравнения за една и сжща неизвѣстна, напр. за x; намираме

$$x=\frac{29-2y}{5} \text{ и } x=\frac{4+3y}{2}.$$

Понеже x има едно и сжщо значение и въ двѣтѣ уравнения, то

$$\frac{29-2y}{5}=\frac{4+3y}{2}$$

отдѣто

$$y=2.$$

Слѣдъ това: $x=\frac{29-2.2}{5}=5$, или $x\frac{4+3.2}{2}=5$.

Правило. Рѣшаваме и двѣтѣ уравнения за една и сжща неизвѣстна, като допускаме, че другата неизвѣстна е опрѣдѣлена и сравняваме полученитѣ два израза. Получаваме едно уравнение съ една неизвѣстна, която опрѣдѣляме. Втората неизвѣстна лесно се опрѣдѣля.

2. Нека рѣшимъ по този начинъ и системата

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a_1+b_1y=c_1, \end{cases}$$

дѣто a, b, c, a_1, b_1, c_1, сж дадени величини.

Като рѣшимъ двѣтѣ уравнения за x, ще получимъ

$$x=\frac{c-by}{a} \text{ и } x=\frac{c_1-b_1y}{a_1}.$$

Отъ тукъ

$$\frac{c-by}{a}=\frac{c_1-b_1y}{a_1},$$

отдѣто

$$y=\frac{ac_1-a_1c}{ab_1-a_1b}$$

и

$$x=\frac{c-by}{a}=\frac{c_1-b_1y}{a_1}=\frac{b_1c-bc_1}{ab_1-a_1b}.$$

Несгодностьта на този начинъ се състои въ това, че се получава уравнение съ знаменатели, които отпослѣ трѣбва да се прѣмахватъ.

§ 5. **Начинъ чрѣзъ събиране или изваждане.**

1. Нека е дадена системата

$$\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=2. \end{cases}$$

Ако съберемъ почленно двѣтѣ уравнения, ще получимъ

$$2x=12,$$

и

$$x=6.$$

Ако извадимъ почленно двѣтѣ уравнения, ще получимъ

$$2y=8,$$

и

$$y=4.$$

Въ дадената система коефициентитѣ прѣдъ всѣка отъ неизвѣстнитѣ иматъ равни абсолютни величини. Всѣка друга система можемъ рѣши по този начинъ, като уравнимъ по-напрѣдъ коефициентитѣ прѣдъ една отъ неизвѣстнитѣ чрѣзъ умножаване уравненията съ подходящи множители.

Напр., нека рѣшимъ системата

$$\begin{cases}5x-y=5\\-2x+3y=11.\end{cases}$$

Като умножимъ първото уравнение съ 3, ще получимъ системата

$$\begin{cases}15-3y=15\\-2x+3y=11,\end{cases}$$

отъ която, чрѣзъ събиране, намираме

$$13x=26,$$

и

$$x=2.$$

Ако пъкъ умножимъ първото уравнение съ 2, а второто съ 5, ще получимъ системата

$$\begin{cases}10x-2y=10\\-10x+15y=55,\end{cases}$$

отъ която, чрѣзъ събиране, намираме

$$13y=65$$

и

$$y=5.$$

Правило. Изравняваме коефициентитѣ прѣдъ една отъ неизвѣстнитѣ; събираме уравненията, ако изравненитѣ коефициенти иматъ различни знакове и ги изваждаме, ако тѣзи знакове сж еднакви.

Изравняването на коефициентитѣ става така: намираме най-малкото имъ кратно; дѣлимъ това число на всѣки отъ тѣзи коефициенти; съ полученитѣ частни умножаваме съотвѣтнитѣ уравнения; получаваме едно уравнение съ една неизвѣстна, която лесно опрѣдѣляме. Другата неизвѣстна опрѣдѣляме или изъ едно отъ даденитѣ уравнения, или пъкъ чрѣзъ изравняване коефициентитѣ на тая неизвѣстна.

2. Ще рѣшимъ по този начинъ системата

$$\begin{cases}ax+by=c\\a_1x+b_1y=c_1,\end{cases}$$

въ която a, b, c, a_1, b_1, c_1 сж цѣли числа. Изравняваме коефициентитѣ на x:

$$\begin{cases}aa_1x+a_1by=a_1c\\aa_1x+ab_1y=ac_1.\end{cases}$$

Изваждаме и получаваме

$$a_1by-ab_1y=a_1c-ac_1,$$

отдѣто

$$y=\frac{a_1c-ac_1}{a_1b-ab_1}=\frac{ac_1-a_1c}{ab_1-ab_1}.$$

Слѣдъ това: $x=\dfrac{c-by}{a}=\dfrac{c_1-b_1y}{a_1}=\dfrac{b_1c-bc_1}{ab_4-a_1b}.$

Начинътъ чрѣзъ събиране или изваждане е по-бързъ отъ другитѣ начини, особно, когато коефициентитѣ на нѣкое отъ неизвѣстнитѣ сж равни по абсолютни величини, или пъкъ могатъ лесно да се изравнятъ; въ всички други случаи този начинъ има тази добра страна, че не въвежда знаменатели въ изчислението.

Система отъ три уравнения съ три неизвѣстни.

§ 6. Рѣшаването на система отъ три уравнения съ три неизвѣстни се привежда къмъ рѣшаване на система отъ двѣ уравнения съ двѣ неизвѣстни.

Нека ни е дадена системата

$$\left|\begin{array}{l}3x-5y+z=8\\6x+2y-3z=4\\9x-6y+5z=15.\end{array}\right.$$

Като земемъ едно кое да е отъ уравненията съ всѣко отъ останалитѣ, ще получимъ двѣ системи отъ по двѣ уравнения съ три неизвѣстни. Изключваме една отъ неизвѣстнитѣ отъ двѣтѣ системи по кой да е отъ познатитѣ начини и получаваме система отъ двѣ уравнения съ двѣ неизвѣстни, която знаемъ да рѣшаваме. Двѣтѣ системи сж

$$\begin{cases}3x-5y+z=8\\6x+2y-3z=4\end{cases}\left|\begin{array}{l}3\\1\end{array}\right. \quad \text{и} \quad \begin{cases}3x-5y+z=8\\9x-6y+5z=15.\end{cases}$$

Изключваме z отъ първата система чрѣзъ изравняване на коефициентитѣ, а отъ втората чрѣзъ замѣстване.

$$\begin{array}{ll}9x-15y+3z=24 & z=8-3x+5y\\ \underline{6x+2y-3z=4} & \underline{9x-6y+5(8-3x+5y)=15}\\ 15x-13y=28 & -6x+19y=-25.\end{array}$$

Слѣдов., системата отъ двѣ уранения съ двѣ неизвѣстни е

$$\begin{cases}15x-13y=28\\6x-19y=25,\end{cases}$$

която, рѣшена по кой да е отъ познатитѣ начини, дава

$$x=1 \text{ и } y=-1.$$

Като замѣстимъ намѣренитѣ величини за x и y въ кое да е отъ даденитѣ уравнения, ще намѣримъ

$$z=o.$$

Правило: Отъ кое да е уравнение и всѣко отъ останалитѣ изключваме една и сжща неизвѣстна по кои и да е отъ познатитѣ начини и получаваме система отъ двѣ уравнения съ двѣ неизвѣстни, които лесно опрѣдѣляме. Третата неизвѣстна опрѣдѣляме отъ едно изъ даденитѣ уравнения, като замѣстимъ намѣренитѣ вече величини за двѣтѣ неизвѣстни.

Кой отъ начинитѣ е най-удобно да се употрѣби, зависи отъ вида на даденитѣ уравнения; но ако подберемъ съ по-голѣма съобразителность подходящия начинъ, то съ това ще упростимъ рѣшаването на дадената система значително.

Система отъ n уравнения съ n неизвѣстни.

§ 7. Рѣшението на система отъ n уравнения съ n неизвѣстни привеждаме къмъ рѣшаване на система отъ $n-1$ уравнения съ $n-1$ неизвѣстни по слѣдния начинъ.

Съединяваме кое да е отъ даденитѣ уравнения съ всѣко отъ останалитѣ и получаваме $n-1$ системи отъ по двѣ уравнения съ n неизвѣстни. Исключваме една и сжща неизвѣстна отъ всичкитѣ системи по кои да е отъ познатитѣ начини и получаваме $n-1$ уравнения съ $n-1$ неизвѣстни.

По този начинъ продължаваме да намаляваме числото на уравненията и на неизвѣстнитѣ съ по едно, до когато получимъ едно уравнение съ една неизвѣстна, която опрѣдѣляме. Слѣдъ това се връщаме послѣдователно назадъ; опрѣдѣляме отъ системата съ двѣ уравнения втора неизвѣстна, отъ системата съ три уравнения — трета неизвѣстна, до когато опрѣдѣлимъ и послѣдната неизвѣстна, като всѣкога прѣдварително замѣстяме неизвѣстнитѣ съ опрѣдѣленитѣ имъ вече величини.

Частни случаи.

§ 8. Не всѣки пжть е удобно да си служимъ съ изложенитѣ начини за рѣшаване на дадена система. Има случаи, когато е подобрѣ да се отклонимъ отъ тѣхъ. Ето нѣкои отъ тѣзи случаи:

I. Въ всѣко отъ уравненията не влизатъ всичкитѣ неизвѣстни. Неизвѣстнитѣ, които не влизатъ въ нѣкои отъ уравненията, сж изключени сами по себе си отъ тѣхъ и достатъчно е, слѣдов., да се изключатъ и отъ останалитѣ уравнения.

Напр., нека е дадена системата

$$\begin{cases} 7x-9z=19 \\ 4x-3y=7 \\ 2y+3z=9. \end{cases}$$

Изключваме z отъ първото и третото уравнения и получаваме системата

$$\begin{cases} 4x-3y=7 \\ 7x+6y=46, \end{cases}$$

отдѣто намираме $x=4$, $y=3$ и $z=1$.

II. Неизвѣстнитѣ влизатъ въ вида: $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$. Полагаме: $\frac{1}{x}=x_1$, $\frac{1}{y}=y_1$, $\frac{1}{z}=z_1$ и рѣшаваме получената система; отъ намѣренитѣ величини за x_1, y_1 и z_1 опрѣдѣляме тия за x, y и z.

Примѣри. 1.

$$\begin{cases} \frac{8}{x}+\frac{7}{y}-\frac{3}{z}=10 \\ \frac{9}{y}+\frac{2}{x}=20 \\ \frac{3}{z}-\frac{5}{x}=7. \end{cases}$$

Като извършимъ горното замѣстване, ще получимъ системата

$$\begin{cases} 8x_1+7y_1-3z_1=10 \\ 9y_1+2x_1=20 \\ 3z_1-5x_1=7, \end{cases}$$

отъ която намираме $x_1=1, y_1=2, z_1=4$. Слѣдов., $\frac{1}{x}=1$, $\frac{1}{y}=2$, $\frac{1}{z}=4$, отдѣто $x=1$, $y=\frac{1}{2}$ и $z=\frac{1}{4}$.

2.

$$\begin{cases} \frac{xy}{x+y}=\frac{2}{3} \\ \frac{yz}{y+z}=\frac{6}{5} \\ \frac{zx}{z+x}=\frac{3}{4}. \end{cases}$$

Най-напрѣдъ даваме на системата вида

$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy}=\frac{3}{2} \\ \frac{y+z}{yz}=\frac{5}{6} \\ \frac{z+x}{zx}=\frac{3}{4} \end{cases}$$

а послѣ вида

$$\begin{cases} \frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{3}{2} \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{3}{4}, \end{cases}$$

отдѣто: $x=1$, $y=2$, $z=3$.

III. **Въ състава на уравненията се забѣлѣзва нѣкаква правилность.**

Примѣри. 1.

$$\begin{cases} y+2x=4 \\ z+3y=9 \\ u+4z=16 \\ v+5u=25 \\ x+y+z+u+v=15. \end{cases}$$

Отъ 1-то уравнение: $y=4-2x$.
„ 2-то „ : $z+12-6x=9$ или $z=6x-3$.
„ 3-то „ : $u+24x-12=16$ или $u=28-24x$.
„ 4-то „ : $v+140-120x=25$ или $v=120x-115$.
„ 5-то „ : $x+4-2x+6x-3+28-24x+120x-115=15$, отдѣто: $x=1$. Слѣдъ това: $v=5$, $u=4$, $z=3$, $y=2$.

2.
$$\begin{cases} x+y=4 \\ y+z=8 \\ z+x=6. \end{cases}$$

Събираме почленно даденитѣ уравнения:

$$x+y+z=9.$$

Отъ полученото уравнение изваждаме послѣдователно всѣко отъ даденитѣ уравнения и намираме

$$z=5,\ x=1 \text{ и } y=3.$$

3.
$$\begin{cases} \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{5} \\ x+y+z=24. \end{cases}$$

Ако допуснемъ, че показательтъ на равнитѣ отношения е t, то $x=3t, y=4t, z=5t$ и $x+y+z=3t+4t+5t=12t=24$, отдѣто: $t=2$. Слѣдов., $x=6$, $y=8$, $z=10$.

Изслѣдване рѣшенията на система отъ двѣ уравнения съ двѣ неизвѣстни.

§ 9. Рѣшенията на системата

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a_1x+b_1y=c_1 \end{cases}$$

сж

$$x=\frac{b_1c-bc_1}{ab_1-a_1b} \text{ и } y=\frac{ac_1-a_1c}{ab_1-a_1b}.$$

1. **Общиятъ знаменатель на неизвѣстнитѣ не е равенъ на нула.** Неизвѣстнитѣ иматъ опрѣдѣлени значения, които биватъ положителни, отрицателни или равни на нула.

2. **Числителитѣ сж различни отъ нула, но общиятъ знаменатель е равенъ на нула.** Въ този случай

$$x=\frac{b_1c-bc_1}{0}=\infty \text{ и } y=\frac{ac_1-a_1c}{0}=\infty,$$

което показва, че рѣшенията сж невъзможни.

Наистина отъ равенството $ab_1-a_1b=0$ слѣдва, че $ab_1=a_1b$, или $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}$. Ако допуснемъ, че показательтъ на равнитѣ отношения е k, то $a=a_1k$, и $b=b_1k$. Като замѣстимъ въ уравнението $ax+by=c$ величинитѣ a и b съ равнитѣ имъ, ще получимъ $a_1kx+b_1ky=c$ или $a_1x+b_1y=\frac{c}{k}$, което противоречи на уравнението $a_1x+b_1y=c_1$ т. е. даденитѣ двѣ уравнения си противоречатъ и затова сж несъвмѣстими и не могатъ да съставятъ система.

Символътъ ∞ е билъ употрѣбенъ за първъ пжть 1655 година отъ английския математикъ Wallis въ съчинението „Arhitmetica infinitorum". Този знакъ е билъ употрѣбяванъ отъ Римлянитѣ за означаване на числото 1000. Мисли се, че това е дало поводъ, да отбѣлѣзватъ съ този знакъ много голѣми числа.

3. **Единъ отъ числителитѣ и общиятъ знаменатель сж равни на нула.** Въ този случай и другиятъ числитель е равенъ на нула, защото отъ равенствата

$$ab_1-a_1b=0 \text{ и } b_1c-bc_1=0,$$

слѣдва: $\frac{a}{a_1}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}$, отдѣто $ac_1-a_1c=0$. Значи, ако $x=\frac{0}{0}$, то и $y=\frac{0}{0}$; сир. неизвѣстнитѣ сж неопрѣдѣлени и системата се удовлетворява отъ всѣкакви значения на тѣзи неизвѣстни.

Наистина, ако допуснемъ, че показательтъ на равнитѣ отношения $\frac{a}{a_1}$, $\frac{b}{b_1}$ и $\frac{c}{c_1}$ е k, то $a=a_1k$, $b=b_1k$ и $c=c_1k$. Ако замѣстимъ a, b и c съ равнитѣ имъ величини въ уравнението $ax+by=c$, ще получимъ $a_1kx+b_1ky=c_1k$ или $a_1x+b_1y=c_1$, което показва, че когато коефициентитѣ a, b, c и a_1, b_1, c_1 сж пропорционални, уравненията

$$ax+by=c \text{ и } a_1x+b_1y=c_1$$

сж идентични; т. е. прѣдставятъ едно и сжщо уравнение.

Заключение. Система отъ двѣ уравнения отъ първа степень съ двѣ неизвѣстни допуска само една система опрѣдѣлени рѣшения, когато уравненията не си противоречатъ и не сж идентични; — не допуска никакви рѣшения, когато уравненията си противоречатъ и — допуска безбройно много системи рѣшения, когато уравненията сж идентични.

Задачи, които водятъ къмъ опредѣлени системи отъ първа степень.

§ 10. **Съставяне на уравнения**. Нѣкои отъ задачитѣ, които рѣшихме само съ едно уравнение и една неизвѣстна отъ първа степень, съдържаха повече неизвѣстни, а не само една. При все това, понеже връзката между неизвѣстнитѣ бѣ много проста, ние не въведохме повече отъ една неизвѣстна. Лесно се разбира, че въ този случай изключването на нѣкои отъ неизвѣстнитѣ става на умъ (§ 1). Подобни изключвания на умъ, като ни привождатъ къмъ по-малко неизвѣстни, съкратяватъ изчисленията, но затова пъкъ усложняватъ и затрудняватъ съставянето на уравненията.

При съставянето на уравненията означаваме неизвѣстнитѣ съ x, y, z . . . . и изразяваме всѣко отъ условията на задачата чрѣзъ уравнение, като се ржководимъ по сжщитѣ правила, както и при съставянето на уравнение съ една неизвѣстна.

При задачи, които съдържатъ толкова неизвѣстни, колкото и условия, ще получимъ система отъ уравнения, числото на които е равно на числото на неизвѣстнитѣ; такава *система* се нарича *опрѣдѣлена* и *задачата* е *сжщо опрѣдѣлена*. Опрѣдѣлена система допуща ограничено число рѣшения, защото ни привожда къмъ рѣшаване на уравнение съ една неизвѣстна.

При задачи, въ които числото на неизвѣстнитѣ е по-голѣмо отъ числото на условията, ще получимъ система отъ уравнения, числото на които е по малко отъ числото на неизвѣстнитѣ; такава *система* се нарича *неопрѣдѣлена* и *задачата* е *сжщо неопрѣдѣлена*. Неопрѣдѣлената система допуща безбройно много рѣшения, защото ни привожда къмъ рѣшаване на уравнение съ повече отъ една неизвѣстна, а подобно уравнение, както ще видимъ, допуща безбройно много рѣшения.

При задачи, въ които числото на неизвѣстнитѣ е по-малко отъ числото на условията, ще получимъ система отъ уравнения, числото на които е по-голѣмо отъ числото на неизвѣстнитѣ — такава *система* е *невъзможна* и *задачата* е *сжщо невъзможна*. Ако опрѣдѣлимъ неизвѣстнитѣ отъ нуждното число уравнения и замѣстимъ така опрѣдѣленитѣ величини за неизвѣстнитѣ въ останалитѣ уравнения, то тия послѣднитѣ, обикновено, нѣма да се обърнатъ въ тождества.

§ 11. **Изслѣдване на задачитѣ.** Когато даденитѣ величини въ една задача сж изразени чрѣзъ букви, то рѣшаването на задачата ни привожда къмъ изрази, дѣто се посочватъ дѣйствията, които трѣбва да извършимъ надъ даденитѣ величини, за да получимъ неизвѣстнитѣ. Обикновено, задачата не е възможна при всѣкакви числени значения на буквитѣ, защото не всѣкога рѣшенията на системата сж и отговори на задачата: при нѣкои значения пъкъ на буквитѣ отговоритѣ иматъ особно значение.

Да се *изслѣдва* една задача, ще рече да се намѣрятъ онѣзи значения на буквитѣ, при които задачата има смисъль, или пъкъ ни привожда къмъ особни случаи.

При задачи, въ които даденитѣ величини сж изразени чрѣзъ цифрени числа, самитѣ отговори ще ни покажатъ, дали задачата е възможна и дали тя има обикновена или особена смисъль; слѣдов., въ подобни задачи нѣма какво да се изслѣдва.

Всичко горѣизложено ще разяснимъ съ нѣколко примѣри.

1. Да се намѣрятъ двѣ числа, на които разликата и частното съотвѣтно сж равни на 5.

Като означимъ неизвѣстнитѣ числа съ x и y, ще получимъ системата

$$\begin{cases} x-y=5 \\ \dfrac{x}{y}=5. \end{cases}$$

Рѣшаваме тази система по кой да е отъ познатитѣ начини и получаваме

$$x=\frac{25}{4}, y=\frac{5}{4}.$$

Тукъ рѣшенията на системата сж рѣшения и на задачата.

Ако разликата и частното сж равни съотвѣтно на a, то:

$$\begin{cases} x-y=a \\ \dfrac{x}{y}=a, \end{cases}$$

отдѣто

$$x=\frac{a^2}{a-1} \text{ и } y=\frac{a}{a-1}.$$

Изслѣдване. При $a \neq 1$ задачата има само едно рѣшение. При $a=1$ задачата е невъзможна и нѣма рѣшение, защото $x=\infty$ и $y=\infty$.

2. Едно събрание отъ мжже и жени, на брой 20 души, събрало помежду си 250 лева за благотворителна цѣль. Колко сж биле мжжетѣ и колко женитѣ, ако се знае, че всѣки мжжъ е далъ по 10, а всѣка жена по 5 лева?

