и x_2 на уравнението $ax^2+bx+c=0$, иматъ ординати, равни на нула; сир., сж точки, които лежатъ на осьта XX_1. Отъ тукъ: да рѣшимъ уравнението ax^2+bx+c, ще рече да намѣримъ абсциситѣ на точкитѣ, въ които кривата $y=ax_2+$ $+bx+c$ прѣсича абсцисната ось.

Ще разгледаме слѣднитѣ случаи при $a>0$.

1. Ако $b^2-4ac>0$, то минималната величина $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$ (при $x=-\frac{b}{2a}$) е отрицателна, точката c на кривата е подъ осьта XX_1 и понеже кривата е обърната нагорѣ, то тя прѣсича осьта XX_1 въ двѣ точки и уравнението има два реални корена (черт. 7).

2. Ако $b^2-4ac=0$, то минималната величина $y=\frac{4ac-b^2}{4a}=0$ (при $x=-\frac{b}{2a}$). Точката c на кривата е на осьта XX_1; сир., кривата има само една обща точка съ осьта XX_1 и уравнението има само единъ коренъ. Въ този случай кривата се допира да осьта XX_1. Може да се каже, че двѣтѣ прѣсѣчни точки се сливатъ въ една, а сжщо, че двата корена се сливатъ, или че сж равни (черт. 8).

3. Ако $b^2-4ac<0$, то минималната величина $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$ (при $x=-\frac{b}{2a}$) е положителна, точката c на кривата е надъ осьта XX_1, цѣлата крива лежи надъ тая ось и не я прѣсича. Уравнението нѣма реални корени (черт. 9).

Бл. Димитровъ и Д-ръ Т. Дедовъ.

АЛГЕБРА

ЗА VI и VII КЛАСОВЕ

НА

Мжжкитѣ и дѣвическитѣ пълни и непълни гимназии.

ВТОРО ИЗДАНИЕ

одобрено отъ Министерството на Народната Просвѣта съ заповѣдь
№ 2584 отъ 20 Августъ 1910 год.

Цѣна 2 лева.

СОФИЯ
Печатница П. Глушковъ
1910.

Книга I.

Логаритмуване, прогресии и сложна лихва.

ГЛАВА I.

Логаритми.

Опрѣдѣления.

§ 1. Степенуването не се подчинява на комутативния законъ и затова на него съотвѣтствуватъ двѣ обратни дѣйствия. При едното дѣйствие сѫ дадени степеньта и показателя и се търси основата, а при другото—степеньта и основата, а се търси показателя. Първото дѣйствие се нарича коренуване, а второто — логоритмуване. Слѣдов., ***логаритмуването е дѣйствие, при което по дадена степень и дадена основа търси се показателя на степеньта.***

При логаритмуването показательтъ се нарича логаритъмъ, основата — основа на логаритма и степеньта — антилогаритъмъ. Така, ако $a^x=b$... (1), то x е логаритъмъ на антилогаритъма b при основа a.

И така, ***логаритъмъ е число, на което трѣбва да се степенува основата, за да се получи антилогаритмътъ.*** Така, въ равенствата

$$2^3=8,\ 4^2=16,\ 5^3=125,\ \ldots\ldots$$

3 е логаритъмъ на 8 при основа 2,
2 „ „ „ 16 „ „ 4,
3 „ „ „ 125 „ „ 5,
и т. н.

$a^x=b$
$log_a b=x$

За да покажатъ, че въ равенството $a^x=b$ показательтъ x е логаритъмъ на b при основа a, пишатъ

$$log_a b=x\ .\ .\ .\ (2).$$

Споредъ това:

$$log_2 8=3\ ;\ log_4 16=2\ ;\ log_5 125=3 \text{ и т. н.}$$

Отъ (1) и (2) слѣдва,

$$a^{log_a b}=b.$$

Думата логаритъмъ е съставена отъ гръцкитѣ думи λόγος (логосъ = изразъ) и ἀριθμός (аритмосъ = число).

$a^x = b$

$\log_a b = x$

Логаритми при разни основи.

§ 2. *а*). Основата е $\lessgtr 1$.

1. ***Логаритмътъ на основата е 1,*** защото

$$a^1 = a \text{ и } log a = 1.$$

2. ***Логаритмътъ на 1 е 0,*** защото

$$a^0 = 1 \text{ и } log 1 = 0.$$

$a^0 = 1$

$\log_a 1 = 0$

б). Основата е > 1.

3 ***Логаритмътъ на 0 е $-\infty$,*** защото

$$a^{-\infty} = \frac{1}{a\infty} = \frac{1}{\infty} = 0 \text{ и } lg \sim = -\infty.$$

4. ***Логаритмътъ на ∞ е $+ \sim$,*** защото

$$a^\infty = \infty \text{ и } lg \infty = \infty.$$

5. ***Логаритмитѣ на числа > 1 сѫ положителни, а на числа < 1 — отрицателни.*** Това слѣдва отъ равенството $a^x = b$, въ което при $b > 1$ показательтъ x е положително число, а при $b < 1$ — отрицателно.

6. ***По-голѣмитѣ числа иматъ и по-голѣми логаритми.*** Нека $p > q$; ще докажемъ, че $log\, p > log\, q$. Полагаме $log\, p = x$ и $log q = y$; тогава:

$$a^x = p; a^y = q; \ a^{x-y} = \frac{p}{q}.$$

Понеже $\frac{p}{q} > 1$, то $x - y > 0$, отдѣто $x > y$; сир. $log\, p > log\, q$.

7. ***Отрицателнитѣ числа нѣматъ логаритми***, защото при $a > 0$ винаги a^x е положително число.

Ако x е дробь, на която знаменательтъ е четно число, то отъ значенията на a^x зима се само аритметичното значение.

Основи системи и таблици.

§ 3. За основа на логаритмитѣ се взима винаги положително число и, обикновено, >1. За основа не се взиматъ 1 и 0, защото $1^n = 1$ и $0^n = 0$. Сѫщо не се взима за основа и отрицателно число, защото нѣкои отъ положителнитѣ реални числа нѣма да иматъ реални логаритми.

Въ употрѣбление сѫ двѣ основи: 10 и ирационалното число 2·718281828 . . ., което въ математиката се бѣлѣжи винаги съ буквата *е*. Логаритмитѣ, на които основата е 10, се наричатъ обикновени (десетични) или Бригови логаритми, а онѣзи, на които основата е *е*, се наричатъ натурални (хиперболически) или Неперови логаритми. Първитѣ се означаватъ съ *log*, а вторитѣ съ *lognat* или просто съ *l*.

Логаритмитѣ на всички числа, изчислени при нѣкоя си основа, съставятъ една логаритмична система.

Системитѣ могатъ да бѫдатъ много; въ употрѣбление сѫ само бриговата и неперовата системи.

Таблици, въ които сѫ помѣстени всичкитѣ цѣли числа отъ 1 до нѣкое си число, напр. 10000, и съотвѣтнитѣ имъ логаритми, се наричатъ логаритмични таблици.

Логаритмитѣ сѫ въведени въ математиката отъ английския ученъ John Napier (1550—1617); въ съчинението му Mirifici logarithmorum canonis descriptio (1550 г.) сѫ изложени логаритмитѣ на синусъ и на тангенсъ. Henri Briggs (1556—1631) е английски математикъ; напечаталъ е логаритмитѣ си (1624 г.) подъ заглавие arithmetica logaritmica. Независимо отъ английскитѣ математици, Byrg е съставилъ една изкуствена логаритмична система (arithm. и geométr. progréss-tabuln. Prag. 1620), като е изчислилъ степенитѣ на основата 1·0001.

Първитѣ таблици сѫ съставени отъ Неперъ и поради неудобството имъ, защото основата имъ е ирационално число, Бригсъ е съставилъ други таблици съ основа 10. Въ употрѣбление сѫ главно Бриговитѣ логаритми; тѣ удовлетворяватъ всичкитѣ нужди на практиката. Неперовитѣ логаритми се употрѣбяватъ въ висшата математика.

Свойства на логаритмитѣ.