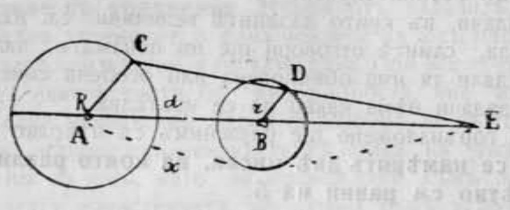
Ако означимъ числото на мжжетѣ съ x, а онова на женитѣ съ y, ще получимъ системата

$$\begin{cases} x+y=20 \\ 10x+5y=250, \end{cases}$$

отъ която намираме $x=30$ и $y=-10$. Задачата е невъзможна, защото числото на женитѣ неможе да бжде отрицателно; слѣдов., рѣшенията на системата не сж рѣшения на задачата.

3. Въ два дадени крхга, съ центрове A и B, сж прокарани два успоредни и съ еднаква посока радиуси R и r и край-

щата имъ C и D сѫ съединени съ права, която е продължена до прѣсичане съ централата въ точка E. Да се опрѣдѣли разстоянието AE.



фиг. 1.

Нека търсеното разстояние $AE=x$. Отъ подобнитѣ трижгълници ACE и BDE (фиг. 1) слѣдва:

$$\frac{R}{r}=\frac{x}{x-d}$$

дѣто $d=AB$, а отъ тукъ

$$x=\frac{dR}{R-r}.$$

Изслѣдване. Ако $R>r$, x е положително и прѣсѣчникътъ E е на дѣсно отъ A. Ако освѣнъ това и $d=0$, то $x=0$ и прѣсѣчникътъ се слива съ точката A, която е общъ центъръ на двата крѫга.

Ако $R<r$, x е отрицателно и прѣсѣчникътъ е на лѣво отъ A. Ако освѣнъ това и $d=0$, то прѣсѣчникътъ се слива пакъ съ A.

Ако $R=r$, то $x=\infty$ и прѣсѣчникътъ е на безконечно голѣмо разстояние отъ A, т. е. символътъ ∞ показва тукъ, че правитѣ AB и CD сѫ успоредни. Ако освѣнъ това и $d=0$, то $x=\frac{0}{0}$. За да се увѣримъ, че неопрѣдѣленостьта не е привидна, пишемъ

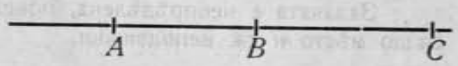
$$x=\frac{dR}{R-R}=\frac{dR}{R(1-1)}=\frac{d}{1}=\frac{0}{0},$$

което показва, че неопрѣдѣленостьта е истинска. Дѣйствително, въ този случай крѫговетѣ сѫ концентрични и правата, която минава прѣзъ крайщата на успоредни радиуси, всѣкога прѣсича продължението на централата въ произволна точка.

4. Двама пѫтника тръгватъ едновремѣнно отъ мѣстата A и B, като изминаватъ на часъ първиятъ a к. м. и вториятъ b к. м; на какво разстояние отъ B ще бѫдатъ пѫтницитѣ пакъ наедно, ако разстоянието AB=d к. м.?

Нека двамата пѫтника се съператъ наедно въ точка C (фиг. 2) и нека търсеното разстояние $BC=x$. Първиятъ пѫтникъ ще измине пѫтя AC за $\frac{d+x}{a}$ часа, а вториятъ ще измине пѫтя BC за $\frac{x}{b}$ часа.

Понеже и двамата пѫтника пѫтуватъ еднакво врѣме, то



фиг. 2.

$$\frac{d+x}{a}=\frac{x}{b}.$$

Отъ послѣдното уравнение ще получимъ:

$$x=\frac{bd}{a-b}.$$

Изслѣдване. Ахо $a>b$, то x е положително и застигането става на дѣсно отъ B.

Ако $a=b$, то $x=\infty$ и пѫтницитѣ не могатъ да се застигнатъ, понеже скоруститѣ имъ сѫ равни и разстоянието помежду имъ ще е всѣкога равно на b. Тукъ символътъ ∞ показва невъзможность.

Ако $a<b$, то x е отрицателно и застигането нѣма да стане на дѣсно отъ B, защото е станало вече на лѣво отъ тази точка.

Ако $d=0$, то $x=0$ и застигането става въ точката B, която се слива съ A.

Ако освѣнъ това и $a=b$, то $x=\frac{0}{0}$ и задачата става непрѣдѣлена, понеже пѫтницитѣ ще пѫтуватъ всѣкога наедно.

Ако $b=0$, то $x=0$ и застигането ще стане въ B, понеже вториятъ пѫтникъ стои неподвижно въ B.

Ако $a=0$, то $x=-d$ и застигането нѣма да стане: то е станало вече въ A на лѣво отъ B.

Ако $a=0$ и $d=0$, то $x=0$ и застигането е станало въ точката B, която се слива A.

Ако $b=0$ и $d=0$, то $x=0$ и застигането ще стане въ B.

Ако $a=0$ и $b=0$, то $x=\frac{0}{0}$. Тукъ неопрѣдѣленостьта е само видима, защото

$$x=\frac{bd}{a-b}=\frac{bd}{b-b}=\frac{bd}{b(1-1)}=\frac{d}{1-1}=\frac{d}{0}=\infty.$$

Пѫтницитѣ нѣма никога да се застигнатъ, защото и двамата стоятъ на мѣстата си неподвижно.

Ако най-послѣ $a=b=d=0$, то $x=\frac{0}{0}$. Тукъ неопрѣдѣленостьта е истинска, защото

$$x=\frac{bd}{a-b}=\frac{a^2}{a-a}=\frac{a^2}{a(1-1)}=\frac{a}{1-1}=\frac{a}{0}=\frac{0}{0}.$$

Задачата е неопрѣдѣлена, понеже пжтницитѣ стоятъ на едно и сжщо мѣсто и сж неподвижни.

Забѣлѣжка. Ако пжтницитѣ вървятъ единъ срѣщу другъ, то a е положително и b — отрицателно; нека $b=-b_1$. Въ този случай

$$x=\frac{b_1 a}{a+d_1}$$

и понеже $\frac{b_1 d}{a+b_1}<d$, то срѣщата ще стане между A и B.

Ако a и b сж отрицателни, напр. $a=-a_1$, $b=-b_1$, то

$$x=-\frac{b_1 d}{b_1-a};$$

понеже $\frac{b_1 d}{b_1-a}>d$, то срѣщата ще стане всѣкога на лѣво отъ A.

ГЛАВА II.

Степенуване.

Неравенства.

§ 12. Неравенство, на което двѣтѣ страни сж положителни, нѣма да измѣни вида си, ако степенуваме двѣтѣ му страни на едно и сжщо число.

Така, ако $a>b$, то и $a^n>b^n$.

Напр. $3>2$; $3^5>2^5$.

§ 13. Съ увеличаването на показателя, ако основата >1, степеньта се сжщо увеличава и може да стане по-голѣма отъ всѣко дадено число.

Така, ако $a>1$ и $m>n$, то $a^m>a^n$.

Напр. $5>1$ и $5<5^2<5^3<5^4$ . . . .

§ 14. Съ увеличаването на показателя, ако основата $\lessgtr{}^{1}_{0}$, степеньта се намалява и може да стане по малка отъ всѣко дадено число.

Така, при основа $0<\frac{1}{2}<1$, имаме:

$$\tfrac{1}{2}>(\tfrac{1}{2})^2>(\tfrac{1}{2})^3>(\tfrac{1}{2})^4> \ldots$$

Квадрати на многочлени и числа.

§ 15. **Квадрати на многочлени.** Знаемъ, че

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Понеже всѣки тричленъ може да се прѣдстави, като двучленъ, то

$$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2=a^2+2ab+b^2+[2(a+b)+c]c=a^2+(2a+b)b+[2(a+b)+c]c.$$

Сжщо и

$$(a+b+c+d)^2=[(a+b+c)+d]^2=(a+b+c)^2+2(a+b+c)d+d^2=a^2+(2a+b)b+[2(a+b)+c]c+[2(a+b+c)+d]d.$$

Изобщо

$$(a+b+c+\;.\;.\;.\;.+k+l)^2=[(a+b+c+\;.\;.\;.\;.+k)+l]^2=$$
$$=(a+b+c+\;.\;.\;.\;.+k)^2+[2(a+b+c+\;.\;.\;.\;.+k)l+l]^2=$$
$$=a^2+(2a+b)b+[2(a+b)+c]c+\;.\;.+[2(a+b+c+\;.\;.+k)+l]l.$$

Правило. Квадратътъ на даденъ многочленъ е сборъ; 1) отъ квадрата на първия членъ, 2) отъ удвоения първи членъ, събранъ съ втория членъ и получената сума умножена съ втория членъ, 3) отъ удвоената сума на първитѣ два члена, събрана съ третия членъ и получената сума умножена съ третия членъ, 4) отъ удвоената сума на първитѣ три члена, събрана съ четвъртия членъ и получената сума умножена съ четвъртия членъ и т. н.

§ 16. **Квадрати на числа.** Понеже всѣко число отъ десетичната система може да се напише въ видъ на многочленъ, то степенуването на числата е еднакво съ това на многочленитѣ.

Напр. $25^2=(20+5)^2=20^2+(2.20+5)4=20^2=400$

$$\begin{array}{rr} 45.5 & 225 \\ \hline & 625, \end{array}$$

или, за по-кратко, като изпуснемъ нулитѣ, ще получимъ

$$\begin{array}{rr} 25^2=2^2= & 4\;.\;. \\ 45.5 & 225 \\ \hline & 625. \end{array}$$

Сжщо:

$$234^2=(200+30+4)^2=200^2+(2.200+30)30+[2(200+30)+4]4$$

$$\begin{array}{rr} =200^2 & =40000 \\ 430.30 & 12900 \\ 464.4 & 1856 \\ \hline & 54786, \end{array}$$

или по-кратко:

$$\begin{array}{rr} 234^2=2^2= & 4\;.\;. \\ 43.3 & 129\;.\;. \\ 464.4 & 1856 \\ \hline & 54756. \end{array}$$

Правило. Квадратътъ на дадено число е сборъ: 1) отъ квадрата на първата цифра отлѣво, 2) отъ удвоената първа цифра, приписана

отдѣсно на това произведение втората цифра и така полученото число умножено съ втората цифра, 2) отъ удвоеното число, образувано отъ първитѣ двѣ цифри, приписана къмъ това произведение третата цифра и така полученото число умножено съ третата цифра и т. н., като при това всѣко събираемо се пише съ двѣ мѣста по-надѣсно отъ единицитѣ на прѣдидещето му събираемо.

Квадратътъ на число, на което послѣднитѣ цифри сж нули, се намира, като се не обрѫща внимание на тия нули и при така намѣрения квадратъ се припишатъ два пѫти повече нули, отъ колкото ги има въ даденото число; защото, ако $a=b.10^n$, то

$$a^2=(b.10^n)^2=b^2.10^{2n}.$$

Квадратътъ на десетична дробь се намира, като се не обрѫща внимание на десетичната точка и въ така получения квадратъ се отдѣлятъ отъ дѣсно къмъ лѣво два пѫти повече десетични мѣста, отъ колкото ги има въ даденото число, защото, ако $a=\frac{b}{10^n}$, то

$$a^2=\left(\frac{b}{10^n}\right)^2=\frac{b^2}{10^{2n}}.$$

Послѣдната цифра отъ квадрата на дадено цѣло число е сжщата, каквато е и послѣдната цифра отъ квадрата на единицитѣ му; т. е., послѣдната цифра на всѣки квадратъ е една отъ цифритѣ

0, 1, 4, 9, 6, 5.

Обратно, число, което окончава съ една отъ цифритѣ 2,3,7,8, или пъкъ свършва съ нечетно число нули, не е квадратъ на никое число.

Ако A е квадратъ на цѣлото число B, то показателитѣ на всичкитѣ прости множители на A сж четни числа.

Ако $B=a^\alpha b^\beta c^\gamma\;.\;.$, то $A=B^2=(a^\alpha b^\beta c^\gamma\;.\;.\;.)^2=a^{2\alpha}b^{2\beta}c^{2\gamma}\;.\;.\;.$

Обратно, ако показателитѣ на всичкитѣ прости множители на числото A сж четни числа, то A е квадратъ на нѣкое число.

Понеже отъ всѣка цифра на числото се получаватъ двѣ цифри на квадрата, освѣнъ отъ първата цифра на числото, отъ която се получаватъ или двѣ, или една цифра на квадрата, то слѣдва, че квадратътъ на n—цифрено число съдържа или $2n$, или $2n-1$ цифри.

ГЛАВА III.

Коренуване.

Опредѣления.

§ 17. Коренуването е дѣйствие, при което сж дадени степеньта и показателя и се дири основата. Това дѣйствие е обратно на степенуването.

Ако a е степеньта, b — показательтъ и x — търсената основа, то дѣйствието се означава така:

$$x = \sqrt[b]{a},$$

отдѣто слѣдва:

$$x^b = \left(\sqrt[b]{a}\right)^b = a.$$

x или $\sqrt[b]{a}$ се нарича b^{mu} коренъ отъ a; b се нарича коренeнъ показатель, a — подкоренна величина, а знакътъ $\sqrt{}$ — коренeнъ знакъ.

Така, $\sqrt[3]{8}=2$, защото $2^3=8$ и $\sqrt[4]{81}=3$, защото $3^4=81$.

Коренъ съ показатель 2 се нарича още квадратенъ коренъ, а коренъ съ показатель 3 се нарича кубиченъ коренъ.

При квадратенъ коренъ, обикновено, показательтъ не се пише.

Така, намѣсто $\sqrt[2]{a}$, ще пишемъ $\sqrt{a}$.

Названието коренъ е заето отъ арабитѣ. До началото на XVI в. коренитѣ се означавали твърдѣ различно. Знакътъ $\sqrt{}$ е въведенъ отъ Христофоръ Рудолфъ (1525 г.); този знакъ е началната буква на латинската дума radix (коренъ). Чертата, която е продължение отъ знака, замѣнява скобитѣ, въ които би трѣбвало да затворимъ подкоренната величина, ако има нужда.

§ 18. **Знакове на коренитѣ. 1.** Коренъ, показательтъ на който е нечетно число, има знака на подкоренната величина, защото степень, показательтъ на която е нечетно число, има знака на основата.

Напр., $\sqrt[3]{8}=2$ и $\sqrt[3]{-8}=-2$, защото $2^3=8$ и $(-2)^3=-8$.

Изобщо, $\sqrt[2n+1]{+a^{2n+1}}=+a$ и $\sqrt[2n+1]{-a^{2n+1}}=-a$, защото

$$(+a)^{2n+1}=+a^{2n+1} \text{ и } (-a)^{2n+1}=-a^{2n+1}.$$

2. Коренъ съ четенъ показатель отъ положително число, има два знака, защото степень съ четенъ показатель е всѣкога положителна, била основата положителна или отрицателна.

Напр., $\sqrt{9}=\pm 3$ и $\sqrt[4]{16}=\pm 2$, защото $(\pm 3)^2=9$ и $(\pm 2)^4=16$.

Изобщо, $\sqrt[2n]{+a^{2n}}=\pm a$, защото $(\pm a)^{2n}=+a^{2n}$.

3. Коренъ съ четенъ показатель отъ отрицателно число е невъзможно число, защото степень съ четенъ показатель е всѣкога положително, а не отрицателно число.

Напр., коренитѣ $\sqrt{-4}$, $\sqrt[4]{-16}$ сж невъзможни величини.

Макаръ корени съ четни показатели отъ отрицателни величини да сж невъзможни числа, все пакъ въвеждатъ и тѣхъ въ изчисленията и ги наричатъ имагинерни величини, за разлика отъ познатитѣ до сега намъ, които наричатъ реални величини. На имагинерната величина $\sqrt{-a^2}$ даватъ обикновено вида $\sqrt{-a^2}=\sqrt{a^2(-1)}$ $=a\sqrt{-1}=ai$, дѣто $i=\sqrt{-1}$ се нарича имагинерна единица. Знакътъ i е въведенъ отъ Gauss въ началото на миналия вѣкъ. Отъ опредѣлението слѣдва, че $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$, $i^5=i$, . . . и т. н. Имагинернитѣ величини се подчиняватъ на всичкитѣ закони за реалнитѣ величини, затова при дѣйствията съ имагинернитѣ величини употрѣбяватъ сжщитѣ правила, каквито и при дѣйствията съ реалнитѣ величини. Напр.,

1). $a+bi\pm(c+di)=a\pm c+(b\pm d)i$, 2). $(a+bi)(c+di)=ac-bd+(bc+ad)i$,

3). $\dfrac{a+di}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$, 4). $(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$.

По-подробното изучване на имагинернитѣ величини изоставяме за по-нататъкъ.

Корени на едночлени.

§ 19. Произведение се коренува, като се коренува всѣки отъ множителитѣ му. Напр.,

$$\sqrt{4\,.\,9}=\sqrt{4}\,.\,\sqrt{9}=2\,.\,3=6 \text{ и } \sqrt[3]{27a^3}=\sqrt[3]{27}\sqrt[3]{a^3}=3a.$$

Изобщо, $\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$, защото $(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c})^n=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n(\sqrt[n]{c})^n=$ $=abc$.

Равенството $\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$ изразява разпрѣдѣлителния законъ при коренуването. Ако замѣнимъ умножението съ събиране и коренуването съ дѣление, ще получимъ равенството

$$\frac{a+b+c}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}+\frac{c}{n}.$$

§ 20. Дробь се коренува, като се коренува всѣки отъ членоветѣ й. Напр.

$$\sqrt{\frac{25}{49}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}}=\frac{5}{7} \text{ и } \sqrt[3]{\frac{8a^3}{27b^3}}=\frac{\sqrt[3]{8a^3}}{\sqrt[3]{27b^3}}=\frac{\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{27}\sqrt[3]{b^3}}=\frac{2a}{3b}.$$

$$\text{Изобщо, } \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ защото } \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n}=\frac{a}{b}.$$

Равенството $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ изразява сжщо разпрѣдѣлителния законъ при коренуването. Като замѣнимъ дѣлението съ изваждане и коренуването съ дѣление, ще получимъ $\frac{a-b}{n}=\frac{a}{n}-\frac{b}{n}$.

§ 21. Степень се коренува, като се раздѣли показателя на подкоренната величина съ показателя на корена. Напр.,

$$\sqrt{4a^2b^4c^6}=2a^{\frac{2}{2}}b^{\frac{4}{2}}c^{\frac{6}{2}}=2ab^2c^3 \text{ и } \sqrt[3]{\frac{8a^6}{27b^9}}=\frac{2a^{\frac{6}{3}}}{3b^{\frac{9}{3}}}=\frac{2a^2}{3b^3}.$$

$$\text{Изобщо, } \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}, \text{ защото } \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=a^{\frac{m}{n}\cdot n}=a^m.$$

Бѣлѣжка. Тукъ прѣдполагаме, че m е кратно на n, защото степень съ дробенъ показатель би показвала, че основата има да се повтори за множитель дробно число пжти, а това нѣма смисълъ. Степеньта $a^{\frac{m}{n}}$, дѣто $\frac{m}{n}$ е дробно число, добива смисълъ само, като се прѣдстави въ вида $\sqrt[n]{a^m}$.

По аналогия на степенитѣ съ цѣли показатели, въвеждатъ въ изчисленията и степенитѣ съ дробни показатели. Степенитѣ съ дробни показатели се подчиняватъ на всичкитѣ закони за степенитѣ съ цѣли показатели, затова при дѣйствията съ степени съ дробни показатели употрѣбяватъ сжщитѣ правила, каквито и при дѣйствията съ степени съ цѣли показатели.

Значението на степени съ дробни показатели е изтълкувано отъ английския математикъ Wallis въ 1659 г. Идеята за дробни показатели е дадена отъ Oresme (род. 1323) въ книгата му Algorismus proportionum. Сжщата идея срѣщаме и у Stevin.

Корени на многочлени.

§ 22. **Квадратенъ коренъ отъ многочленъ.** Начинътъ, по който коренуваме даденъ многочленъ, се вижда най-ясно отъ начина, по който степенуваме многочленитѣ. Отъ равенството

$$(a+b+c+\ \ldots\ )^2=a^2+(2a+b)b+[2(a+b)+c]c+\ \ldots$$

се вижда, че трѣбва най-напрѣдъ да наредимъ подкоренния многочленъ и послѣ:

1) Коренуваме първия членъ a^2 на подкоренната величина и намираме първия членъ a на корена.

2) Изваждаме отъ подкоренната величина квадрата на намѣрения членъ a отъ корена и получаваме първия остатъкъ $(2a+b)b$ $+[2(a+b)+c]c+\ \ldots$.

3) Дѣлимъ първия членъ $2ab$ отъ първия остатъкъ на удвоения първи членъ отъ корена и получаваме втория членъ b на корена.

4) Умножаваме сумата отъ удвоения първи членъ на корена и втория съ втория членъ и полученото произведение $(2a+b)b$ изваждаме отъ първия остатъкъ; получаваме втория остатъкъ $[2(a+b)$ $+c]c+\ \ldots$.