§ 4. Употрѣбяването на логаритмичнитѣ таблици се основава на слѣднитѣ теореми.

1. ***Логаритмътъ на дадено произведение е равенъ на сумата отъ логаритмитѣ на множителитѣ му.***

Доказ. Нека $bcdf \ldots.$ е дадено произведение. Ако $log\, b = x$, $log\, c = y$, $log\, d = z$, ..., то

$$a^x = b, \ a^y = c, \ a^z = d, \ldots\ldots..$$

и $a^{x+y+z+} \ldots = bcd \ldots..$, отдѣто

$$log\, bcd \ldots = x + y + z + \ldots = log\, b + log\, c + log\, d + \ldots..$$

2. ***Логаритмътъ на дадена степень е произведение отъ показателя на степеньта и логаритма на основата ѝ.***

Доказ. $logb^m = m\, log\, b$, защото

$$logb^m = log\, b \,.\, b \,.\, b \,.\, b \ldots_m \text{пѫти} = log\, b + log\, b + log\, b + \ldots_m \text{пѫти} = m\, log\, b.$$

3. ***Логаритмътъ на дадено частно е равенъ на разликата отъ логаритмитѣ на дѣлимото и дѣлителя.***

Доказ. $log \frac{b}{c} = log\, b - log\, c$, защото, ако $\frac{b}{c} = z$,

то $$b = cz \text{ и } log\, b = log\, c + log\, z, \text{ отдѣто}$$
$$log\, z = log\, b - log\, c.$$

Понеже дробьта може да се гледа като означено частно, то логаритмътъ на дадена дробь е равенъ на разликата отъ логаритмитѣ на числителя и знаменателя.

4. ***Логаритмътъ на даденъ коренъ е равенъ на частното отъ логаритма на подкоренатa величина и показателя на корена.***

Доказ. $log\sqrt[n]{b}=\frac{logb}{n}$ защото, ако $\sqrt[n]{b}=z$, то

$$b=z^n \text{ и } logb=logz^n=nlogz, \text{ отдѣто}$$

$$lgz=\frac{logb}{n} \text{ или } log\sqrt[n]{b}=\frac{logb}{n}.$$

Доказанитѣ теореми спомагатъ за упростяване на изчисленията, понеже умножението се замѣнява съ събиране, дѣлението — съ изваждане, степенуването — съ умножение и коренуването — съ дѣление.

Логаритмуване на едночленни изрази.

А.

Логаритмуване.

§ 5. Изразитѣ се логаритмуватъ споредъ изложенитѣ погорѣ теореми.

Примѣри.

1. $x=abc.$

$$logx=loga+logb+logc.$$

2. $x=\frac{ab}{c}.$

$$logx=logab-logc=loga+logb-logc.$$

3. $x=\frac{abc}{def}.$

$$logx=logabc-logdef=loga+logb+logc-(logd+loge+logf)$$
$$=loga+logb+logc-logd-loge-logf.$$

4. $x=a^m b^n c^p.$

$$logx=loga^m+logb^n+logc^p=mloga+nlogb+plogc.$$

5. $x=\frac{a^m b^n}{c^p d^q}.$

$$logx=loga^m b^n-logc^p d^q=loga^m+logb^n-logc^p-logd^q$$
$$=mloga+nlogb-plogc-qlogd.$$

6. $x=a\sqrt[n]{\frac{b^m}{c^p\ d^s}}.$

$$logx=loga+log\sqrt[n]{\frac{b^m}{c^p\ d^s}}=loga+\frac{log\frac{b^m}{c^p\ d^s}}{n}=$$
$$loga+\frac{logb^m-logc^p\ d^s}{n}=loga+\frac{mlogb-plogc-slogd}{n}.$$

7. $x=a^2-b^2.$

$$logx=log(a^2-b^2)=log(a+b)(a-b)=log(a+b)+log(a-b).$$

В.

Антилогаритмуване.

§ 6. Дѣйствието, съ което се намира антилогаритма на даденъ логаритмъ, се нарича антилогаритмуване.