5) Дѣлимъ първия членъ $2ac$ на втория остатъкъ съ удвоения първи членъ отъ корена и получаваме третия членъ c на корена.

6) Удвоената сума на първитѣ два члена отъ корена, събрана съ третия членъ, умножаваме съ третия членъ и полученото произведение $[2(a+b)+c]c$ изваждаме отъ втория остатъкъ; получаваме третия остатъкъ.

7) Първия членъ на послѣдния остатъкъ дѣлимъ съ удвоения първи членъ отъ корена; получаваме четвъртия членъ на корена и т. н. продължаваме дѣйствието до, когато получимъ остатъкъ нула.

Примѣри.

1. $\sqrt{4x^2-12xy+9y^2}=2x-3y$

$$\begin{array}{l|l}
4x^2 & \\
\hline
\text{„}-12xy+9y^2 & 4x-3y \\
\mp 12xy\pm 9y^2 & \quad -3y \\
\hline
\end{array}$$

2. $\sqrt{16x^4-24x^3-7x^2+12x+4}=4x^2-3x-2.$

$$\begin{array}{r|l}
-16x^4 & \\
\hline
\text{„}\ -24x^3-7x^2+12x+4 & 8x^2-3x \\
\mp 24x^3\pm 9x^2 \qquad\qquad & \quad -3x \\
\hline
\text{„}\ -16x^2+12x+4 & 8x^2-6x-2 \\
\mp 16x^2\pm 12x\pm 4 & \qquad -2 \\
\hline
\text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} &
\end{array}$$

Ако дадениятъ многочленъ не е квадратъ на другъ многочленъ, то колкото и да продължаваме дѣйствието, нѣма да получимъ никога остатъкъ нула. Това се случва, когато висшиятъ и низшиятъ членове на подкоренната величина не сѫ квадрати, или пъкъ, когато първиятъ членъ на нѣкой отъ остатъцитѣ не се дѣли на удвоеното произведение отъ първия членъ на корена.

Корени на числа.

§ 23. Квадратенъ коренъ на число. Ще опрѣдѣлимъ колко сѫ цифритѣ въ корена на дадена подкоренна величина. Видѣхме, че ако едно число има n цифри, то квадратътъ му има $2n$ или $2n-1$ цифри. Обратно, ако подкоренната величина има $2n$ или $2n-1$ цифри, то квадратниятъ коренъ има n цифри. На това се основава употрѣбяваниятъ въ практиката начинъ за опрѣдѣляне числото на цифритѣ на корена. Този начинъ състои въ слѣдното: раздѣляме подкоренното число отъ дѣсно къмъ лѣво на групи, отъ които всѣка да съдържа по 2 цифри, съ изключение на послѣдната група, която може да съдържа и една цифра (защото първата цифра отлѣво на дадено число дава въ квадрата му или една или двѣ цифри); броятъ на групитѣ ни показва и броя на цифритѣ въ корена.

Сега ще пристѫпимъ къмъ диренето на корени, които съдържатъ двѣ цифри, защото едноцифренитѣ корени се намиратъ непосрѣдствено отъ таблицата за умножение. Нека, напр., намѣримъ квадратния коренъ на числото 1521. Понеже числото съдържа двѣ групи, то коренътъ му има двѣ цифри, т. е., има десетици и единици. Ще опрѣдѣлимъ цифрата на десетицитѣ. Тази цифра трѣбва да търсимъ въ първата група отлѣво, защото квадратътъ на десетицитѣ е стотици или хилядници. За такава цифра трѣбва да земемъ цифра, на която квадратътъ е равенъ на числото въ първата група отлѣво, или пъкъ най-вече се приближава до това число. Въ взетия примѣръ тази цифра е 3. Изваждаме квадрата на намѣрената цифра отъ числото на първата група и при получения остатъкъ приписваме цифритѣ на втората група; получаваме първия остатъкъ, който въ примѣра е 621. Този остатъкъ съдържа удвоеното произведение на десетицитѣ и единицитѣ + квадрата на единицитѣ. Понеже първото събираемо има само десетици, то се съдържа само въ десетицитѣ на остатъка; затова, за да намѣримъ цифрата на единицитѣ, отдѣляме цифрата на единицитѣ въ остатъка и числото на десетицитѣ му дѣлимъ на удвоената намѣрена цифра на десетицитѣ на корена. Полученото частно 9 е търсената цифра на единицитѣ. Получената цифра на единицитѣ приписваме при удвоената цифра на десетицитѣ и така съставеното число умножаваме съ цифрата на единицитѣ. Полученото произведение (69.9=621) изваждаме отъ първия остатъкъ и получаваме за втори остатъкъ нула. Може да се случи, че намѣрената цифра на единицитѣ е такава, че вториятъ остатъкъ е отрицателенъ; въ такъвъ случай намаляваме цифрата на

единицитѣ съ 1 и пакъ опитваме, до дѣто получимъ остатъкъ нула или пъкъ положителенъ остатъкъ. Въ първия случай подкоренното число е квадратъ, а въ втория — то не е квадратъ. Дѣйствието се разполага така:

```
√15′21 = 39.            39² = 3² = 9 . .
  9                       69.9    621
 ─────┐                  ─────────────
  62′1│ 69.9                  1521.
  62 1│
 ─────┘
   „
```

Нека сега намѣримъ квадратния коренъ на числото 55696. Този коренъ съдържа три цифри; сир., има стотици, десетици и единици. Понеже на стотицитѣ и десетицитѣ, зети наедно, можемъ да гледаме само като на десетици, то намирането на искания коренъ се привежда къмъ намиране на коренъ, който съдържа само десетици и еденици; сир., къмъ прѣдидущия случай. Намираме най-напрѣдъ десетицитѣ, които се съдържатъ въ числото отъ първитѣ двѣ групи отлѣво.

```
√5′5 6 = 23
 4
 ─────┐
 1 5,6│ 43.3
 1 2 9│
 ─────┘
   2 7
```

И така, десетицитѣ сѫ 23, а остатъкътъ е 27. Приписваме при 27 цифритѣ 96 на послѣдната група и получаваме за втори остатъкъ 2796. Отдѣляме една цифра отдѣсно и числото 279 дѣлимъ на 2.23=46; намираме цифрата 6 на единицитѣ.

При диренето на квадратни корени, които съдържатъ повече отъ три цифри, работимъ както по-горѣ, като гледаме на подкореннитѣ числа, като на числа, съставени само отъ десетици и единици.

Примѣръ.

```
                          десет.  ед.
√20′1 5′1 1′2 1 =          448    9,
 16
 ─────┐
  4 1,5│ 84.4
  3 3 6│
 ──────────┐
   7 9 1,1 │ 888.8
   7 1 0 4 │
 ─────────────┐
    8 0 7 2,1 │ 8969.9
    8 0 7 2 1 │
    ──────────┘
        „
```

За да намѣримъ квадратния коренъ на дадена десетична дробь, раздѣляме я на групи отъ по двѣ цифри, като почнемъ отъ десетичната точка на лѣво и на дѣсно; защото броятъ на десетичнитѣ мѣста въ корена трѣбва да е два пѫти по-малъкъ отъ оня на подкоренната величина. Групитѣ на лѣво отъ десетичната точка съдържатъ квадрата на цѣлото число на корена, затова първата група отлѣво може да съдържа и една цифра.

Примѣръ.

$$\sqrt{6\cdot 30'01}=2\cdot 51.$$

$$\begin{array}{l|l}
4 & \\
\hline
23{,}0 & 45.5 \\
225 & \\
\hline
\quad 50{,}1 & 501.1 \\
\quad 501 & \\
\hline
\end{array}$$

Квадратитѣ и квадратнитѣ корени на натуралнитѣ числа сѫ били разглеждвани още въ най-старо врѣме. Така, у индийцитѣ намираме за $\sqrt{2}$ израза $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{3.4.3.4}$. Най-първо Теонъ Александрийски (400 г. сл. Р. Хр.) е изчислилъ $\sqrt{2}$ съ достатъчно приближение. Доста пълно сѫ изложени коренитѣ въ аритметиката на Акалцади (1477 г.).

ГЛАВА IV.

Ирационални изрази.

Опрѣдѣления и свойства.

§ 24. Ако даденъ цѣлъ или дробенъ изразъ A не е n^a степень на другъ рационаленъ изразъ, то $\sqrt[n]{A}$ се нарича ирационаленъ или радикаленъ изразъ, или само радикалъ.

§ 25. **Свойства на радикалитѣ.** Величината на радикала нѣма да се измѣни, ако раздѣлимъ или умножимъ коренния и степенния показатели на радикала съ едно и сѫщо число. Напр.,

$$\sqrt[15]{a^5}=\sqrt[3]{a},\ \sqrt[12]{b^{16}}=\sqrt[3]{b^4}.$$

Изобщо, $\sqrt[ns]{a^{nr}}=\sqrt[s]{a^r}$, защото $(\sqrt[s]{a^r})^{ns}=\left[(\sqrt[s]{a^r})^s\right]^n=(a^r)^n=a^{nr}$.

Обратно, $\sqrt[s]{a^r}=\sqrt[ns]{a^{nr}}$.

§ 26. **Съкратяване показателитѣ на радикала.** Коренниятъ и степенниятъ показатели на радикала се съкратяватъ, като се раздѣлятъ на най-голѣмия имъ общъ дѣлитель. Напр.,

$$\sqrt[12]{16a^8x^{12}}=\sqrt[3]{2a^2x^3},\ \sqrt[6]{(a+b)^9c^{15}}=\sqrt{(a+b)^3c^5}.$$

§ 27. **Привеждане на радикалитѣ къмъ еднакъвъ коренenъ показатель.** Радикалитѣ привеждаме къмъ еднакъвъ коренenъ показатель така: намираме най-малкото общо-кратно наореннитѣ показатели; дѣлимъ това кратно съ всѣки отъ коренннитѣ показатели и съ частното умножаваме коренния и степенния показатели на съотвѣтния радикалъ. Напр., радикалитѣ

$$\sqrt[3]{a^2},\ \sqrt[4]{a^3},\ \sqrt[6]{a^5},$$

могатъ се замѣни съотвѣтно съ радикалитѣ

$$\sqrt[12]{a^8},\ \sqrt[12]{a^9},\ \sqrt[12]{a^{10}}.$$

Изобщо, радикалитѣ

$$\sqrt[n]{a^m}, \sqrt[s]{a^r}, \sqrt[q]{a^p}$$

могатъ се замѣнн съотвѣтно съ радикалитѣ

$$\sqrt[nsq]{a^{msq}}, \sqrt[nsq]{a^{nrq}}, \sqrt[nsq]{a^{pns}}.$$

Това дѣйствие съ радикалитѣ е твърдѣ сходно съ привеждането на дроби къмъ еднакъвъ знаменатель.

§ 28. **Изнасяне на множители извънъ радикала.** Когато коренниятъ и степенниятъ показатели на радикала нѣматъ общъ множитель, то може да се случи, че подрадикалниятъ изразъ може да се разложи на такива множители, щото степеннитѣ показатели на нѣкои отъ тѣхъ да сѫ кратни на коренния показатель; въ такъвъ случай чрѣзъ коренуване на тѣзи множители се дава по-простъ видъ на радикала. Това дѣйствие се нарича изнасяне на множители извънъ радикала. Напр.,

$$\sqrt[3]{a^{17}}=\sqrt[3]{a^2a^{15}}=\sqrt[3]{a^{15}}\,\sqrt[3]{a^2}=a^5\sqrt[3]{a^2},$$

$$\sqrt{162a^3b^4}=\sqrt{2.81a^2.ab^4}=9ab^2\sqrt{2a},$$

$$\sqrt{\frac{(m^2-2mn+n^2)x^3}{49}}=\sqrt{\frac{(m-n)^2x^2.x}{7^2}}=\frac{(m-n)x}{7}\sqrt{x}.$$

§ 29. **Внасяне на множители подъ радикала.** Понѣкога подрадикалниятъ изразъ се упростява, като се внесатъ прѣдрадикалнитѣ множители подъ радикала. За тази цѣль трѣбва внесенитѣ множители да степенуваме на коренния показатель.
Напр.,

$$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n}\,\sqrt[n]{b^n}=\sqrt[n]{a^nb},$$

$$(a+b)\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}=\sqrt{\frac{(a-b)(a+b)^2}{a+b}}=\sqrt{(a-b)(a+b)}=\sqrt{a^2-b^2},$$

$$\frac{x-y}{x+y}\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}=\sqrt{\frac{(x-y)^2(x+y)}{(x+y)^2(x-y)}}=\sqrt{\frac{x-y}{x+y}}.$$

Дѣйствия.

§ 30. **Подобни радикали.** Радикали, които иматъ еднакви коренни показатели и еднакви подкоренни величини, се наричатъ подобни радикали. Подобностьта на радикалитѣ е или явна, или пъкъ става такава слѣдъ нѣкои прѣобразувания. Напр., радикалитѣ

$$\sqrt[3]{x^2y},\ -2a\sqrt[3]{x^2y} \text{ и } 3ab^2\sqrt[3]{x^2y}$$

сѫ явно подобни, а радикалитѣ

$$3\sqrt{a^3b},\ 5\sqrt{a^5b^3} \text{ и } -a\sqrt{49ab^7},$$

които на пръвъ погледъ изглеждатъ да не сѫ подобни, прѣработени даватъ радикалитѣ

$$3a\sqrt{ab},\ 5a^2b\sqrt{ab} \text{ и } -7ab^3\sqrt{ab},$$

които сѫ подобни.

§ 31. **Събиране и изваждане.** Събираме и изваждаме радикали, като ги съединимъ съотвѣтно съ знаковетѣ + и — и направимъ привеждане на подобнитѣ радикали, ако ги има. Напр.,

$$2\sqrt[3]{a^6b}+4a\sqrt[3]{a^3b}+2a^2\sqrt[3]{125b}-3a^2\sqrt[3]{64b}+\sqrt[3]{27a^6b}=2a^2\sqrt[3]{b}+$$
$$+4a^2\sqrt[3]{b}+10a^2\sqrt[3]{b}-12a^2\sqrt[3]{b}+3a^2\sqrt[3]{b}=a^2\sqrt[3]{b}(2+4+10-$$
$$-12+3)=7a^2\sqrt[3]{b}.$$

$$a\sqrt{a^4xy}-a^2\sqrt[3]{a^3xy}-2b\sqrt{b^4xy}+b^2\sqrt[3]{8b^3xy}=a^3\sqrt{xy}-a^3\sqrt[3]{xy}$$
$$-2b^3\sqrt{xy}+2b^3\sqrt[3]{xy}=\sqrt{xy}(a^3-2b^3)-\sqrt[3]{xy}(a^3-2b^3)=$$
$$=(a^3-2b^3)\ (\sqrt{xy}-\sqrt[3]{xy}).$$

§ 32. **Умножение.** Понеже

$$\sqrt[n]{abc\ldots}=\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\,\sqrt[n]{c}\ldots,$$

то и обратно,

$$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\,\sqrt[n]{c}\ldots=\sqrt[n]{abc\ldots};$$

сир., радикали съ еднакви коренни показатели умножаваме, като умножимъ подрадикалнитѣ величини. Ако коренитѣ показатели сѫ различни, то прѣдварително привеждаме радикалитѣ къмъ единакъвъ коренъ показатель и слѣдъ това умножаваме радикалитѣ. Напр.,

$$\sqrt[5]{a^3}.\sqrt[5]{a^2}=\sqrt[5]{a^3a^2}=\sqrt[5]{a^5}=a,$$

$$\sqrt[3]{a^2}.\sqrt[4]{a^3}=\sqrt[12]{a^8}\,\sqrt[12]{a^9}=\sqrt[12]{a^{17}}=a\sqrt[12]{a^5},$$

$$\sqrt{3ab}.\sqrt[3]{2a^2b}=\sqrt[6]{3^3a^3b^3}\,\sqrt[6]{2^2a^4b^2}=\sqrt[6]{27\,.\,4\,.\,a^7b^5}=a\sqrt[6]{108ab^5}.$$

§ 33. **Дѣление.** Понеже

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},$$

то и, обратно,

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}},$$

сир., радикали съ еднакви коренни показатели дѣлимъ, като раздѣлимъ подрадикалнитѣ величини. Ако кореннитѣ показатели сж различни, то прѣдварително привеждаме радикалитѣ къмъ еднакъвъ коренень показатель и слѣдъ това дѣлимъ радикалитѣ. Напр.,

$$\frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{a^2}}=\sqrt[5]{a},\ \frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[4]{a^3}}=\frac{\sqrt[12]{a^8}}{\sqrt[12]{a^9}}=\sqrt[12]{\frac{1}{a}}=\frac{1}{\sqrt[12]{a}},\ \frac{\sqrt{3ab}}{\sqrt[3]{2a^2b}}=\sqrt[6]{\frac{3^3a^3b^3}{2^2a^4b^2}}=\sqrt[6]{\frac{27b}{4a}}.$$

§ 34. **Степенуване.** Понеже

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{a}\ldots m \text{ пжти}=\sqrt[n]{a.a.a..\ m \text{ пжти}}=\sqrt[n]{a^m},$$

то даденъ радикалъ степенуваме, като степенуваме подкоренната му величина.

Обратно, $\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m$, което показва, че редътъ на степенуването и коренуването е произволенъ. На това равенство съотвѣтствуватъ равенствата (ab):c=(a:c)b и (a+b)—c=(a—c)+b. И тритѣ равенства изразяватъ една и сжща мисъль: редътъ на съотвѣтнитѣ прави и обратни дѣйствия е произволенъ.

§ 35. **Коренуване.** Даденъ радикалъ коренуваме, като умножимъ коренннитѣ показатели. Напр.,

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a},$$

защото

$$\left(\sqrt[mn]{a}\right)^m=\sqrt[mn]{a^m}=\sqrt[n]{a}.$$

Понеже $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$, то редътъ на послѣдователнитѣ коренувания е произволенъ.

Примѣри.

$$\sqrt{\sqrt[3]{2a^2x}}=\sqrt[6]{2a^2x};\ \sqrt[3]{\sqrt{125a^3b^6}}=\sqrt{\sqrt[3]{125a^3b^6}}=\sqrt{5ab^2}=b\sqrt{5a};$$

$$\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x}}=\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^9\,x}}=\sqrt[12]{x^{10}}=\sqrt[6]{x^5}.$$

На равенството $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ съотвѣтствуватъ равенствата $\frac{a}{m}:n=\frac{a}{n}:m$ и (a—m) — n = (a—n) — m. И тритѣ равенства показватъ, че редътъ за извършване послѣдователно едно и сжщо обратно дѣйствие е произволенъ.

§ 36. Дѣйствията съ ирационални многочлени се извършватъ по сжщитѣ правила, както и дѣйствията съ рационалнитѣ многочлени.

Примѣри.

$$1.\ (\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})\ (\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=\sqrt[3]{a^3}+\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt[3]{ab^2}+$$

$$+\sqrt[3]{ab^2}+\sqrt[3]{b^3}=a+b.$$

$$2.\ (\sqrt{x}-\sqrt[3]{xy^2})\ (\sqrt{y}+\sqrt[3]{x^2y})=\sqrt{xy}-\sqrt[6]{x^2y^7}+\sqrt[6]{x^7y^2}-\sqrt[3]{x^3y^3}=$$

$$=\sqrt{xy}-y\sqrt[6]{x^2y}+x\sqrt[6]{xy^2}-xy.$$

$$4.\ (\sqrt{x}-\sqrt[3]{y})^2=)\ (\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}\sqrt[3]{y}+(\sqrt[3]{y})^2=x-2\sqrt[6]{x^3y^2}+\sqrt[3]{y^2}.$$

$$5.\ \sqrt{x-2\sqrt[6]{x^3y^2}+\sqrt[3]{y^2}}=\sqrt{x}-\sqrt[3]{y}.$$

$$\begin{array}{l|l} -x & \\ \hline ,,-2\sqrt[6]{x^3y^2}+\sqrt[3]{y^2} & 2\sqrt{x}-\sqrt[3]{y} \\ +2\sqrt[6]{x^3y^2}-\sqrt[3]{y^2} & \quad -\sqrt[3]{y} \\ \hline \quad ,, \qquad ,, & \end{array}$$

Освобождаване знаменателя на дробь отъ радикали.

§ 37. Да освободимъ знаменателя на дадена дробь отъ радикалитѣ, ако ги има, ще рече да замѣнимъ дадената дробь съ такава равна ней дробь, знаменательтъ на която е рационаленъ изразъ. Това се постига, като умножимъ членоветѣ на дадената дробь съ изразъ, произведението на който съ знаменателя е рационаленъ изразъ. Ще посочимъ слѣднитѣ случаи.

1. Знаменательтъ е едночленъ.

1). $$\frac{a}{b\sqrt{c}}=\frac{a\sqrt{c}}{b\sqrt{c}\sqrt{c}}=\frac{a\sqrt{c}}{bc}.$$

2). $$\frac{a}{\sqrt[n]{b}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{b^{n-1}}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^n}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-1}}}{b}.$$

2. Знаменательтъ е двучленъ.

1). $$\frac{a}{x+\sqrt{y}}=\frac{a(x-\sqrt{y})}{(x+\sqrt{y})(x-\sqrt{y})}=\frac{a(x-\sqrt{y})}{x^2-y}.$$

2). $$\frac{a}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{a(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{a(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y}.$$

3). $$\frac{a}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}=\frac{a(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})}{x+y}.$$

4). $$\frac{a}{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y}}=\frac{a(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}y}+\sqrt[n]{x^{n-3}y^2}+\dots}{x-y}+$$
$$+\frac{\sqrt[n]{xy^{n-2}}+\sqrt[n]{y^{n-1}})}{x-y}.$$

Ако знаменательтъ е отъ вида $\sqrt[m]{x}\pm\sqrt[n]{y}$, то по-напрѣдъ привеждаме радикалитѣ $\sqrt[m]{x}$ и $\sqrt[n]{y}$ къмъ еднакви коренни показатели.

3. Знаменательтъ е многочленъ, който съдържа само квадратни корени.

$$\frac{a}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}=\frac{a(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-z}=\frac{a(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})}{x+y-z+2\sqrt{xy}}=$$
$$\frac{a(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})\,(x+y-z-2\sqrt{xy})}{(x+y-z)^2-4xy}.$$

Ирационални уравнения.

§ 38. **Теорема.** Уравнението

$$A^m=B^m \qquad (1)$$

е еквивалентно на уравнението

$$A=B \qquad (2),$$

когато m е нечетно число. При m четно число, уравнението

$$A^m=B^m$$

е еквивалентно съ уравнението

$$A=B \text{ и } A=-B,$$

дѣто A и B зависятъ отъ x.

Наистина, за всѣко значение на неизвѣстното x, за което A^m и B^m иматъ равни числени величини, A и B иматъ разни абсолютни величини.

1) Ако m е нечетно, A и B иматъ съотвѣтно сжщитѣ знакове както A^m и B^m; слѣдов., ако

$$A^m=B^m,$$

то и

$$A=B;$$

т. е., уравненията (1) и (2) сж еквивалентни.

2) Ако m е четно, понеже $(-A)^m=A^m$, то A и B могатъ да иматъ различни знакове; слѣдов., или $A=B$ или

$$A=-B;$$

т. е., уравненията (1) и (2) сж еквивалентни.

Отъ казаното заключаваме, че ако степенуваме двѣтѣ страни на даденото уравнение на четно число, то полученото уравнение допуща не само коренитѣ на даденото уравнение, но още коренитѣ и на уравнение, което се получава отъ даденото, като се измѣни знака на една отъ странитѣ му.

Съ помощьта на послѣдната теорема, дадено ирационално уравнение може да се направи рационално.

Бѣлѣжка. Когато една отъ странитѣ на уравнението е нула, то като се степенуватъ двѣтѣ му страни на какво и да е число, получава се еквивалентно уравнение, защото $A^m=0$ само при $A=0$.

Примѣри.

1. Дадено е уравнението

$$a-x=\sqrt{x^2+a}.$$

Степенуваме двѣтѣ му страни на 2:

$$(a-x)^2=x^2+a,$$

отдѣто

$$2x-a=-1,$$

което се удовлетворява за $x=\frac{a-1}{2}$.

Този коренъ не удовлетворява даденото уравнение, а е коренъ на уравнението

$$a-x=-\sqrt{x^2+a}.$$

2. Нека е дадено уравнението

$$\sqrt{x}=\sqrt{2x+1}.$$

Степенуваме двѣтѣ страни на 2 и получаваме

$$x=2x+1,$$

отдѣто

$$x=-1.$$

Това рѣшение, като удовлетворява даденото уравнение, обръща всѣка отъ странитѣ му въ $\sqrt{-1}$ (имагинерна единица).

Понеже всичкитѣ корени на даденото урявнение сѫ корени на уравнението

$$x=2x+1,$$

което има единственъ коренъ —1, то заключаваме, че даденото уравнение нѣма реаленъ коренъ.

3. Уравнението.

$$x+1-\sqrt[3]{x^3+1}=0$$

е еквивалентно на уравнението

$$x+1=\sqrt[3]{x^3+1},$$

отъ което, чрѣзъ степенуване двѣтѣ му страни на 3, ще получимъ

$$2x(x+1)=0.$$

Коренитѣ на послѣдното уравнение 0 и — 1 сѫ корени и на даденото уравнение.

ГЛАВА V.

Ирационални числа.

Опрѣдѣления и свойства.

§ 39. До сега коренувахме такива числа, коренитѣ на които, степенувани на коренния показатель, даваха подкоренното число.

Така, ако $\sqrt[n]{a}=b$ и $\sqrt[n]{\frac{c}{d}}=\frac{p}{q}$, то $b^n=a$ и $\left[\frac{p}{q}\right]^n=\frac{c}{d}$. Но, ако $n^{иятъ}$ коренъ на дадено цѣло или дробно число не е n^a степень на нѣкое цѣло или дробно число, то този $n^и$ коренъ не е рационално число; сир., не е нито цѣло, нито дробно число. Това ще докажемъ.

1. **Ако $n^{иятъ}$ коренъ на дадено цѣло число a не е цѣло число, той не е и дробь (несъкратима).**

За да докажемъ това, нека допуснемъ, че $\sqrt[n]{a}=\frac{p}{q}$, дѣто p и q сѫ взаимно прости числа. Като степенуваме двѣтѣ страни на равенството $\sqrt[n]{a}=\frac{p}{q}$ на n, ще получимъ

$$(\sqrt[n]{a})^n=\left[\frac{p}{q}\right]^n, \text{ отдѣто } a=\frac{p^n}{q^n}.$$

Послѣдното равенство е невъзможно, понеже цѣло число неможе да бѫде равно на дробь. Така, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{5}$ не сѫ нито цѣли, нито дробни числа.

2. **Ако $n^{итѣ}$ корени на членоветѣ на една дробь не сѫ цѣли числа, то $n^{иятъ}$ коренъ на дадената дробь не е равенъ на никаква дробь.**

За да докажемъ това, нека допуснемъ, че

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{p}{q}.$$

Като степенуваме двѣтѣ страни на послѣдвото равенство на n, ще получимъ

$$\frac{a}{b}=\frac{p^n}{q^n}.$$

Това равенство е възможно само при $a=p^n$ и $b=q^n$; сир., при $\sqrt[n]{a}=p$ и $\sqrt[n]{b}=q$, което е невъзможно, защото $\sqrt[n]{a}$ и $\sqrt[n]{b}$ не сж цѣли числа. Така, $\sqrt{\frac{4}{5}}, \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ не сж дробни числа.

Корени, които не сж нито цѣли, нито дробни числа, се наричатъ **ирационални** числа.

Бѣлѣжка. Не трѣбва да смѣсваме ирационалнитѣ числа съ ирационалнитѣ изрази, защото единъ ирационаленъ изразъ може да бжде равенъ на ирационално, или на рационално число; това зависи отъ подкоренната величина. Напр., ирационалниятъ изразъ $\sqrt[3]{a+b}$ при $a=2$, $b=6$ се обрьща въ $\sqrt[3]{8}=2$, което е рационално число.

§ 40. **Ако $\sqrt[n]{a}$ е ирационално число, то това число лежи между двѣ рационални числа съ произволно малка разлика.**

Ние можемъ всѣкога да намѣримъ двѣ такива (цѣли или дробни) числа α и β, че $\alpha^n < a < \beta^n$. При това на числото α можемъ да придаваме все по-голѣми и по-голѣми значения, така че α^n да се приближава все повече до величината a, но всѣкога да остава по-малко отъ нея. Сжщо и на числото β можемъ да придаваме все по-малки и по-малки значения, така че β^n да се приближава все повече до величината a, но всѣкога да остава по-голѣмо отъ нея. По този начинъ числата α и β все повече и повече се приближаватъ до $\sqrt[n]{a}$, безъ да могатъ да го достигнатъ и разликата $\beta-\alpha$ може да се направи произволно малка. Числата α и β се наричатъ **приближени числа** на ирационалното число $\sqrt[n]{a}$, а ирационалното число $\sqrt[n]{a}$ се нарича **прѣдѣлъ**, къмъ който се стрѣмятъ приближенитѣ му числа. Напр.,

$$1^2=1<2<2^2=4,$$
$$1{\cdot}4^2=1{\cdot}96<2<2{\cdot}25=1{\cdot}5^2,$$
$$1{\cdot}41^2=1{\cdot}9881<2<2{\cdot}0164=1{\cdot}42^2,$$
$$1{\cdot}414^2=1{\cdot}999396<2<2{\cdot}002225=1{\cdot}415^2,$$
. . . .

затова

$$1<\sqrt{2}<2,$$
$$1{\cdot}4<\sqrt{2}<1{\cdot}5,$$
$$1{\cdot}41<\sqrt{2}<1{\cdot}42,$$
$$1{\cdot}414<\sqrt{2}<1{\cdot}415,$$
. . . .

Ако намѣсто ирационалното число $\sqrt[n]{a}$ вземемъ кое да е отъ приближенитѣ му числа α или β, то ще направимъ грѣшка, която и въ двата случая е по-малка отъ разликата $\beta-\alpha$ между приближенитѣ числа. На това основание, намѣсто ирационалното число взимаме едно отъ приближенитѣ му числа и казваме, че сме опрѣдѣлили ирационалното число съ точность $=\beta-\alpha$.

Така,

$\sqrt{2}=1$	или 2	съ погрѣшка	$<1.$
$\sqrt{2}=1{\cdot}4$	„ $1{\cdot}5$	„	$<0{\cdot}1.$
$\sqrt{2}=1{\cdot}41$	„ $1{\cdot}42$	„	$<0{\cdot}01.$
$\sqrt{2}=1{\cdot}414$	„ $1{\cdot}415$	„	$<0{\cdot}001$ и т. н.

Бѣлѣжка. Сжщо и ирационалното число $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ лежи между двѣ приближени рационални дроби съ произволно малка разлика, защото

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n]{\frac{ab^{n-1}}{b^n}}=\frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b},$$

а пъкъ видѣхме, че $\sqrt[n]{ab^{n-1}}$ лежи между двѣ приближени числа съ произволно малка разлика.

Отъ геометрията знаемъ, че отношението на двѣ съизмѣрими отсѣчки е рационално число; сир., цѣло или дробно число, а отношението на двѣ несъизмѣрими отсѣчки е ирационално число; сир., не е цѣло, нито пъкъ дробно число. Въ послѣдния случай намѣсто отношението зимаме едно отъ приближенитѣ му числа. Ако AB и CD сж дадени несъизмѣрими отсѣчки и CD<AB, то раздѣляме CD на n равни части и една отъ тѣзи части нанасяме върху AB. Нека AB>m и AB<m+1 такива части. Понеже CD=n, то $\frac{AB}{CD}>\frac{m}{n}$ и $\frac{AB}{CD}<\frac{m+1}{n}$. Намѣсто отношението $\frac{AB}{CD}$ зимаме едно отъ числата $\frac{m}{n}$ или $\frac{m+1}{n}$, разликата на които е $\frac{1}{n}$. Погрѣшката въ този случай е по-малка отъ $\frac{1}{n}$. Понеже n е произволно цѣло число, то при достатъчно голѣмо n погрѣшката може да се направи произволно малка.

Въ геометрията често срѣщаме ирационални числа. Така напр., отношението на страната на квадрата къмъ диагонала му е ирационално число; отношението на обиколката на окржжностьта къмъ диаметъра $\acute{\iota}=\pi$ е сжщо ирационално число.

Понеже рационалнитѣ числа сж съизмѣрими или съ единицата (цѣлитѣ) или пъкъ съ нѣкоя нейна часть (дробнитѣ), то ирационалнитѣ числа, които не сж нито цѣли, нито дробни числа, не сж съизмѣрими нито съ единицата, нито пъкъ съ нѣкоя нейна часть.

§ 41. Ако между всѣки двѣ цѣли положителни или отрицателни числа, прѣдставени графично чрѣзъ неограничена права, вмѣстимъ безчислено много дроби, то пакъ ще останатъ точки, разстоянието на които отъ нулата неможе да се изрази, нито чрѣзъ цѣло нито чрѣзъ дробно число; тѣзи разстояния се изразяватъ само чрѣзъ ирационални числа и по този начинъ редътъ на числата върху правата става непрѣкъснатъ.

Приближени числа на ирационалнитѣ числа и дѣйствия съ тѣхъ.

§ 42. Приближени числа на ирационални квадратни корени.

I. Подкоренната величина е цѣло число.

1. Съ точность до 1. Опрѣдѣляме толкова цифри на корена, колкото сѫ групитѣ на подкоренното число и остатъка прѣнебрѣгваме.

Напр., $\sqrt{7'50}=27$ съ остатъкъ 21. Понеже

$$28>\sqrt{750}>27,$$

то 27 и 28 сѫ търсенитѣ приближени числа, разликата на които е равна на 1. Обикновено, зима се по-малкото отъ приближенитѣ числа.

2. Съ точность до 0·1. Опрѣдѣляме корена съ едно десетично мѣсто, като припишемъ отдѣсно на подкоренното число двѣ нули.

Напр.,

$$\sqrt{750}=\frac{10\sqrt{750}}{10}=\sqrt{\frac{75000}{100}}=\frac{\sqrt{75000}}{10}=\frac{273}{10}=27{\cdot}3.$$

Приближенитѣ числа сѫ 27·3 и 27·4. Че тия приближени числа сѫ съ точность до 0·1, може да се види отъ слѣдното.

Понеже

$$274>\sqrt{75000}>273,$$

то

$$27{\cdot}4>\frac{\sqrt{75000}}{10}>27{\cdot}3,$$

или

$$27{\cdot}4>\sqrt{750}>27{\cdot}3.$$

3. Съ точность до 0·01. Опрѣдѣляме корена съ двѣ десетични мѣста, като приписваме отдѣсно на подкоренното число четири нули. Напр.,

$$\sqrt{750}=\sqrt{750{\cdot}0000}=27{\cdot}38.$$

4. Съ точность до $\frac{1}{10^n}$. Опрѣдѣляме корена съ n десетични мѣста, като приписваме отдѣсно на подкоренното число $2n$ нули.

5. Съ точность до $\frac{1}{n}$, дѣто n не е степень съ основа 10. Работимъ, както по-горѣ:

$$\sqrt{a}=\frac{n\sqrt{a}}{n}=\frac{\sqrt{an^2}}{n}=\frac{b}{n}.$$

Приближеното число на $\sqrt{a}$ е $\frac{b}{n}$ съ точность до $\frac{1}{n}$, дѣто b е приближено число на $\sqrt{an^2}$ съ точность до 1.

Слѣдъ като намѣримъ повече отъ половината цифри на корена, останалитѣ можемъ намѣри, като раздѣлимъ остатъка съ удвоената намѣрена часть на корена, на която приписваме отъ дѣсно толкова нули, колкото още цифри диримъ.

Ще докажемъ това. Нека a е цѣлото число, на което искаме да опрѣдѣлимъ квадратния коренъ съ $2n+1$ цифри и нека да сме намѣрили $n+1$ отъ тия цифри. Ако означимъ намѣрената часть на корена съ m, а останалата—съ x, то

$$\sqrt{a}=10^n m+x,$$

$$a=10^{2n}m^2+2.10^n mx+x^2,$$

отдѣто

$$\frac{a-10^{2n}m^2}{2\,.\,10^n m}=x+\frac{x^2}{2\,.\,10^n m}.$$

Понеже m съдържа $n+1$ цифри, а x—само n цифри, то

$$x^2<10^n m$$

и

$$\frac{x^2}{2\,.\,10^n m}<\frac{1}{2}.$$

Слѣдов.,

$$\frac{a-10^{2n}m^2}{2\,.\,10^n m}=x \text{ съ точность до } {}^1/_2,$$

дѣто $a-10^{2n}m^2$ е остатъкъ, полученъ слѣдъ намирането частьта m на корена и $2\,.\,10^n m$ е удвоената намѣрена часть съ още n нули отдѣсно. Напр.,

но

$$\sqrt{375{,}423{,}121}=193 \text{ съ остатъкъ } 2933121;$$
$$2933121:38600=75 \text{ съ остатъкъ};$$

слѣдов.,

$$\sqrt{375423121}=19375.$$

II. Подкоренната величина е десетична дробь.

При точность до $\frac{1}{10^n}$ всѣка отъ приближенитѣ дроби ще съдържа n десетични мѣста, за което пъкъ подкоренната дробь трѣбва да има $2n$ десетични мѣста. Ако подкоренната дробь има по-малко отъ $2n$ десетични мѣста, допълваме ги съ нули; ако ли сѫ повече — прѣмахваме излишъка; намираме слѣдъ това квадратния коренъ на числителя съ точность до 1 и отдѣляме отъ дѣсната страна n десетични мѣста.

Напр., нека опрѣдѣлимъ $\sqrt{43{\cdot}356}$ съ точность до 0·0001.

$$\sqrt{43 \cdot 356}=\sqrt{43 \cdot 35600000}=6 \cdot 5845.$$

III. Подкоренната величина е обикновена дробь.

1. Ако исканата точность е $\frac{1}{10^n}$, то обръщаме дадената дробь въ десетична съ $2n$ десетични мѣста.

Напр., нека опрѣдѣлимъ $\sqrt{3/7}$ съ точность до 0·001.

$$\sqrt{3/7}=\sqrt{0 \cdot 428571}=0 \cdot 654.$$

2. Обръщаме знаменателя на дробьта въ точенъ квадратъ; опрѣдѣляме квадратния коренъ на числителя съ дадената точность и дѣлимъ този коренъ съ корена на знаменателя.

Напр., нека опрѣдѣлимъ $\sqrt{\frac{2}{3}}$ съ точность до 0·001.

$$\sqrt{\tfrac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2.3}{3^2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{6 \cdot 000000}}{3}=\frac{2 \cdot 449}{3}=0 \cdot 816.$$

§ 43. **Дѣйствия съ ирационални числа.** Дѣйствията, които има да извършваме съ ирационални числа, извършваме ги съ приближенитѣ имъ числа. Отъ това слѣдва, че всички закони на дѣйствията съ рационални числа сж въ сила и за дѣйствията съ ирационални числа.

Въвеждането на ирационалнитѣ числа се приписва на Питагоръ (599—460 г. пр. Р. Хр.). Като търсилъ страната x на такъвъ квадратъ, лицето на който е два пжти по-голѣмо отъ лицето на другъ квадратъ съ дадена страна a; т. е., като рѣшавалъ уравнението $x^2=2a$, Питагоръ първъ пжть срѣщналъ ирационално число. Отъ ученицитѣ му нищо повече не е било направено. Стжпка напрѣдъ за изучването на ирационалнитѣ числа сж направили Платонъ (429—328 г. пр. Р. Хр.) и ученикътъ му Теотетъ. Обширно сж изложени ирационалнитѣ числа въ X книга на Евклидовитѣ елементи. Аполоний е написалъ отдѣлна книга за тѣзи числа, но какъ се намиратъ приближенитѣ имъ числа, първъ е показалъ Архимедъ (287—212 пр. Р. Хр.), който слѣдвайки пжтя на бѣлѣжития си резултатъ $3\frac{10}{11}<\pi<3\frac{1}{7}$, намѣрилъ, че $\frac{265}{153}<\sqrt{3}<\frac{1351}{780}$. На сжщия великъ геометръ се дължи идеята да се разгледватъ числата като прѣдѣли на редове. Така напр., той намѣрилъ, че $^1/_3$ е прѣдѣлъ на безкрайния редъ $\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$ Brahmagupta (598 г.) и Bhaskara (1150 г.) сж срѣщнали ирационални числа при рѣшаването на квадратни уравнения. Новата аритметична теория на ирационалнитѣ числа е изработена въ послѣдно врѣме отъ Вайерщрасъ, Канторъ и Дедекиндъ.

ГЛАВА VI.

Уравнения отъ втора степень съ една неизвѣстна.

Опрѣдѣления.

§ 44. Видѣхме, че на уравнение, на което двѣтѣ страни сж цѣли изрази относително неизвѣстнитѣ, може да се даде вида $A=0$ и че измѣрението на многочлена A относително неизвѣстнитѣ е степень на даденото уравнение. За това, уравнение съ една неизвѣстна е отъ втора степень, когато слѣдъ прѣнасяне всичкитѣ му членове въ една отъ странитѣ му и слѣдъ привеждане на подобнитѣ членове, се получи многочленъ отъ втора степень относително неизвѣстната.

Напр., уравнението

$$x(x+1)-2x=(x-1)(2x+3),$$

слѣдъ като се прѣработи, зима вида:

$$x^2+2x-3=0,$$

което е уравнение отъ втора степень, защото лѣвата му страна относително x е многочленъ отъ втора степень.

Уравненията отъ втора степень се наричатъ още квадратни уравнения, защото съдържатъ квадрата на неизвѣстната.

§ 45. Отъ казаното слѣдва, че на всѣко квадратно уравнение съ една неизвѣстна може да се даде вида:

$$ax^2+bx+c=0,$$

дѣто a, b, и c сж извѣстни величини (a — всѣкога положителна).

Първъ Harriot (1631 г.) е далъ анулиранъ видъ на квадратнитѣ уравнения.

При $b=0$ уравнението зима вида

$$ax^2+c=0.$$

При $c=0$ сжщото уравнение зима вида

$$ax^2+bx=0.$$

Най-послѣ при $b=c=0$ ще имаме

$$ax^2=0.$$

Бѣлѣжка. При a=0, уравнението $ax^2+bx+c=0$ зима вида $bx+c=0$, което е уравнение отъ първа степень и коренътъ му е $x=-\frac{c}{b}$. При a=0 и b=0 уравнението се обръща въ c=0; въ този случай уравнение нѣма.