Въвежътъ на дѣйствията при антилогаритмуването е обратенъ на употрѣбявания при логаритмуването.

Примѣри.

1. $logx=loga+logb-logc;\ x=?$

$$logx=logab-logc=log\frac{ab}{c}, \text{ отдѣто } x=\frac{ab}{c}.$$

2. $logx=5loga+6logb-2logc-3logd;\ x=?$

$$logx=loga^5+logb^6-logc^2-logd^3$$
$$=loga^5b^6-iogc^2-logd^3$$
$$=log\frac{a^5b^6}{c^2}-logd^3$$
$$=log\frac{a^5b^6}{c^2d^3}, \text{ отдѣто } x=\frac{a^5b^6}{c^2d^3}.$$

3. $logx=3loga-\frac{2}{5}logb-\frac{1}{4}logc-3logd+\frac{3}{4}logf;\ x=?$

$$logx=loga^3-log\sqrt[5]{b^2}-log\sqrt[4]{c}-logd^3+log\sqrt[4]{f^3}$$
$$=log\frac{a^3}{\sqrt[5]{b^2}}-log\sqrt[4]{c}-logd^3+log\sqrt[4]{f^3}$$
$$=log\frac{a^3}{\sqrt[5]{b^2}\sqrt[4]{c}}-logd^3+log\sqrt[4]{f}$$
$$=log\frac{a^3}{\sqrt[5]{b^2}\sqrt[4]{c}d^3}+log\sqrt[4]{f^3}$$
$$=log\frac{a^3\ \sqrt{f^3}}{\sqrt[5]{b^2}\ \sqrt[4]{c}\ d^3}, \text{ отдѣто } x=\frac{a^3\ \sqrt{f^3}}{\sqrt[5]{b^2}\ \sqrt[4]{c}\ d^3}.$$

ГЛАВА II.

Десетични логаритми.

§ 7. Понеже основата на десетичнитѣ логаритми е 10, то (§ 2)

1. $\log 10=1.$
2. $\log 1 =0.$
3. $\log 0 =-\infty.$
4. $\log\infty=\infty.$
5. $\log 10^n=+n.$
6. $\log\frac{1}{10^n}=-n.$

7. ***Логаритмитѣ на цѣлитѣ числа отъ вида*** 10^n ***и на дробнитѣ отъ вида*** $\frac{1}{10^n}$ ***сѫ рационални числа.*** Така, ако

$$b=10 \text{ и } c=\frac{1}{10^n}, \text{ то}$$

$$\log b=n\log 10=n \text{ и}$$

$$\log c=\log 1-\log 10^n=-n.$$

Слѣдствие I. ***Логаритмитѣ на числа, написани съ 1 и нули отдѣсно, съдържатъ толкова единици, колкото сѫ нулитѣ.*** Така,

$$\log 100=2,\ \log 1000=3,\ \log 10000=4 \text{ и т. н.}$$

Слѣдствие II. ***Логаритмитѣ на дроби, които иматъ за числитель 1 и за знаменатель 1 съ нули отдѣсно, съдържатъ толкова отрицателни единици, колкото сѫ нулитѣ въ знаменателя.*** Така

$$\log 0{\cdot}001=\log\frac{1}{1000}=-3;\ \log 0{\cdot}00001=\log\frac{1}{100000}=-5 \text{ и т. н.}$$

8. ***Логаритмитѣ на цѣлптѣ чпсла, които не сѫ отъ вида*** 10^n ***и на дроби, които не сѫ отъ вида*** $\frac{1}{10^n}$, ***сѫ ирационални числа.*** Така, ако b е едно такъво цѣло число, логаритмътъ на което е x, то отъ равенството $10^x=b$ заключаваме, че x не може да бѫде цѣло число, защото b не е степень отъ 10 и не може да бѫде и дробно число, напр. $\frac{p}{q}$, защото ирационалното число $\sqrt[q]{10^p}$ не може да бѫде равно на рационалното число b. По сѫщия начинъ се доказва и ирационалностьта на логаритмитѣ на дробнитѣ числа, които не сѫ отъ вида $\frac{1}{10^n}$. Ирационалнитѣ логаритми изобразяватъ като десетична дробь съ нѣколко десетични мѣста, най-обикновено съ 5. Цѣлата часть на дробьта се нарича характеристика, а дробната мантиса.