Уравнението $ax^2+bx+c=0$ се нарича пълно квадратно уравнение, а уравненията $ax^2+c=0$, $ax^2+bx=0$ и $ax^2=0$ — непълни квадратни уравнения.

Непълни квадратни уравнения.

§ 46. **Рѣшения на непълни квадратни уравнения.**

I. Рѣшение на уравнението: $ax^2+bx=0$.

Зимаме x прѣдъ скоби:

$$x(ax+b)=0.$$

Това произведение ще бѫде равно на нула, когато поне единъ отъ множителитѣ му е равенъ на нула; сир.,

$$x=0, \text{ или } ax+b=0.$$

Затова

$$x=0, \text{ или } x=-\frac{b}{a}.$$

Даденото уравнение има два корена, отъ които единътъ е нула.

Примѣри.

1. $2x^2-3x=0$. Рѣшение $x(2x-3)=0$. Затова $x=0$, или $2x-3=0$.

Коренитѣ сѫ $x=0$ и $x=\frac{3}{2}$.

2. $x^2-2x=0$. Рѣшение. $x(x-2)=0$. Затова $x=0$, или $x-2=0$.

Коренитѣ сѫ $x=0$ и $x=2$.

II. Рѣшение на уравнението: $ax^2+c=0$.

Прѣработваме го и намираме

$$x^2=-\frac{c}{a},$$

отдѣто

$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Ако $\frac{c}{a}$ е величина положителна, даденото уравнение има два имагинерни корена. Ако $\frac{c}{a}$ е величина отрицателна, даденото уравнение има два реални корена $+\sqrt{-\frac{c}{a}}$ и $-\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Примѣри.

1. $4x^2-25=0$. Рѣшение. $4x^2=25$; $x^2=\frac{25}{4}$; $x=\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\pm\frac{5}{2}$.

Коренитѣ сѫ $+\frac{5}{2}$ и $-\frac{5}{2}$.

2. $x^2-4=0$. Рѣшение. $x^2=4$, $x=\pm\sqrt{4}=\pm2$. Коренитѣ сѫ $+2$ и -2.

3. $4x^2+25=0$. Рѣшение. $4x^2=-\frac{25}{4}$; $x=\pm\sqrt{-\frac{25}{4}}=\pm\frac{5}{2}i$.

Даденото уравнение има два имагинерни корена.

III. Рѣшение на уравнението: $ax^2=0$. Това уравнение има два равни корена: $x=0$, защото $x^2=\frac{0}{a}=0$ и $x=\sqrt{0}=0$.

Пълни квадратни уравнения.

§ 47. I. Рѣшене на уравнението

$$ax^2+bx+c=0.$$

Прѣнасяме извѣстния членъ на дѣсната му страна:

$$ax^2+bx=-c$$

и допълваме лѣвата му страна до точенъ квадратъ:

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac.$$

Отъ тукъ:

$$(2ax+b)^2=b^2-4ac,$$

$$2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac},$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Отъ двата знака прѣдъ квадратния коренъ заключаваме, че уравнението $ax^2+bx+c=0$ има два корена. Тѣзи корени, отъ които единътъ ще бѣлѣжимъ съ x_1 или x', а другия съ x_2 или x'', сѫ равни на коефициента на x, взетъ съ обратенъ знакъ, $\pm$ квадратния коренъ отъ квадрата на този коефициентъ умаленъ съ четири пѫти произведението на коефициента на x^2 съ извѣстния членъ и всичко това дѣлено съ удвоения коефициентъ на x^2. Горниятъ знакъ прѣдъ корена съотвѣтствува на x_1 и долниятъ на x_2. Ако прѣдъ извѣстния членъ има минусъ, то вториятъ членъ подъ корена се взима съ $+$.

И така

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a};\ x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Примѣри.

1. $2x^2+3x+1=0$.

Рѣшение.

$2x^2+3x=-1;\ 16x^2+24x=-8;\ 16x^2+24x+9=9-8;$

$(4x+3)^2=1;\ 4x+3=\pm\sqrt{1};\ 4x=-3\pm1;\ x=\frac{-3\pm1}{4};$

$$x_1=\frac{-3+1}{4}=-\frac{1}{2}\ \text{и}\ x_2=\frac{-3-1}{4}=-1.$$

2. $8x^2-2x-3=0$.

Рѣшение.

$8x^2-2x=3;\ 256x^2-64x=96;\ 256x^2-64x+4=96+4;$

$(16x-2)^2=100;\ 16x-2=\pm10;\ 16x=2\pm10;\ x=\frac{2\pm10}{16};$

$$x_1=\frac{2+10}{16}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4};\ x_2=\frac{2-10}{16}=-\frac{1}{2}.$$

Уравненията отъ вида $ax^2+bx+c=0$ се рѣшаватъ обикновено съ помощьта на равенството на коренитѣ на това уравнение.

Примѣри.

1. $6x^2-x-1=0$.

Рѣшение.

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4.6.1}}{2.6}=\frac{1\pm\sqrt{25}}{12}=\frac{1\pm5}{12};\ x_1=\frac{1}{2},\ x_2=-\frac{1}{3}.$$

2. $4x^2-7x-2=0$.

Рѣшение.

$$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{7^2+4.4.2}}{2.4}=\frac{7\pm\sqrt{81}}{8}=\frac{7\pm9}{8};\ x_1=2;\ x_2=-\frac{1}{4}.$$

II. Рѣшение на уравнението

$$ax^2+2b_1x+c=0.$$

Коефициентътъ на x е четно число; ползуваме се отъ това, за да упростимъ равенствата за коренитѣ.

$$x_{1,2}=\frac{-2b_1\pm\sqrt{(-2b_1)^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b_1\pm\sqrt{4b_1^2-4ac}}{2a}=$$

$$=\frac{-2b_1\pm2\sqrt{b_1^2-ac}}{2a}=\frac{-b_1\pm\sqrt{b_1^2-ac}}{a},$$ дѣто b_1 е $\frac{1}{2}$ отъ коефициента на x.

Примѣри.

1. $3x^2-8x+4=0$.

Рѣшение.

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{3}=\frac{4\pm2}{3};\ x_1=2,\ x_2=\frac{2}{3}.$$

2. $3x^2-24x+45=0$.

Рѣшение.

$$x_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{144-135}}{3}=\frac{12\pm3}{3};\ x_1=5,\ x_2=3.$$

III. Рѣшение на уравнението

$$x^2+2b_1x+c=0.$$

Коефициентътъ на x^2 е 1, а оня на x е четно число. Ползуваме се отъ тази особеность на коефициентитѣ, за да упростимъ равенствата за коренитѣ.

$$x_{1,2}=\frac{-2b_1\pm\sqrt{(-2b_1)^2-4.1.c}}{2.1}=\frac{-2b_1\pm\sqrt{4b_1^2-4c}}{2}=\frac{-2b_1}{2}\pm$$

$$\pm\frac{\sqrt{4b_1^2-4c}}{2}=-b_1\pm\frac{\sqrt{4b_1^2-4c}}{2}=-b_1\pm\sqrt{b_1^2-c},$$

дѣто b_1 е $\frac{1}{2}$ отъ коефициента на x.

Отъ равенството

$$x_{1,2}=-b_1\pm\sqrt{b_1^2-c}$$

заключаваме, че коренитѣ на уравнението $x^2+2b_1x+c=0$ сѫ равни на половината коефициентъ на x, взетъ съ обратенъ знакъ, $\pm$ квадратенъ коренъ отъ квадрата на този полукоефициентъ, умаленъ съ извѣстния членъ. Ако прѣдъ извѣстния членъ има $-$, то вториятъ членъ подъ корена се взима съ $+$.

Примѣри.

1. $x^2-8x+15=0$.

Рѣшение. $x_{1,2}=4\pm\sqrt{16-15}=4\pm1$; $x_1=5$, $x_2=3$.

2. $x^2+4x-12=0$.

Рѣшение. $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{4+12}=-2\pm4$; $x_1=2$, $x_2=-6$.

3. $x^2-12x+32=0$.

Рѣшение. $x_{1,2}=6\pm\sqrt{36-32}=6\pm2$; $x_1=8$, $x_2=4$.

Бѣлѣжка. Уравнението $ax^2+bx+c=0$, чрѣзъ дѣление на a, зима вида

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0,$$

или

$$x^2+px+q=0, \text{ дѣто } p=\frac{b}{a} \text{ и } q=\frac{c}{a}.$$

Ако въ равенството

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

замѣнимъ b съ ap и c съ aq и направимъ нужнитѣ прѣобразувания, ще намѣримъ

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Отъ грѣцкитѣ математици се занимавали съ рѣшаването на квадратни уравнения: 1) Евклидъ (книга II и III), който ги рѣшавалъ по чисто геометриченъ начинъ, 2) Херонъ Александрийски, който е рѣшавалъ уравнения съ числени коефициенти и 3) Диофантъ. Отъ индийцитѣ: 1) Arya-Bhata (род. въ 476 г. сл. Р. Хр,) е далъ общо рѣшение на квадратнитѣ уравнения и 2) Brahmagupta (род. въ 598 г. сл. Р. Хр.), който е зималъ само знака + прѣдъ радикала. Арабскиятъ математикъ Mohamed ben Musa Al-kwarismi (830 г.) дѣлилъ квадратнитѣ уравнения на 6 вида и ги рѣшавалъ геометрично. Италиянецътъ Fibonaci (1175 г.) рѣшавалъ сжщо нѣкои квадратни уравнения.

§ 48. Изслѣдване на коренитѣ $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

1. При $b^2-4ac>0$ уравнението има два реални корена.
2. При $b^2-4ac=0$ уравнението има два равни корена.
3. При $b^2-4ac<0$ уравнението има два имагинерни корена.

Примѣри.

1. Уравнението $x^2+7x+10=0$ има два реални корена, защото $7^2-4\,.\,1\,.\,10=49-40=9>0$. Коренитѣ сж -2 и -5.

2. Уравнението $x^2-6x+9=0$ има два равни корена, защото $(-6)^2-4\,.\,1\,.\,9=36-36=0$. Коренитѣ сж 3 и 3.

3. Уравнението $2x^2-3x+7=0$ има два имагинерни корена, защото $(-3)^2-4\,.\,2\,.\,7=9-56=-47<0$.

Бѣлѣжка. Съ помощьта на равенството $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ се рѣшаватъ и непълнитѣ квадратни уравнения.

Примѣри.

1. $ax^2+bx=0$.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2}}{2a}=\frac{-b\pm b}{2a};\ x_1=\frac{-b+b}{2a}=0,\ x_2=\frac{-b-b}{2a}=-\frac{b}{a}.$$

2. $ax^2+c=0$.

$$x_{1,2}=\frac{-0\pm\sqrt{0^2-4ac}}{2a}=\pm\sqrt{-\frac{4ac}{4a^2}}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}};\ x_1=+\sqrt{-\frac{c}{a}};\ x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

§ 49. Свойства на коренитѣ.

I. Нека е дадено уравнението $ax^2+bx+c=0$. Събираме коренитѣ му:

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

и послѣ ги умножаваме:

$$x_1\,.\,x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}=$$

$$=\frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

Сумата отъ коренитѣ на уравнението $ax^2+bx+c=0$, е равна на $-\dfrac{b}{a}$, а произведението — на $\dfrac{c}{a}$.

При равни корени, $x_1+x_2=2x_1=-\dfrac{b}{a}$, отдѣто $x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$.

Сжщо: $x_1\,.\,x_2=x_1{}^2=\dfrac{c}{a}$, отдѣто $x_1=x_2=\pm\sqrt{\dfrac{c}{a}}$.

II. Нека е дадено уравнението $x^2+bx+c=0$. Като съберемъ и послѣ умножимъ коренитѣ му, ще намѣримъ:

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}=\frac{-2b}{2}=-b,$$

$$x_1\,.\,x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4c})^2}{4}=$$

$$=\frac{b^2-b^2+4c}{4}=c.$$

Сумата отъ коренитѣ на уравнението $x^2+bx+c=0$ (или $x^2+px+q=0$), е равна на коефициента на x съ обратенъ знакъ ($-b$, или $-p$), а произведението имъ — на извѣстния членъ (c, или q).

Ако коренитѣ сѫ равни, то

$$x_1+x_2=2x_1=-b, \text{ отдѣто } x_1=x_2=-\frac{b}{2}.$$

Сѫщо: $x_1 . x_2=x_1^2=c$, отдѣто $x_1=x_2=\pm\sqrt{c}$.

Прѣвъ Viette (1540—1603) е посочилъ на свойствата на коренитѣ на квадратното уравнение.

Слѣдствия. I. Ако сѫ дадени коренитѣ на квадратно уравнение, то можемъ състави това уравнение.

На уравнението $ax^2+bx+c=0$ можемъ да дадемъ вида

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

и ако дадени коренитѣ сѫ x_1 и x_2, то като замѣстимъ въ послѣдното уравнение $\frac{b}{a}$ съ $-(x_1+x_2)$ и $\frac{c}{a}$ съ $x_1 x_2$, ще получимъ

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1 . x_2=0.$$

Примѣри. 1. Ако $x_1=5$, $x_2=-4$, то $\frac{b}{a}=-1$ и $\frac{c}{a}=-20$; уравнението е

$$x^2-x-20=0.$$

2. Ако $x_1=-\frac{7}{3}$ и $x_2=-\frac{11}{3}$, то $\frac{b}{a}=+\frac{18}{3}$ и $\frac{c}{a}=\frac{77}{9}$.

Уравнението е

$$x^2+\frac{18}{3}x+\frac{77}{9}=0, \text{ или } 9x^2+54x+77=0.$$

3. Да се намѣрятъ двѣ числа, сумата на които да е равна на 5, а произведението на — 36. Тукъ $\frac{b}{a}=-5$, $\frac{c}{a}=-36$; рѣшаваме уравнението

$$x^2-5x-36=0,$$

коренитѣ на което сѫ $x_1=9$, $x_2=-4$. Търсенитѣ числа сѫ 9 и —4.

II. Ако коренитѣ на уравнението $ax^2+bx+c=0$ сѫ x_1 и x_2, то можемъ написа това уравнение и така:

$$a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=0,$$
$$a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2]=0,$$
$$a(x-x_1)(x-x_2)=0.$$

т. е., лѣвата страна на анулираното уравнение може да се прѣдстави като произведение отъ три множители, отъ които единътъ е a, а другитѣ два сѫ разлики на неизвѣстната и всѣки отъ коренитѣ. Напр., уравнението $15x^2+14x-8=0$ има корени $\frac{2}{5}$ и $-\frac{4}{3}$; затова може се написа въ вида $15(x-\frac{2}{5})(x+\frac{3}{4})=0$.

Бѣлѣжка. Квадратно уравнение не може да има повече отъ два корена. Ако допуснемъ, че уравнението $ax^2+bx+c=0$ има три различни корени x_1, x_2 и x_3, то

$$ax_1^2+bx_1+c=0 \quad . \quad . \quad . \quad 1),$$
$$ax_2^2+bx_2+c=0 \quad . \quad . \quad . \quad 2),$$
$$ax_3^2+bx_3+c=0 \quad . \quad . \quad . \quad 3).$$

Ако отъ 1) извадимъ послѣдователно 2) и 3), ще получимъ:

$$a(x_1^2-x_2^2)+b(x_1-x_2)=0, \text{ или } (x_1-x_2)(ax_1+ax_2+b)=0$$
и
$$a(x_1^2-x_3^2)+b(x_1-x_3)=0, \text{ или } (x_1-x_3)(ax_1+ax_3+b)=0.$$

Понеже разликитѣ x_1-x_2 и x_1-x_3 не сѫ равни на нула, то трѣбва

$$ax_1+ax_2+b=0 \text{ и } ax_1+ax_3+b=0.$$

Като извадимъ послѣднитѣ равенства едно отъ друго, ще получимъ

$$a(x_2-x_3)=0.$$

Понеже a е величина различна отъ нула, то трѣбва $x_2-x_3=0$, или $x_2=x_3$. Слѣдов., трѣбва измежду тритѣ корени x_1, x_2 и x_3 да има най-малко два равни по-между си.

III. Като земемъ прѣдъ видъ равенствата

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \text{ и } x_1 . x_2=\frac{c}{a},$$

можемъ извади слѣднитѣ заключения:

1. Ако $c>0$, коренитѣ иматъ еднакви знакове; при това коренитѣ сѫ положителни или отрицателни, споредъ това дали $b<0$ или $b>0$.

2. Ако $c<0$, коренитѣ иматъ различни знакове; при това положителниятъ коренъ има по-голѣма, или по-малка абсолютна стойность отъ оная на отрицателния, споредъ това дали $b<0$ или $b>0$.

3. Ако $c=0$, единътъ коренъ е равенъ на нула, а другиятъ е равенъ на $-\frac{b}{a}$.

4. Ако $b=0$, коренитѣ иматъ равни абсолютни величини, но съ различни знакове.

Примѣри.

1. Коренитѣ на уравнението $x^2+5x+6=0$ сѫ отрицателни.
2. Коренитѣ на уравнението $x^2-5x+6=0$ сѫ положителни.
3. Коренитѣ на уравнението $x^2+3x-10=0$ иматъ различни знакове и отрицателниятъ коренъ има по-голѣма абсолютна величина.

4. Коренитѣ на уравнението $x^2-3x-10=0$ иматъ различни знакове и положителниятъ коренъ има по-голѣма абсолютна величина.

Изслѣдване на задачи, които водятъ къмъ квадратни уравнения.

§ 50. При задача, която води къмъ рѣшаване на квадратно уравнение, не всѣкога коренитѣ на уравнението сж и рѣшения на задачата. Ще разгледаме слѣднитѣ случаи.

I. Ако $b^2-4ac>0$, уравнението има два корена, които могатъ да бждатъ: 1) при $c>0$, $b<0$ и двата положителни; въ този случай задачата допуща двѣ рѣшения, 2) при $c>0$, $b>0$ и двата отрицателни; въ този случай задачата допуща двѣ рѣшения само, когато търсената величина е алгебрична; не допуща никакво рѣшение въ противенъ случай и 3) при $c<0$ единътъ коренъ е положителенъ, другиятъ — отрицателенъ и задачата допуща двѣ рѣшения, когато търсената величина е алгебрична, а въ противенъ случай задачата има само едно рѣшение.

II. Ако $b^2-4ac<0$, уравнението има имагинерни корени и задачата не допуща никакви рѣшения.

III. Ако $b^2-4ac=0$, уравнението има два равни корена; при това, ако равнитѣ корени сж положителни, задачата допуща едно рѣшение, а въ случай, че равнитѣ корени сж отрицателни, задачата допуща едно рѣшение, но ако търсената величина е релативна; въ противенъ случай не допуща никакво рѣшение.

Ще приведемъ нѣкои примѣри.

1. Да се намѣрятъ двѣ реални числа, разликата на които е d, а произведението имъ p.

Рѣшение. Ако едното число е x, то другото е $x+d$. Споредъ условието: $x(x+d)=p$, или $x^2+dx-p=0$, отдѣто

$$x=\frac{-d\pm\sqrt{d^2+4p}}{2}.$$

Изслѣдване. 1). При $d^2+4p>0$ задачата има двѣ рѣшения, 2). при $d^2+4p=0$ задачата има едно рѣшение и 3) при $d^2+4p<0$ задачата нѣма никакво рѣшение.

Заключение. $p=-\frac{d^2}{4}$ е най-малкото значение на p, при което задачата може да има поне́ едно рѣшение.

2. Да се опрѣдѣлятъ странитѣ на правожгълникъ съ периметъръ $2p$ и съ лице a^2.

Рѣшение. Ако едната страна е x, съсѣдната ѝ ще е $p-x$. Споредъ условието: $x(p-x)=a^2$ или $x^2-px+a^2=0$, отдѣто: $x=\frac{p\pm\sqrt{p^2-4a^2}}{2}$.

Изслѣдване. 1. При $p^2-4a^2>0$, или $p>2a$, уравнението има два реални корена. Задачата има едно рѣшение. 2) При $p^2-4a^2=0$, или $p=2a$, уравнението има два равни корена и задачата има едно рѣшение; търсената фигура е квадратъ. 3) При $p^2-4a^2<0$ или $p<2a$ уравнението има имагинерни корени и задачата нѣма рѣшение.

Заключение. Отрицателнитѣ и имагинернитѣ корени на уравнението не сж рѣшения на задачата.

3. Да се опрѣдѣли хорда, която е на разстояние a отъ центъра на кржгъ, съ радиусъ r.

Рѣшение. Нека хордата е $2x$; споредъ условието: $x^2=r^2-d^2$, отдѣто $x=\pm\sqrt{r^2-d^2}$.

Изслѣдване. 1) При $r^2-d^2>0$, или $r>d$, уравнението има два реални корена, а задачата има едно рѣшение. 2) При $r^2-d^2=0$, или $r=d$, уравнението има два корена $=0$ и задачата има едно рѣшение. 3) При $r^2-d^2<0$, или $r<d$, уравнението има имагинерни корени и задачата нѣма рѣшение.

4. Колко метра сукно ще се купатъ сега съ a лева, ако съ $a+b$ лева сж се купували b м. повече по-рано, когато метърътъ на сукното е струвалъ m лева повече?

Рѣшение. Ще се купятъ x метра. Въ първия случай метърътъ сукно струва $\frac{a}{x}$ лева, а въ втория случай $\frac{a+b}{b+x}$ лева. Споредъ условието: $\frac{a+b}{b+x}-\frac{a}{x}=m$, отдѣто

$$x=\frac{(1-m)b\pm\sqrt{(1-m)^2b^2-4abm}}{2m}.$$

Изслѣдване 1). Ако $(1-m)^2b^2-4abm<0$, задачата нѣма рѣшения. 2). Ако $(1-m)^2b^2-4abm=0$, то *a*) при $m\gtrless{}^{0}_{1}$ задачата има едно рѣшение, когато $b>0$, а въ случай, че $b<0$ задачата нѣма рѣшение; *b*) при $m<0$ задачата има едно рѣшение, когато $b<0$, а въ случай, че $b>0$ задачата нѣма рѣшение; *c*) при $m>1$ задачата има едно рѣшение, когато $b<0$, а въ случай, че $b>0$ задачата нѣма рѣшение. 3). Ако $(1-m)^2b^2-4abm>0$, то *a*) при $m<1$ и $b>0$ задачата има двѣ рѣшения; *b*) при $m>1$ и $b>0$ задачата нѣма рѣшение и *c*) при $b<0$ задачата има само едно рѣшение.

5. На правата, която съединява точкитѣ A и B, дѣто A и B сж източници на свѣтлина, да се намѣри точка C, еднакво освѣтлена отъ двата източника.

Рѣшение. Нека силитѣ на свѣтлината на източницитѣ A и B, на разстояние 1, сж съотвѣтно a и b и нека $AB=d$. Ако $AC=x$, то $BC=b-x$. Отъ физиката знаемъ, че силата на свѣтлината е обратно пропорционална съ квадрата на разстоянието, затова силата на свѣтлината, която получава C отъ A е $\frac{a}{x^2}$, а тая отъ B е $\frac{b}{(d-x)^2}$. Споредъ условието: $\frac{a}{x^2}=\frac{b}{(d-x)^2}$, отдѣто $(a-b)x^2-2adx+ad^2=0$

и $x=\frac{d(a\pm\sqrt{ab})}{a-b}$.

Изслѣдване. a и b сѫ величини положителни и затова уравнението има всѣкога два реални корена. 1). Ако $a \mp b$; сир., източницитѣ иматъ разни сили, задачата има двѣ рѣшения; едната точка лежи между A и B, а другата на продължението на AB и то по-близо до B, когато $a>b$, а по-близо до A, когато $a<b$; въ послѣдния случай отрицателниятъ коренъ е и рѣшение на задачата. 2). Ако $a=b$, то

$x=\frac{d\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$ и $x_1=\infty$, $x_2=\frac{d}{2}$. Задачата има двѣ рѣшения: едната точка е въ срѣдата на AB, а другата—въ безкрайность. 3). Ако $a \mp b$ и $d=0$; сир., източницитѣ се сливатъ, то и равноосвѣтлената точка се слива съ източницитѣ. 4). Ако $a=b$, $d=0$, то $x_1=\frac{0}{0}$ и $x_2=0$. Първиятъ коренъ показва, че първата точка е неопрѣдѣлена; т. е., на каквото и разстояние да се намира отъ източницитѣ нѣкоя точка, все ще бѫде еднакво освѣтлена отъ тѣхъ.

ГЛАВА VII.

Уравнения отъ по-висока степень, които се привеждатъ къмъ квадратни уравнения.

§ 51. **Биквадратни уравнения.** Уравнения отъ 4-а степень, които не съдържатъ неизвѣстната съ нечетенъ показатель, се наричатъ биквадратни уравнения. Общиятъ видъ на биквадратнитѣ уравнения е

$$ax^4+bx^2+c=0,$$

дѣто a, b и c сѫ дадени величини (a — всѣкога положителна). Относително квадрата на неизвѣстната, биквадратнитѣ уравнения сѫ квадратни уравнения и като такива, рѣшаватъ се, както и тѣзи послѣднитѣ.

Ако замѣнимъ x^2 съ y и рѣшимъ уравнението

$$ay^2+by+c=0,$$

ще получимъ

$$x^2=y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Слѣдов.,

$$x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

Отъ тукъ

$$x_1=+\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},\quad x_2=+\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},$$

$$x_3=-\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},\quad x_4=-\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

Колко и кои отъ тѣзи корени сѫ реални зависи отъ подкоренната величина, която може да бѫде положителна и отрицателна; въ послѣдния случай, биквадратното уравнение има имагинерни корени. Явно е, че при $b^2-4ac \angle 0$ биквадратното уравнение има сѫщо имагинерни корени.

Примѣри.

1. $x^4-10x^2+9=0$. Отъ уравнението $y^2-10y+9=0$ намираме $y=5\pm4$. Слѣдов., $x_1=+\sqrt{5+4}=+3$, $x_2=-\sqrt{5+4}=-3$, $x_3==+\sqrt{5-4}=+1$ и $x_4=-\sqrt{5-4}=-1$. Даденото уравнение има 4 реални корена.

2. $x^4+10x^2-11=0$. Отъ уравнението $y^2+10y-11=0$ намираме $y=-5\pm6$. Слѣдов., $x_1=+\sqrt{-5+6}=1$, $x_2=+\sqrt{-5-6}=+\sqrt{-11}$, $x_3=-\sqrt{-5+6}=-1$ и $x_4=-\sqrt{-5-6}=-\sqrt{-11}$.

Даденото уравнение има само два реални корена, $+1$ и -1 а останалитѣ два сѫ имагинерни.

§ 52. **Прѣобразуване на изрази отъ вида** $\sqrt{a+\sqrt{b}}$, къмъ които ни привежда рѣшението на биквадратнитѣ уравнения. Има случаи, когато изрази отъ този видъ могатъ се прѣдстави като сума или разлика на два радикала; т. е.,

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y},$$

дѣто x и y сѫ рационални числа.

Ще опрѣдѣлимъ условието, при което едно такъво прѣобразуване е възможно.

Нека $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ и $\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$.

Като съберемъ и послѣ извадимъ едно отъ друго послѣднитѣ равенства, ще получимъ

$$2\sqrt{x}=\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}} \text{ и } 2\sqrt{y}=\sqrt{a+\sqrt{b}}-\sqrt{a-\sqrt{b}}.$$

Степенуваме послѣднитѣ равенства на 2 и намираме

$$2x=a+\sqrt{a^2-b} \text{ и } 2y=a-\sqrt{a^2-b},$$

отдѣто $$x=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2} \text{ и } y=\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}.$$

Понеже x и y трѣбва да сѫ рационални числа, то условието за да бѫде възможно горното прѣобразуване е, щото a^2-b да е т о ч е н ъ к в а д р а т ъ.

Прѣобразуването, за което е дума тукъ, е направено за пръвъ пѫть отъ Нютонъ (1642—1727 г.) въ общата му аритметика.

Lucas Paccioli за пръвъ пѫть (1494 г.) е рѣшавалъ уравнения, приводими къмъ квадратни уравнения. По-кѫсно теорията на тия уравнения е разработена отъ Vandermonde (1771 г.), Gauss (1801 г.) и Lagrange (1808 г.).

Примѣри.

1. Изразътъ $\sqrt{11+\sqrt{21}}$ може да се прѣдстави като сума отъ два радикала, защото $11^2-21=100$; при това $x=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}==\frac{21}{2}$ и $y=\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}=\frac{1}{2}$. Слѣдов., $\sqrt{11+\sqrt{21}}=\sqrt{\frac{21}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$.

2. Изразътъ $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{5-\sqrt{24}}$ може да се прѣдстави като разлика на два радикала, защото $5^2-24=1$; при това $x=3$ и $y=2$. Слѣдов., $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

3. Изразътъ $\sqrt{5\sqrt{3}-\sqrt{72}}=\sqrt{5\sqrt{3}-\sqrt{3}\sqrt{24}}=\sqrt[4]{3}\sqrt{5-\sqrt{24}}=\sqrt[4]{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

§ 53. **Реципрочни уравнения.** Уравнения, на които дѣсната страна е нула, а лѣвата многочленъ, нареденъ по степенитѣ на неизвѣстната и въ който коефициентитѣ на еднакво отдалеченитѣ отъ крайщата членове сѫ или равни или пъкъ равни и съ противоположни знакове, се наричатъ р е ц и п р о ч н и уравнения. Общиятъ видъ на тия уравнения е

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ .\ .\ -\ \pm cx^2\pm bx\pm a=0.$$

Ако x_1 е коренъ на послѣдното уравнение, то

$$ax_1^n+bx_1^{n-1}+cx_1^{n-2}+\ .\ .\ .\ \pm cx_1^2\pm bx_1\pm a=0.$$

Като раздѣлимъ послѣдното равенство на x_1^n, ще получимъ

$$a+b\frac{1}{x_1}+c\frac{1}{x_1^2}+\ .\ .\ .\ \pm c\frac{1}{x_1^{n-2}}\pm b\frac{1}{x_1^{n-1}}\pm a\frac{1}{x_1^n}=0,$$

или

$$\pm a\left(\frac{1}{x_1}\right)^n\pm b\left(\frac{1}{x_1}\right)^{n-1}\pm c\left(\frac{1}{x_1}\right)^{n-2}\pm\ldots+c\left(\frac{1}{x_1}\right)^2+b\frac{1}{x_1}+a=0,$$

или

$$\pm\left[a\left(\frac{1}{x_1}\right)^n+b\left(\frac{1}{x_1}\right)^{n-1}+c\left(\frac{1}{x_1}\right)^{n-2}+\ .\ .\ .\pm c\left(\frac{1}{x_1}\right)^2+b\frac{1}{x_1}\pm a\right]=0,$$

което показва, че $\frac{1}{x_1}$ е коренъ на даденото уравнение.

I. Р е ц и п р о ч н и у р а в н е н и я о т ъ т р е т а с т е п е н ь. Общиятъ видъ на тия уравнения е:

$$ax^3+bx^2\pm bx\pm a=0.$$

За да рѣшимъ това уравнение, разлагаме лѣвата му страна на множители.

$$a(x^3\pm1)+bx(x\pm1)=0,$$
$$a(x\pm1)(x^2\mp x+1)+bx(x\pm1)=0,$$
$$a(x\pm1)(x^2\mp x+bx+1)=0.$$

Рѣшаваме уравненията

$$x \pm 1 = 0 \text{ и } x^2 \mp x + bx + 1 = 0$$

и намѣренитѣ корени сж корени и на даденото уравнение.

Примѣри.

1. $x^3 - 3x_2 - 3x + 1 = 0$. Рѣшение. $x^3 + 1 - 3x(x+1) = 0$; $(x+1)\,(x^2 - x + 1) - 3x(x+1) = 0$; $(x+1)(x^2 - 4x + 1) = 0$. Слѣдов., рѣшението на даденото уравнение се привежда къмъ рѣшение на уравненията

$$x + 1 = 0 \text{ и } x^2 - 4x + 1 = 0,$$

отъ които намираме: $x_1 = -1$, $x_2 = 2 + \sqrt{3}$ и $x_3 = 2 - \sqrt{3}$. Даденото уравнение има три корена.

2. $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$. Рѣшение. $x^3 + 1 + 2x(x+1) = 0$; $(x+1)(x^2 - x + 1) + 2x(x+1) = 0$; $(x+1)(x^2 + x + 1) = 0$. Слѣдов., рѣшението на даденото уравнение се привежда къмъ уравненията

$$x + 1 = 0 \text{ и } x^2 + x + 1 = 0.$$

Отъ първото отъ тѣзи уравнения намираме $x_1 = -1$, а понеже при второто уравнение $b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 \angle 0$, то това уравнение има имагинерни корени. Слѣдов., даденото реципрочно уравнение има само единъ реаленъ коренъ.

II. Реципрочни уравнения отъ 4-а степень. Общиятъ видъ на тия уравнения е

$$ax^4 + bx^3 \pm cx^2 + bx + a = 0, \text{ или } ax^4 \pm bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0,$$

или

$$ax^4 + bx^3 - bx - a = 0.$$

Рѣшението на послѣдното отъ даденитѣ уравнения, като се разложи лѣвата му страна на множители, се привежда къмъ рѣшение на три по-прости уравнения. За да рѣшимъ първото уравнение дѣлимъ го на x^2:

$$ax_2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0,$$

отдѣто

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Ако положимъ $x + \frac{1}{x} = y$, то $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ и, като замѣстимъ въ послѣдното уравнение, ще получимъ:

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0.$$

Коренитѣ y_1 и y_2 на послѣдното квадратно уравнение замѣстяме въ равенството $x + \frac{1}{x} = y$ и получаваме слѣднитѣ двѣ квадратни уравнения

$$x + \frac{1}{x} = y_1 \text{ и } x + \frac{1}{x} = y_2.$$

Коренитѣ на послѣднитѣ двѣ уравнения сж корени и на даденото реципрочно уравнение.

Примѣръ. $x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 4x + 1 = 0$. Рѣшение. $x^2 + 4x - 10 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$, $x^2 + \frac{1}{x^2} + 4\left(x + \frac{1}{x}\right) - 10 = 0$. Като замѣстимъ $x + \frac{1}{x} = y$ и $x_2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, ще получимъ $y^2 - 2 + 4y - 10 = 0$, или $y^2 + 4y - 12 = 0$. Коренитѣ на това уравнение сж 2 и -6. Слѣдов., $x + \frac{1}{x} = 2$ и $x + \frac{1}{x} = -6$, Първото отъ тия уравнения има корени $x_1 = x_2 = 1$, а второто $x_3 = -3 + 2\sqrt{2}$ и $x_4 = -3 - 2\sqrt{2}$.

Даденото реципрочно уравнение има 4 реални корени, отъ които два сж равни.

Второто отъ даденитѣ уравнения се рѣшава по сжщия начинъ, само че полагаме $x - \frac{1}{x} = y$ и тогава $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 \pm 2$.

По сжщия начинъ се рѣшаватъ и уравненията отъ вида:
$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, дѣто коефициентитѣ a, b, d и e удовлетворяватъ пропорцията $a : e = b^2 : d^2$. Примѣръ. $4x^4 + 2x^3 + 10x^2 + 3x + 9 = 0$. Тукъ е изпълнено условието $4 : 9 = 2^2 : 3^2$, затова $4x^2 + 2x + 10 + \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} = 0$, отдѣто $\left(4x^2 + \frac{9}{x^2}\right) + \left(2x + \frac{3}{x}\right) + 10 = 0$. Ако замѣстимъ $2x + \frac{3}{x} = y$, то $4x^2 + \frac{9}{x^2} = y^2 - 12$ и ще получимъ $y^2 - 12 + y + 10 = 0$ или $y^2 + y - 2 = 0$, отдѣто $y_1 = 1$ и $y_2 = -2$. Понеже уравненията $2x + \frac{3}{x} = 1$ и $2x + \frac{3}{x} = -2$, иматъ имагинерни корени, то и даденото уравнение има имагинерни корени.

III. Реципрочни уравнения отъ 5ª степень. Общиятъ видъ на тия уравнения е

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 \pm cx^2 \pm bx \pm a = 0.$$

За да рѣшимъ това уравнение, разлагаме лѣвата му страна на множители.

$$a(x^5 \pm 1) + bx(x^3 \pm 1) + cx^2(x \pm 1) = 0,$$
$$a(x \pm 1)\,(x^4 \mp x^3 + x^2 \mp x + 1) + bx(x \pm 1)\,(x^2 \mp x + 1) + cx^2(x \pm 1) = 0,$$
$$(x \pm 1)\,[a(x^4 \mp x^3 + x^2 \mp x + 1) + bx(x^2 \mp x + 1) + cx^2] = 0.$$

И така рѣшението на даденото уравнение се привежда къмъ рѣшение на двѣ уравнения, едното отъ които е отъ първа степень, а другото — реципрочно отъ 4-а степень. Коренитѣ на тѣзи уравнения сѫ корени и на даденото уравнение; тѣ сѫ 5 на брой.

Примѣръ. $x^5+10x^4-11x^3-11x^2+10x+1=0$. Р ѣ ш е н и е. $x^5+1+10x(x^3+1)-11x^2(x+1)=0$; $(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)+10x(x+1)(x^2-x+1)-11x^2(x+1)=0$; $(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1+10x^3-10x^2+10x-11x^2)=0$; $(x+1)(x^4+9x^3-20x^2+9x+1)=0$.

Даденото уравнение дава уравненията

$$x+1=0 \text{ и } x^4+9x^3-20x^2+9x+1=0,$$

отъ които намираме слѣднитѣ 5 корени на даденото уравнение:

$$x_1=-1,\ x_2=x_3=1,\ x_4=\frac{-11+3\sqrt{13}}{2} \text{ и } x_5=\frac{-11-3\sqrt{13}}{2}.$$

Б ѣ л ѣ ж к а. По подобенъ начинъ могатъ се рѣши и нѣкои реципрочни уравнения отъ степень, по-висока отъ пета.

§ 54. Б и н о м н и у р а в н е н и я. Уравнения съ една неизвѣстна, които съдържатъ два члена, се наричатъ б и н о м н и уравнения. Общиятъ видъ на тия уравнения е

$$x^n \pm a=0.$$

Ако $y\sqrt[n]{a}=x$, отдѣто $y^n a=x^n$, то даденото уравнение зима вида

$$ay^n \pm a=0 \text{ или } y^n \pm 1=0.$$

Отъ това слѣдва, че всѣко биномно уравнение се привежда въ уравнение отъ послѣдния видъ, а уравнението

$$y^n \pm 1=0$$

знаемъ да рѣшаваме.

Примѣри.

1. $x^4-81=0$. Ако $x=y\sqrt[4]{81}=3y$, отдѣто $x^4=81y^4$, то $81y^4-81=0$ или $y^4-1=0$.

Рѣшението на уравнението $y^4-1=0$ ни привежда къмъ рѣшаване на слѣднитѣ три уравнения

$$y-1=0,\ y+1=0 \text{ и } y^2+1=0.$$

Първитѣ двѣ уравнения иматъ съотвѣтно коренн 1 и —2, а третото уравнение има имагинерни корени. Слѣдов., реалнитѣ корени на даденото уравнение сѫ 3 и — 3.

2. $x^6+64=0$. Полагаме $x=y\sqrt[6]{64}=2y$, отдѣто $x^6=64y^6$; замѣстваме: $64y^6+64=0$, или $y^6+1=0$; $(y^2)^3+1^3=0$; $(y^2+1)(y^4-y^2+1)=0$. Рѣшението на уравнението $y^6+1=0$ се привежда къмъ рѣшаване на уравненията $y^2+1=0$ и $y^4-y^2+1=0$; първото отъ тия уравнения има имагинерни корени, а второто се привежда въ уравнението $z^2-z+1=0$, като замѣнимъ $y^2=z$ и $y^4=z^2$. Уравнението $z^2-z+1=0$ има имагинерни корени. Слѣдов., и даденото уравнение има имагинерни корени.

3. $64x^6-729=0$. Чрѣзъ прѣработване, даденото уравнение зема послѣдователно слѣднитѣ видове:

$$x^6-\frac{729}{64}=0,\ x=y\sqrt[6]{\frac{729}{64}}=\frac{3y}{2};\ x^6=\frac{729y^6}{64};\ \frac{729y^6}{64}-\frac{729}{64}=0;$$

$y^6-1=0, (y^3-1)(y^3+1)=0, (y-1)(y^2+y+1)(y+1)(y_2-y+1)=0.$
Уравнението $y^6-1=0$ дава уравненията:

$$y-1=0,\ y^2+y+1=0,\ y+1=0 \text{ и } y^2-y+1=0.$$

Първото и третото отъ послѣднитѣ уравнения иматъ съотвѣтно корени 1 и — 1, а второто и четвъртото иматъ имагинерни корени. Слѣдов., реалнитѣ корени на даденото уравнение сѫ $\frac{3}{2}$ и $-\frac{3}{2}$.

§ 55. **Триномни уравнения**. Уравненията отъ вида

$$ax^{2n}+bx^n+c=0$$

се наричатъ т р и н о м н и уравнения. Рѣшението на тия уравнения се привежда къмъ рѣшаване на квадратни уравнения, като се замѣсти $x^n=y$ и $x^{2n}=y^2$. Слѣдъ като се опрѣдѣлятъ коренитѣ y_1 и y_2 на квадратното уравнение $ay^2+by+c=0$, дирятъ се коренитѣ на биномнитѣ уравнения $x^n=y_1$ и $x^n=y_2$. Послѣднитѣ корени сѫ корени и на даденото триномно уравнение.

Б ѣ л ѣ ж к а. При $n=2$ триномнитѣ уравнения се обрѣщатъ въ биквадратни уравнения.

Примѣри.

1. $x^6-72x^3+512=0$. Р ѣ ш е н и е. Ако положимъ $x^3=y$, то $y^2-72y+512=0$, отдѣто $y_1=64$ и $y_2=8$.

Като рѣшимъ биномнитѣ уравнения $x^3=64$ и $x^3=8$, ще намѣримъ коренитѣ на даденото уравнение.