9. ***Логаритмитѣ на двѣ числа, отъ които едното се получава отъ другото чрѣзъ умножение или дѣление съ 10 или съ степень на 10 иматъ една и сѫща мантиса; различаватъ се само по характеристикитѣ си.*** Така,

$$\log a.10^n=\log a+n\log 10=\log a+n$$

$$\log\frac{a}{10^n}\log a-n\log 10=\log a-n.$$

Характеристика.

а) Положителна характеристика.

§ 8. Числа >1 иматъ положителни лотаритми (§ 2, 4); характеристиката имъ се опрѣдѣля така:

1. ***Характеристиката на логаритма на цѣло число е съ 1 по малка отъ броя на цифритѣ на това число.***

Доказ. Едноцифренитѣ числа се съдържатъ между 1 и 10 и затова лотаритмитѣ имъ се съдържатъ между $\log 1$ и $\log 10$, сир. между 0 и 1; слѣдователно характеристиката на лотаритмитѣ имъ е $=0$. Двуцифренитѣ числа лежатъ между 10 и 100 и затова лотаритмитѣ имъ лежатъ между $\log 10$ и $\log 100$, сир. между 1 и 2; слѣдов., характеристиката на лотаритмитѣ имъ е$=1$. Изобщо n—цифреннтѣ числа лежатъ между 10^{n-1} и 10^n и за това логаритмитѣ имъ лежатъ между $\log 10^{n-1}$ и $\log 10^n$, сир. между $n-1$ и n; слѣдов., характеристиката на лотаритмитѣ имъ е$=n-1$.

1. ***Характеристиката на лотаритма на неправилна десетична дробь е съ 1 по малка отъ броя на цифритѣ, които сѫ налѣво отъ десетичната точка.***

Доказ. Характеристиката на $\log 25{\cdot}34$ е 1, защото $10<25{\cdot}34<100$; $\log 10<\log 25{\cdot}34<\log 100$; $1<\log 25{\cdot}34<2$.

Характеристиката на $\log 3547{\cdot}238$ е 3, защото

$$1000<3547{\cdot}238<10000;$$

$$\log 1000<\log 3547{\cdot}238<\log 10000$$

$$3<\log 3547{\cdot}238<4$$

и т. н.

б) Отрицателна характеристика.

§ 9. Числа <1 иматъ отрицателни лотаритми (§2,5); тѣзи лотаритми, за удобство при изчисленията, ги прѣдставятъ като алгебрична сума, първиятъ членъ на която е цѣло отрицателно число, а вториятъ — положително число <1. Така, намѣсто $-3{\cdot}45$ пишатъ:

$-3{\cdot}45+1-1=-4+(1-0{\cdot}45)=-4+0{\cdot}55$ и, за краткость, $\overline{4}{\cdot}55$. Числото $\overline{4}$ се нарича отрицателна характеристика; десетичната часть 0·55 е мантисата.

Отрицателна характеристика се опрѣдѣля така:

Характеристиката на лотаритма на правилна десетична дробь съдържа толкова отрицателни едници, колкото сж нулитѣ, що стоятъ прѣдъ първата значеща цифра, включително и кулата въ цѣлитѣ.

Така, характеристиката на log 0·02 е $\overline{2}$, защото

$$log\ 0{\cdot}02=log\frac{2}{100}=log\ 2-log100=0{\cdot}30103-2=-1{\cdot}69897=$$
$$=\overline{2}{\cdot}30103.$$

Характеристиката на log 0·0003 е $\overline{4}$, защото

$$log0{\cdot}0003=log\frac{3}{10000}=log3-log10000=log3-4=0{\cdot}47712-4=$$
$$=-3{\cdot}52288=\overline{4}{\cdot}47712 \text{ и т. н.}$$

На логаритмитѣ $\overline{2}{\cdot}30103$, $\overline{4}{\cdot}46712$ характеристиката е отрицателна. а мантисата положителна; какъ се работи съ такива лотаритми, ще видимъ по-нататъкъ

Характеристиката се опрѣдѣля лесно и затова не се пише въ таблицитѣ.