2. $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=12$. Р ѣ ш е н и е. Полагаме $\sqrt[4]{x}=y$, отдѣто $\sqrt{x}=y_2$ и получаваме $y^2+y-12=0$; слѣдъ това $y_1=3$ и $y_2=-4$. Като рѣшимъ ирационалнитѣ уравнения $\sqrt[4]{x}=3$ и $\sqrt[4]{x}=-4$, ще намѣримъ $x=81$; даденото уравнение има само единъ реаленъ коренъ.

Бѣлѣжка. Трѣбва да се помни, че рѣшаването на ирационалнитѣ уравнения въвежда чужди корени, затова не всѣкога намѣренитѣ корени удовлетворяватъ даденото уравнение.

Изобщо, ако дѣсната страна на даденото уравнение е нула, а лѣвата страна може да се разложи на множители, то рѣшението на даденото уравнение се привежда къмъ рѣшаване на толкова уравнения отъ по-долна степень, колкото сж множителитѣ; послѣднитѣ уравнения се получаватъ, като се положи всѣки множитель отдѣлно равенъ на нула. Обратно, ако x_1 е коренъ на даденото уравнение, то $x-x_1$ трѣбва да се съдържа като множитель въ лѣвата страна; слѣдов., като раздѣлимъ лѣвата страна съ множителя $x-x_1$, ще получимъ уравнение отъ степень съ единица по-малка.

По този начинъ понижаваме степеньта на дадено уравнение, когато, безъ да го рѣшаваме (съ налучкване), узнаемъ единъ или повече корени на това уравнение.

ГЛАВА VIII.

Система уравнения отъ втора и по-висока степень.

Система отъ двѣ уравнения, отъ които едното е отъ втора, а другата е отъ първа степень.

§ 56. Общиятъ видъ на уравнение отъ втора степень съ двѣ неизвѣстни е

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0,$$

затова общиятъ видъ на система съ двѣ извѣстни и двѣ уравнения, отъ които едното е отъ втора степень, а другото — отъ първа, е

$$\begin{cases} ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0 \\ mx+ny+p=0. \end{cases}$$

Тая система се рѣшава, обикновено, като се опрѣдѣля една отъ неизвѣстнитѣ, напр. x, отъ второто уравнение и се замѣсти въ първото. Получава се квадратно уравнение относително втората неизвѣстна, за която се получаватъ два корена y_1 и y_2; като замѣстимъ намѣренитѣ корени за y въ второто уравнение, ще намѣримъ и за x два корена. Слѣдов., дадената система допуща двѣ системи корени x_1, y_1 и x_2, y_2.

Понѣкога се случва, че една отъ неизвѣстнитѣ въ квадратното уравнение се изразява чрѣзъ другата неизвѣстна рационално; напр., $x=\alpha y+\beta$ и $x=\gamma y+\delta$. Въ този случай рѣшението на дадената система се привежда къмъ рѣшение на слѣднитѣ двѣ системи отъ първа степень.

$$\begin{cases} x-\alpha y-\beta=0 \\ mx+ny+p=0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x-\gamma y-\delta=0 \\ mx+ny+p=0. \end{cases}$$

Примѣри.

$$\begin{cases} x^2+y^2-4xy+5x-2y-19=0 \\ 2x-3y=5. \end{cases}$$

Рѣшение. Отъ второто уравнение намираме $x=\dfrac{5+3y}{2}$; замѣстяме този изразъ за x въ първото уравнение и получаваме

$$11y^2-12y+1=0,$$

отдѣто $y_1=1$ и $y_2=\frac{1}{11}$. Отъ уравненията

$$2x-3=5 \text{ и } 2x-\frac{3}{11}=5$$

намираме $x_1=4$ и $x_2=\frac{29}{11}$.

2. Нека е дадена системата

$$\begin{cases} x^2-3y^2-2xy-2x+14y-8=0 \\ 2x-5y=1. \end{cases}$$

Рѣшение. Като опрѣдѣлимъ отъ първото уравнение x чрѣзъ y, ще получимъ

$$x=y+1\pm(2y-3);$$

т. е., x се изразява чрѣзъ y рационално; затова рѣшението на дадената система се привежда къмъ рѣшаване на системитѣ

$$\begin{cases} x=3y-2 \\ 2x-5y=1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x=-y+4 \\ 2x-5y=1. \end{cases}$$

Отъ първата система получаваме $x_1=13$, $y_1=5$, а отъ втората $x_2=3$, $y_2=1$.

§ 57. Нѣкои по-прости системи се рѣшаватъ много по-скоро по искуственъ начинъ.

Примѣри. 1. Да се рѣши системата

$$\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6. \end{cases}$$

Рѣшение. 1). Неизвѣстнитѣ x и y сѫ корени на квадратното уравнение $z^2-5z+6=0$, отдѣто: $z_1=3$, $z_2=2$. Слѣдов., $x_1=3$, $y_1=2$, или $x_2=2$, $y_2=3$.

2). Като степенуваме двѣтѣ страни на първото уравнение на 2 и извадимъ отъ двѣтѣ му страни $4xy$, ще получимъ $x-y=\pm 1$; затова рѣшението на дадената система се привежда къмъ рѣшаване на системитѣ

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1, \end{cases}$$

отдѣто $x_1=3$, $y_1=1$ и $x_2=2$, $y_2=3$.

Б е л ѣ ж к а. Уравнения, които не се измѣняватъ, когато замѣнимъ неизвѣстнитѣ една съ друга, се наричатъ с и м е т р и ч н и у р а в н е н и я. Системата на послѣдния примѣръ е съставена отъ симетрични уравнения.

2. Въ системата

$$\begin{cases} x-y=5 \\ xy=-4, \end{cases}$$

като замѣстимъ $-y$ съ z, ще получимъ системата

$$\begin{cases} x+z=5 \\ xz=4, \end{cases}$$

която ни е позната.

3. Да се рѣши системата

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x^2+y^2=13. \end{cases}$$

Като степенуваме първото уравнение на 2 и извадимъ второто, ще получимъ $xy=6$; затова рѣшението на дадената система се привежда къмъ рѣшаване на познатата система

$$\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6. \end{cases}$$

По сѫщия начинъ се рѣшава и системата

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$$

4. Да се рѣши системата

$$\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ x-y=1. \end{cases}$$

Като раздѣлимъ първото уравнение на второто ще получимъ $x+y=3$; затова рѣшението на дадената система се привежда къмъ рѣшаване на системата

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1. \end{cases}$$

По сѫщия начинъ се рѣшава и системата

$$\begin{cases} x^2-y^2=15 \\ x+y=5. \end{cases}$$

Система отъ двѣ квадратни уравнения.

§ 58. Общиятъ видъ на система отъ двѣ квадратни уравнения е

$$\begin{cases} ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0 \\ mx^2+ny^2+pxy+qx+ry+s=0. \end{cases}$$

Ако изразимъ едната неизвѣстна чрѣзъ другата отъ едното уравнение и я замѣстимъ въ другото уравнение, ще получимъ уравнение съ една неизвѣстна отъ 4-а степень, което не всѣкога ще можемъ да рѣшимъ.

Съ уравнения отъ 3-а и 4-а степень сѫ се занимавали арабскитѣ геометри Abul Wafa (940—998) и Omar Alkhayyami; тѣ сѫ построявали коренитѣ на нѣкои специални видове уравнения по чисто геометрични начини, посрѣдствомъ прѣсичане на конични сѣчения. Алгебрично рѣшение на тия уравнения сѫ дали: Tartaglia (1500—1557), Cardano (1507—1576) и двамата Карданови ученици Ludovico Ferrari (1522—1565) и Giovanno Colla (1520—1561). По този случай, забѣлѣжителенъ е споръть, възникналъ между първитѣ двама. Пълно уравнение отъ 4-а степень прьвъ е рѣшилъ Simpson (1745), а Mallet (1780) и Hulbe (1794) сѫ сполучили да приведатъ рѣшението на тия уравнения въ други по-прости.

Съ срѣдствата на елементарната алгебра можемъ да рѣшимъ само нѣкои частни случаи системи. Ето нѣкои отъ тѣхъ.

I. Ако една отъ неизвѣстнитѣ само на едното уравнение се изразява чрѣзъ другата рационално; напр., ако отъ първото уравнение $x=\alpha y+\beta$ и $x=\gamma y+\delta$, то рѣшението на дадената система се привежда къмъ рѣшаване на систсмитѣ

$$\begin{cases} x-\alpha y-\beta=0 \\ mx^2+ny^2+pxy+qx+ry+s=0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x-\gamma y-\delta=0 \\ mx^2+ny^2+pxy+qx+ry+s=0. \end{cases}$$

Примѣръ.

$x^2-2x(2y-1)-3y^2+14y-8=0$

Да се рѣши системата

$$\begin{cases} x^2-3y^2-2xy-2x+14y-8=0 \\ 2x^2+3y^2+5xy-3x+7y-1=0. \end{cases}$$

Отъ първото уравнение намираме $x=y+1\pm(2y-3)$; затова рѣшението на дадената система се привежда къмъ рѣшаване на познатитѣ системи

$$\begin{cases} x=3y-2 \\ 2x^2+3y^2+5xy-3x+7y-1=0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x=-y+4 \\ 2x^2+3y^2+5xy-3x+7y-1=0. \end{cases}$$

Б е л ѣ ж к а. Тукъ принадлежатъ системи, на които едното уравнение е х о м о г е н н о; сир., такъво, на което всичкитѣ членове сѫ отъ еднакво измѣрение, защото въ подобни уравнения всѣкога едната неизвѣстна се изразява чрѣзъ другата рационално.

II. Когато въ всѣко отъ уравненията има нѣкоя неизвѣстна, която да се изразява чрѣзъ останалата рационално; напр., ако отъ първото уравнение $x=\alpha y+\beta$ и $x=\gamma y+\delta$, а отъ второто $y=\alpha_1 x+\beta_1$ и $y=\gamma_1 x+\delta_1$, то рѣшаването на дадената система се привежда къмъ рѣшаване на системитѣ:

$$\begin{cases} x=\alpha y+\beta \\ y=\alpha_1 x+\beta_1, \end{cases} \quad \begin{cases} x=\alpha y+\beta \\ y=\gamma_1 x+\delta_1, \end{cases} \quad \begin{cases} x=\gamma y+\delta \\ y=\alpha_1 x+\beta_1, \end{cases} \quad \begin{cases} x=\gamma y+\delta \\ y=\gamma_1 x+\delta_1. \end{cases}$$

Примѣръ. Да се рѣши системата

$$\begin{cases} x^2-3y^2-2xy-2x+14y-8=10 \\ x^2+3y^2-4xy+10x-18y+24=0. \end{cases}$$

Отъ първото уравнение намираме $x=y+1\pm(2y-3)$, а отъ второто $x=2y-5\pm(y-1)$; затова дадената система се привежда къмъ системитѣ:

$$\begin{cases} x=3y-2 \\ x=3y-6, \end{cases} \quad \begin{cases} x=3y-2 \\ x=y-4, \end{cases} \quad \begin{cases} x=-y+4 \\ x=3y-6, \end{cases} \quad \begin{cases} x=-y+4 \\ x=y-4. \end{cases}$$

Б е л ѣ ж к а. Тукъ принадлежатъ системи, на които и двѣтѣ уравнения сѫ х о м о г е н н и.

III. Да се рѣши системата.

$$\begin{cases} ax^2+by^2+cxy=d \\ mx^2+ny^2+pxy=q. \end{cases}$$

Като уравнимъ постояннитѣ членове и полученитѣ уравнения извадимъ, ще получимъ хомогенно уравнение, което заедно съ едно отъ даденитѣ уравнения дава позната за рѣшаване система.

Примѣръ. За да рѣшимъ системата

$$\begin{cases} 3x^2-5y^2-4xy=1 \\ x^2+y^2-10xy=3, \end{cases}$$

умножаваме първото уравнение на 3 и изваждаме второто уравнение отъ полученото. По този начинъ дадената система се привежда въ системата

$$\begin{cases} 3x^2-5y^2-4xy=1 \\ 4x^2-8y^2-xy=0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2+y^2-10xy=3 \\ 4x^2-8y^2-xy=0. \end{cases}$$ $x^2-13y^2-1xy=1$

По подобенъ начинъ се рѣшаватъ и системи отъ вида

$$\begin{cases} ax^2+by^2+cxy+k\,(dx+ey+f)=0 \\ mx^2+ny^2+pxy+l\,(dx+ey+f)=0. \end{cases}$$

Като се уравнятъ коефициентитѣ прѣдъ $dx+ey+f$ и чрѣзъ изваждане, ще се получи пакъ хомогенно уравнение.

IV. Системи отъ вида

$$\begin{cases} a(x^2+y^2)+bxy+c(x\pm y)+d=0 \\ m(x^2+y^2)+nxy+p(x\pm y+q=0 \end{cases}$$

се рѣшаватъ, като замѣстимъ $x\pm y=u$ и $xy=v$; получаваме система, която лесно се рѣшава.

Примѣръ. Да се рѣшатъ системитѣ

$$\begin{cases} 4(x^2+y^2)-7xy-10=0 \\ 8(x^2+y^2)-9xy-10(x+y)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 9x^2+9y^2-5(y-x)=40 \\ 3xy+7(x-y)=-1. \end{cases}$$

Замѣстяме $x\pm y=u$, $xy=v$; тогава $x^2+y^2=u^2\pm 2v$ и ще получимъ системи, които лесно се рѣшаватъ.

V. Системи отъ вида

$$\begin{cases} ax^2+by^2=c \\ mx^2+ny^2=p \end{cases}$$

рѣшаваме, като замѣстимъ $x^2=u$ и $y^2=v$; получаваме система отъ първа степень.

VI. **Искуствени начини**. Често пжти, чрѣзъ събиране, изваждане или дѣление на даденитѣ двѣ уравнения се получава ново уравнение, което е по-просто отъ кое да е отъ даденитѣ уравнения. Полученото уравнение съ едно отъ даденитѣ уравнения дава система по-проста отъ дадената. По нѣкога се получаватъ двѣ нови уравнения, които сжщо даватъ система, еквивалентна на дадената.

Примѣри. 1. Въ системата

$$\begin{cases} x+xy=25 \\ y+xy=47, \end{cases}$$

като извадимъ едно отъ друго даденитѣ уравнения, ще получимъ $y-x=22$, което уравнение съ едно отъ даденитѣ ни дава лесно рѣшима система.

2. Въ системата

$$\begin{cases} x-y+5=3xy \\ xy-10x+y=-17 \end{cases}$$

изключваме членоветѣ, които съдържатъ xy, като уравнимъ коефициентитѣ.

3. Въ системата

$$\begin{cases} x^2+xy=15 \\ y^2+xy=10, \end{cases}$$

като раздѣлимъ, а послѣ съберемъ даденитѣ уравнения, ще получимъ двѣтѣ уравнения на новата система,

4. Въ системата

$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=50 \\ x^2-y^2+x-y=10, \end{cases}$$

като съберемъ двѣтѣ уравнения, ще получимъ уравнение съ една неизвѣстна.

5. Системата

$$\begin{cases} x^2-6xy+9y^2-4x+12y=-4 \\ x^2-2xy+3y^2-4x+5y=53 \end{cases}$$

рѣшаваме, като дадемъ на първото уравнение вида

$$(x-3y)^2-4(x-3y)=-4$$

и замѣстимъ $x-3y$ съ z.

Система отъ двѣ уравнения отъ по-висока степень.

§ 59. Когато едното или и двѣтѣ уравнения на дадена система сж отъ по-висока степень, то подобна система, обикновено, се рѣшава по искуственъ начинъ.

Примѣри. Да се рѣши системата

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x^4+y^4=17. \end{cases}$$

Второто уравнение написваме въ вида

$$[(x+y)^2-xy]^2-2x^2y^2=17$$

и като замѣстимъ $x+y=3$ и $xy=z$, ще получимъ уравнението

$$(9-2z)^2-2z^2=17,$$

което лесно се рѣшава.

2. Да се рѣши системата

$$\begin{cases} xy+xy^3=10 \\ x+xy^2+xy^4=2. \end{cases}$$

Като раздѣлимъ първото уравнение на второто, ще получимъ

$$5y^4-y^3+5y^2-y+5=0,$$

което е реципрочно уравнение.

Система отъ три уравнения съ три неизвѣстни.

§ 60. Когато едното уравнение е квадратно, а другитѣ двѣ отъ първа степень, то изразяваме отъ послѣднитѣ двѣ уравнения двѣ отъ неизвѣстнитѣ чрѣзъ третата неизвѣстна и като замѣстимъ въ първото уравнение, ще получимъ квадратно уравнение съ една неизвѣстна. Напр.,

$$\begin{cases} xy+xz+yz=11 \\ x-y=1 \\ y-z=1. \end{cases}$$

Като замѣстимъ въ първото уравнение x съ $1+y$ и z съ $y-1$, ще получимъ

$$y^2=4.$$

Когато двѣ или три отъ даденитѣ уравнения сж квадратни, или отъ по-висока степень, общо правило не може да се даде. Подобни системи се рѣшаватъ по искуственъ начинъ.

Примѣри. 1. Да се рѣши системата

$$\begin{cases} x(x+y+z)=a \\ y(x+y+z)=b \\ z(x+y+z)=c. \end{cases}$$

Като съберемъ и тритѣ уравнения, ще получимъ

$$x+y+z=\pm\sqrt{a+b+c}.$$

Като дѣлимъ всѣко отъ даденитѣ уравнения съ полученото, ще получимъ x, y и z.

2. Да се рѣши системата

$$\left|\begin{array}{l} xy=a \\ yz=b \\ zx=c. \end{array}\right.$$

Като умножимъ и тритѣ уравнения помежду имъ, ще получимъ

$$xyz=\pm\sqrt{abc}.$$

Като дѣлимъ послѣдното уравнение на всѣко отъ даденитѣ, ще получимъ x, y и z.

3. Да се рѣши системата

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{xyz}{x+y}=a \\ \dfrac{xyz}{y+z}=b \\ \dfrac{xyz}{z+x}=c. \end{array}\right.$$

Като се освободимъ отъ знаменателитѣ, дѣлимъ всѣко отъ уравненията на xyz и замѣстимъ $\frac{1}{xy}=u$, $\frac{1}{yz}=v$ и $\frac{1}{yz}=t$, ще получимъ система отъ първа степень.

ГЛАВА IX.

Тричленъ отъ втора степень.

Измѣнение на тричлена ax^2+bx+c.

§ 61. **Опрѣдѣление.** Въ израза

$$y=ax^2+bx+c$$

триномътъ y е *функция отъ втора степень* или *квадратна функция* на промѣнливата x. Значенията на x, които правятъ $y=0$, сѫ корени на тринома; тѣ сѫ:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ и } x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Видѣхме (§ 49, сл. II), че $y=a(x-x_1)(x-x_2)$, отдѣто слѣдва

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

§ 62. **Измѣнение на знака на тринома.** За да видимъ, какъ се измѣнява знакътъ на y съ измѣнението на x, ще разгледаме слѣднитѣ случаи.

I. $b^2-4ac<0$. Въ този случай множительтъ

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=\left|x+\frac{b}{2a}\right|^2+\left|\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right|^2$$

е всѣкога положителенъ и при каквото и да е x функцията y *запазва знака на* a.

II. $b^2-4ac=0$. Въ този случай $x_1=x_2$ и

$$y=a(x-x_1)^2.$$

Тукъ y *запазва сѫщо знака на* a, при каквото и да е x.

III. $b^2-4ac>0$. Тукъ могатъ се яви слѣднитѣ три случаи:

a) $x<x_2$. Понеже x е по-малко отъ по-малкия коренъ, то x е по-малко и отъ по-голѣмия коренъ; сир., $x<x_1$. Слѣдов., произведението $(x-x_1)(x-x_2)$ е положително и y запазва знака на a.

b) $x>x_1$. Понеже $x>x_1$, то $x>x_2$; слѣдов., произведението $(x-x_1)(x-x_2)$ е положително и y запазва знака на a.

c) $x_1>x>x_2$. Въ този случай произведението е отрицателно и y има знакъ, обратенъ на знака на a.

Заключение. При постепенното измѣняване на x отъ $-\infty$ до $+\infty$ само въ единъ случай триномътъ y има знакъ, обратенъ на знака на a; това е, когато значенията на x се заключаватъ между неравнитѣ реални корени x_1 и x_2. Въ всѣки други случай знакътъ на y е еднакъвъ съ оня на a.

Бѣлѣжка. Заключението е вѣрно и когато $b=0$ или пъкъ $c=0$, защото и въ този случай тричленътъ има два корена.

Примѣри. 1. Тричленътъ $y=x^2+4x-32$ има корени -8 и $+4$; затова $y=x^2+4x-32=(x-4)(x+8)$. Функцията $y>0$ за x отъ $-\infty$ до -8, $y<0$ за x отъ -8 до $+4$ и $y>0$ за x отъ $+4$ до $+\infty$.

2. Тричленътъ $y=x^2-10x+25$ има равни корени $x_1=x_2=5$; затова $y=(x-5)^2$. Знакътъ на y е всѣкога $+$.

3. Тричленътъ $y=x^2-5x+8$ е всѣкога положителенъ, защото $b^2-4ac=-7$.

Слѣдствия. I. Неравенства отъ втора степень. Общиятъ видъ на неравенство отъ втора степень е

$$ax^2+bx+c>0.$$

За да намѣримъ условията, при които това неравенство е възможно, ще разгледаме слѣднитѣ два случая:

a) $a>0$. Въ този случай се иска тричленътъ да има еднакъвъ знакъ съ оня на a; това е възможно всѣкога при $b^2-4ac\leq 0$, а при $b^2-4ac>0$ е възможно само за тия значения на x, които лежатъ извънъ коренитѣ на тричлена; сир., когато $x<x_2$ или $x>x_1$.

b) $a<0$. Въ този случай се иска тричленътъ да има знакъ обратенъ на оня на a; това е възможно при $b^2-4ac>0$ и то само за тия значения на x, които лежатъ между коренитѣ на тричлена; сир., $x_1>x>x_2$. При $b^2-4ac\leq 0$ неравенството е невъзможно, защото тричленътъ има знакъ, еднакъвъ съ оня на a.

Примѣри. 1. Неравенството $x^2-4x+3<0$ се удовлетворява за $x<1$ или $x>3$, защото коренитѣ на дадения тричленъ сж 1 и 3.

2. Неравенството $4x^2+5x-19<0$ се удовлетворява за

$$\frac{-5-\sqrt{329}}{8}<x<\frac{-5+\sqrt{329}}{8},$$

защото тричленътъ има знакъ, обратенъ на оня на a, когато x лежи между коренитѣ $\frac{-5-\sqrt{329}}{8}$ и $\frac{-5+\sqrt{329}}{8}$.

3. Неравенството $7x^2-4x+1<0$ е невъзможно, а неравенството $7x-4x+1>0$ е възможно за произволни значения на x, защото $b^2-4ac<0$ и тричленътъ всѣкога има знакъ, еднакъвъ съ оня на a и никога обратенъ.

II. Можемъ лесно да узнаемъ, дали дадено число лежи между или извънъ коренитѣ на даденъ тричленъ. Достатъчно е, да замѣстимъ даденото число въ тричлена и, ако знакътъ на тричлена е еднакъвъ съ оня на a, то даденото число е извънъ коренитѣ; въ противенъ случай даденото число лежи между коренитѣ.

Примѣри. 1. Дадено е уравнението $3x^2-17x+10=0$. Числата 0 и 6 лежатъ извънъ коренитѣ, защото $(3x^2-17x+10)_0=10$ и $(3x^2-17x+10)_6=16$, а числата 3 и 4 лежатъ между коренитѣ, защото $(3x^2-17x+10)_3=-14$ и $(3x^2-17x+4)_4=-16$. И наистина коренитѣ сж $^2/_3$ и 5.

2. Числото 3 е между, а 10 извънъ коренитѣ на тричлена $y=x^2-6x-16$, защото $(y)_3=-31$ и $(y)_{10}=24$. И наистина коренитѣ сж -2 и 8.

§ 63. **Измѣнение величината на тричлена.** Отъ равенството

$$y=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

се вижда, че величината на y зависи само отъ члена $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, защото само този членъ съдържа промѣнливата x. Ще разгледаме слѣднитѣ случаи.

I. $a>0$.

a) При $x=-\infty$, $y=a\,.\,\infty=\infty$.

b) При $x=-\frac{b}{2a}$, $y=a\,.\,\frac{4ac-b^2}{4a^2}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

c) При $x=+\infty$, $y=0\,.\,\infty=\infty$.

Тричленътъ y тръгва отъ $+\infty$ (при $x=-\infty$), намалява се до $\frac{4ac-b^2}{4a}$ (при $x=-\frac{b}{2a}$) и послѣ се увеличава до $+\infty$ (при $x=+\infty$).

II. $a<0$.

a) При $x=-\infty$, $y=a\,.\,\infty=-\infty$.

b) При $x=-\frac{b}{2a}$, $y=a\,.\,\frac{4ac-b^2}{4a^2}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

c) При $x=+\infty$, $y=a\,.\,\infty=-\infty$.

Тричленътъ y тръгва отъ $-\infty$ (при $x=-\infty$) увеличава се до $\frac{4ac-b^2}{4a}$ (при $x=-\frac{b}{2a}$) и послѣ се намалява до $-\infty$ (при $x=+\infty$).

Заключение. При $a > 0$ най-малката величина на тричлена е $\frac{4ac-b^2}{4a}$; тая величина се нарича минимумъ на тричлена. При $a < 0$ най-голѣмата величина на тричлена е $\frac{4ac-b^2}{4a}$; тая величина се нарича максимумъ на тричлена. Тричленътъ има минимумъ или максимумъ при $x=-\frac{b}{2a}$; т. е., при $x=$ на полусбора отъ коренитѣ на тричлена.

Бѣлѣжка. При прѣминаването на у отъ $-\infty$ до $+\infty$ тричленътъ минава по два пѫти прѣзъ една и сѫща величина. Тричленътъ получава равни величини за тия значения на x, които сѫ еднакво отдалечени отъ $-\frac{b}{2a}$. Това ще докажемъ, като замѣстимъ въ равенството

$$y=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

x съ $-\frac{b}{2a}+k$ и съ $-\frac{b}{2a}-k$; т. е., съ значения еднакво отдалечени отъ $-\frac{b}{2a}$; и въ двата случая се получава една и сѫща величина

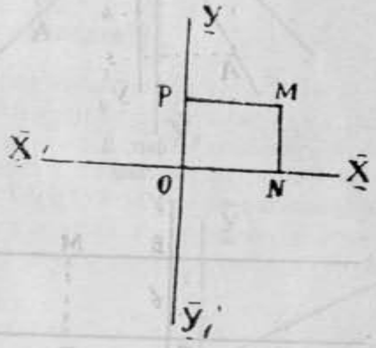
$$y=a\left(k^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right).$$

ГЛАВА X.

Графично прѣдставяне на линейната и квадратната функции.

Линейна функция.

§ 64. Измѣненията на функцията $ax+b$ въ зависимость отъ тия на независимата промѣнлива ставатъ по-нагледни, ако ги прѣдставимъ графично. За тая цѣль начертаваме (фиг. 2) на плоскостьта двѣ взаимно перпендикулярни прави XOX_1 и Y_1OY и зимаме посокитѣ X_1X и Y_1Y за положителни, а посокитѣ XX_1 и YY_1 за отрицателни. Правата X_1X се нарича абсцисна ось, правата Y_1Y — ординантна ось, а двѣтѣ носятъ общо название координантни оси. Ако отъ дадена точка M на плоскостьта спуснемъ перпендикуляри къмъ двѣтѣ оси, то ще намѣримъ двѣ точки N и P, които сѫ крайща на векторитѣ ON и OP. На тѣзи вектори съотвѣтствуватъ алгебричнитѣ числа x и y, които се наричнтъ координати на точката M; отъ тѣхъ x се нарича абсциса, y — ордината на M Като сѫ дадени координатитѣ на нѣкоя точка, лесно опрѣдѣляме положението ѝ: отмѣрваме y върху Y_1Y (отъ O нагорѣ или надолу) и x върху X_1X (отъ O на дѣсно или на лѣво) и отъ крайнитѣ точки на векторитѣ издигаме перпендикуляри къмъ оситѣ; исканата точка е прѣсѣчникъ на тѣзи перпендикуляри.



фиг. 2.

За да прѣдставимъ измѣненията на функцията $y=2x-1$ графично, даваме на x различни значения и изчисляваме съотвѣтнитѣ значения на y.

Ако $x=2,-1,0,\frac{1}{2},1,2,3,$

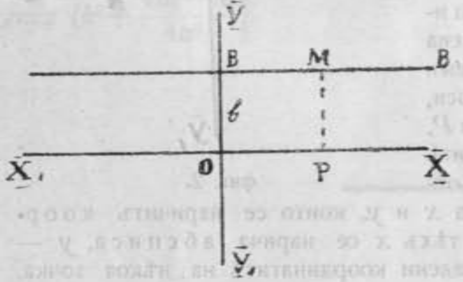
то $y=-5,-3,-1,\ 0,\ 1,\ 3,\ 5.$

Начертаваме координатнитѣ оси (фиг. 3). Значенията на x зимаме за абсциси, а значенията на y — за съотвѣтни ординати и по този начинъ получаваме редъ точки, които съединяваме съ линия, която се нарича **линия на функцията** $y=2x-1$.

фиг. 3.

Нѣма нужда да даваме на x всички значения отъ $-\infty$ до $+\infty$, защото линията на функцията $y=ax+b$ е права линия. Ще докажемъ това. Ще разгледаме послѣдователно слѣднитѣ случаи:

1. $a=0$. Въ този случай функцията зима вида $y=b$, което показва, че y е величина постоянна и не зависи отъ x. Всичкитѣ точки на линията на y сѫ еднакв отдалечени отъ оста X_1X (фиг. 4), затова $y=b$ е права успоредна на X_1X и е на разстояние отъ нея, равно на b. Понеже функцията y е величина постоянна, то тя нито се увеличава, нито се намалява; сѫщото е и съ линията ѝ: тя нито се издига, нито се снишава, а остава се еднакво отдалечена отъ X_1X.



фиг. 4.

2. $b=0$. Въ този случай функцията зима вида $y=ax$. Ако $x=-2-1,0,1,2$, то $y=-2a,-a,0,a,2a$. Нека полученитѣ точки (фиг. 5) сѫ съотвѣтно A,B,O,C и D. Тукъ: $OA_1=-2, A_1A=2a$, $OB_1=-1$; $B_1B=-a$; $OC_1=1$, $C_1C=a$; $OD_1=2$, $D_1D=2a$.

Правоѫгълнитѣ триѫгълници OAA_1, OBB_1, OCC_1, и ODD_1, сѫ подобни, защото

$$\frac{A_1A}{OA_1}=\frac{B_1B}{OB_1}=\frac{C_1C}{OC_1}=\frac{D_1D}{OD_1}=a; \quad \text{слѣдов.,} \quad \sphericalangle AOA_1=\sphericalangle BOB_1=$$

$=\sphericalangle COC_1=\sphericalangle DOD_1$, а отъ тукъ: OA, OB, OC и OD съставятъ една и сѫща права, която минава прѣзъ прѣсѣчника O на оситѣ. Ако $a>0$, правата минава прѣзъ ѫгъла XOY и ако $a<0$—правата минава прѣзъ ѫгъла X_1OY. Въ първия случай функцията е възходяща,

а въ втория—низходяща. Сѫщото е и съ линията ѝ; при нарастването на x тя се възкачва въ първия случай и слиза въ втория.

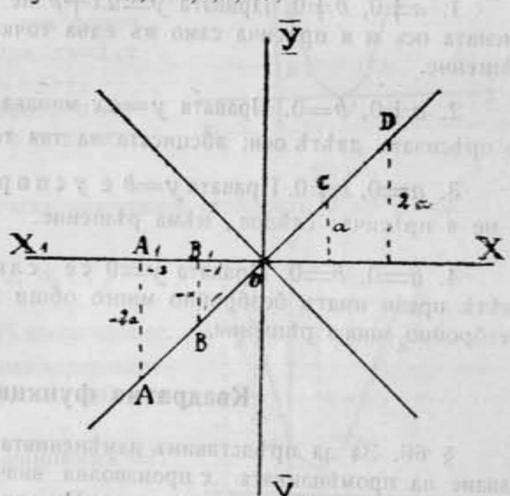
3. $a\neq0$, $b\neq0$. Въ този случай $y=ax+b$. Построяваме найнапрѣдъ правата $y'=ax$. (фиг. 6).

Ако $x=-2,-1,0,1,2$

то $y=-2a+b,-a+b, b, a+b, 2a+b$,

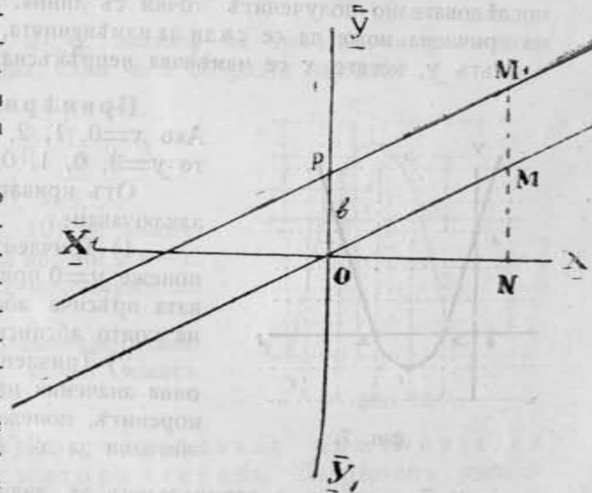
и $y'=-2a,-a,0,a,2a$;

отъ дѣто заключаваме, че разликата между ординатитѣ на двѣ точки, които иматъ една и сѫща абсциса и отъ които едната лежи на линията на първата функция, а другата — на линията на втората функция, е величина постоянна и равна на b. Съ други думи, линиитѣ на функциитѣ $y=ax+b$ и $y'=ax$ сѫ успоредни; слѣдователно, линията на функцията $y=ax+b$ е права. Съ нарастването на x правата на първата функция се възкачва, или слиза, споредъ това, дали правата на втората функция се възкачва, или слиза; т. е., споредъ това дали $a>0$ или $a<0$.



фиг. 5.

§ 65. **Графично изслѣдване рѣшението на едно уравнение съ една неизвѣстна отъ първа степень.** Да рѣшимъ уравнението $ax+b=0$, ще рече да намѣримъ това значение за x, при което функцията $y=ax+b$ става равна нула.



фиг. 6.

Ако прѣдставимъ функцията графично, ще получимъ права и точката на тая права, която има координати $x=-\frac{b}{a}$ и $y=0$, лежи на абсцисната ось; слѣдов., тая точка е прѣсѣчникъ на правата съ абсцисната ось. Отъ тукъ: да рѣшимъ уравнението $ax+b=0$, ще рече да намѣримъ абсцисата на точката, въ която правата $y=ax+b$ прѣсича абсцисната ось.

Ще разгледаме слѣднитѣ случаи:

1. $a\neq0$, $b\neq0$. Правата $y=ax+b$ не е успоредна на абсцисната ось и я прѣсича само въ една точка; слѣдов., има само едно рѣшение.

2. $a\neq0$, $b=0$. Правата $y=ax$ минава прѣзъ точката, въ която се прѣсичатъ двѣтѣ оси; абсцисата на тая точка е $x=0$.

3. $a=0$, $b\neq0$. Правата $y=b$ е успоредна на абсцисната ось и не я прѣсича; слѣдов., нѣма рѣшение.

4. $a=0$, $b=0$. Правата $y=0$ се слива съ абсцисната ось; двѣтѣ прави иматъ безбройно много общи точки и уравнението има безбройно много рѣшения.

Квадратна функция.

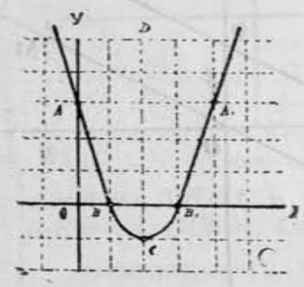
§ 66. За да прѣдставимъ измѣненията на тричлена графично, даваме на промѣнливата x произволни значения и намираме съответнитѣ значения на функцията y. Построяваме въ координатната система точки, координатитѣ на които сж x и y и съединяваме послѣдователно полученитѣ точки съ линия. Отъ получената линия на тричлена може да се сжди за измѣненията, които прѣтърпява тричленътъ y, когато x се измѣнява непрѣкъснато отъ $-\infty$ до $+\infty$.

Примѣри. 1. $y=x^2-4x+3$. Ако $x=0, 1, 2, 3, 4, 5, -1, \ldots$, то $y=3, 0, 1, 0, 3, 8, 8 \ldots$

Отъ кривата на тричлена (фиг. 7) заключаваме:

1) Тричленътъ има корени 1 и 9, понеже $y=0$ при $x=1$ и $x=3$; сир., кривата прѣсича абсцисната ось въ точки, на които абциситѣ сж 1 и 3.

2) Тричленътъ е положителенъ за ония значения на x, които сж извънъ коренитѣ, понеже ординатитѣ сж положителни за $x<1$ или $x>3$.



фиг. 7.

3) Тричленътъ е отрицателенъ за значенията на x, които сж между коренитѣ, понеже ординатитѣ сж отрицателни за $1<x<3$.

4) При $x=2$ тричленътъ получава минимална величина -1, понеже най-малката ордината е -1, при $x=2$.

5) При значения на x, които сж еднакво отдалечени отъ 2, получаватъ се двѣ равни ординати.

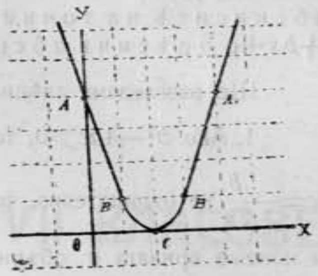
2. $y=x^2-4x+4$.

Ако $x=0, 1, 2, 3, 4, -1, \ldots$, то $y=4, 1, 0, 1, 4 \ldots$

Отъ кривата на тричлена (фиг. 8) заключаваме:

1) Тричленътъ има два равни корени, понеже кривата при $x=2$ се допира до абсцисната ось.

2) Тричленътъ е всѣкога положителенъ, понеже всичкитѣ ординати сж положителни.



фиг. 8.

3) Тричленътъ получава минимална стойность 0 пр $x=2$.

3. $y=x^2-2x+2$.

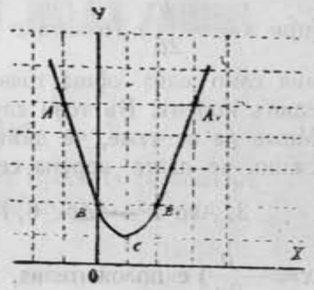
Ако $x=-1, 0, 1, 2, 3, \ldots$, то $y=5, 2, 1, 2, 5, \ldots$

Отъ кривата (фиг. 9) заключаваме:

1) Тричленътъ има имагинерни корени, защото кривата не прѣсича абсцисната ось.

2) Тричленътъ има минимумъ $=1$ при $x=1$.

3) Тричленътъ е всѣкога положителенъ.



фиг. 9.

Бѣлѣжка. Ако $a<0$, линията на тричлена има сжщата форма и сжщитѣ свойства, само че е обърната наопаки.

Примѣръ. $y=-x^2+x+2$.

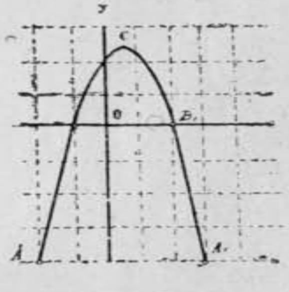
Ако $x=-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 2, 3, \ldots$, то $y=-4, 0, 2, 2^1/_4, 0, -3, \ldots$

Отъ чертежа (фиг. 10) се вижда:

1) Тричленътъ има корени 2 и -1.

2) Тричленътъ има максимумъ $= 2^1/_4$ при $x={}^1/_2$.

3) Тричленътъ е положителенъ само за ония значения на x, които лежатъ между коренитѣ.



фиг. 10.

§ 67. Графично изслѣдване рѣшенията на едно уравнение отъ втора степень. Да рѣшимъ уравнението $ax^2+bx+c=0$, ще рече да намѣримъ тия значения за x, при които функцията $y=ax^2+bx+c$ става равна на нула.

Ако прѣдставимъ функцията y графично, ще получимъ крива и точкитѣ на тая крива, които иматъ абсциси равни на коренитѣ x_1

и x_2 на уравнението $ax^2+bx+c=0$, иматъ ординати, равни на нула; сир., сж точки, които лежатъ на осьта XX_1. Отъ тукъ: да рѣшимъ уравнението ax^2+bx+c, ще рече да намѣримъ абсциситѣ на точкитѣ, въ които кривата $y=ax^2+bx+c$ прѣсича абсцисната ось.

Ще разгледаме слѣднитѣ случаи при $a>0$.

1. Ако $b^2-4ac>0$, то минималната величина $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$ (при $x=-\frac{b}{2a}$) е отрицателна, точката c на кривата е подъ осьта XX_1 и понеже кривата е обърната нагорѣ, то тя прѣсича осьта XX_1 въ двѣ точки и уравнението има два реални корена (черт. 7).

2. Ако $b^2-4ac=0$, то минималната величина $y=\frac{4ac-b^2}{4a}=0$ (при $x=-\frac{b}{2a}$). Точката c на кривата е на осьта XX_1; сир., кривата има само една обща точка съ осьта XX_1 и уравнението има само единъ коренъ. Въ този случай кривата се допира да осьта XX_1. Може да се каже, че двѣтѣ прѣсѣчни точки се сливатъ въ една, а сжщо, че двата корена се сливатъ, или че сж равни (черт. 8).

3. Ако $b^2-4ac<0$, то минималната величина $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$ (при $x=-\frac{b}{2a}$) е положителна, точката c на кривата е надъ осьта XX_1, цѣлата крива лежи надъ тая ось и не я прѣсича. Уравнението нѣма реални корени (черт. 9).

Бл. Димитровъ и Д-ръ Т. Дедовъ.

АЛГЕБРА

ЗА VI и VII КЛАСОВЕ

НА

Мжжкитѣ и дѣвическитѣ пълни и непълни гимназии.

ВТОРО ИЗДАНИЕ

одобрено отъ Министерството на Народната Просвѣта съ заповѣдь № 2584 отъ 20 Августъ 1910 год.

Цѣна 2 лева.

СОФИЯ

Печатница П. Глушковъ

1910.