Мантиса.

§ 10. Опрѣдѣлянето на мантисата става по елементаренъ начинъ и съ висшата математика. Елементарнитѣ методи сж разтегнати и сложни. По-сгодни методи дава висшата математика.

Ще изчислимъ по елементаренъ начинъ $\log_{10}2$. Ако този логаритъмъ е равенъ на x, сир. $10^x=2$(I), то $0<x<1$, защото $10^0<2<10^1$. Нека $x=\frac{1}{x_1}$ Замѣстваме въ (II):

$10^{\frac{1}{x_1}}=2$, или $10=2^{x_1}$ (II), дѣто $3<x_1<4$, защото $2^3<10<2^4$. Нека $x_1=3+\frac{1}{x_2}$. Замѣстваме въ (II):

$$2^{3+\frac{1}{x_2}}=10;\ 2^3.\,2^{\frac{1}{x_2}}=10;\ 2^{\frac{1}{x_2}}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4};$$

най-послѣ
$$2=\left(\frac{5}{4}\right)^{x_2} \text{(III), дѣто}$$

$$3<x_2<4, \text{ защото } \left[\frac{5}{4}\right]^3<2<\left[\frac{5}{4}\right]^4. \text{ Нека } x_2=3+\frac{1}{x_3}.$$

Замѣстваме въ (III):

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{3+\frac{1}{x_3}}=2, \text{ или } \frac{5}{4}=\left[\frac{128}{125}\right]^{x_3}, \text{ дѣто}$$

$3<x_3<4$ и т. н.

Ако приемемъ, че $x_3=9$, то

$$x_2=3+\frac{1}{9}=\frac{28}{9},$$
$$x_1=3+\frac{9}{28}=\frac{93}{28} \text{ и}$$
$$x=log2=\frac{1}{\frac{93}{28}}=\frac{28}{93}=0{\cdot}30107\ \ .\ .\ .\ .$$

И така, $x=log2=0{\cdot}30107$.

По-точното изчисление ще ни даде

$$x=iog2=0{\cdot}30103.$$

Като знаемъ логаритмитѣ на проститѣ числа, лесно намираме, чрѣзъ събиране и умножение, логаритмитѣ на съставнитѣ числа. Така, като знаемъ log2, log3 и log7, намираме:

$$\begin{aligned}
&\log 6=\log\ (2.3)=\log2+\log3.\\
&\log\ 8=\log\ 2^3=3\log2.\\
&\log42=\log\ (2.3.7)=\log 2+\log 3+\log\ 7.\\
&\log72=\log\ (2^3.3^2)=3\log\ 2+2\log\ 3 \text{ и т. н.}
\end{aligned}$$

Ето защо, при съставянето на логаритмични таблици, достатъчно е да се изчислятъ само логаритмитѣ на проститѣ числа.

Логаритми на числа.

§ 11. Таблицитѣ, съ които ще работимъ, сж на Д-ръ Студничка. Ще прѣпишемъ часть отъ една страница отъ тѣзи таблици, за да се види, като какъ се работи съ тѣхъ при търсенето логаритмитѣ на числата.

4300—4599.

N		0	1	2		8	9	D
430	63	347	357	367		428	438	10
431		443	458	468		528	538	
432		548	558	568		629	639	
. .	.	. .	. .	. .	. . . .	. .	. .	.
436		949	959	969		×028	×038	
437	64	048	058	068		128	137	
438		147	157	167		227	237	
. .	.	. .	. .	. .	. . . .	. .	. .	.
457		992	×001	×011		068	077	
458	66	087	096	106		162	172	
459		181	191	205		257	266	9
N		0	1	2		8	9	D

А.

1) Логаритми ни четирицифрени числа.

Първитѣ три цифри на даденото число сѫ въ колоната N, а четвъртата въ реда N. Първитѣ двѣ цифри отъ мантисата на логаритма сѫ между колонитѣ N и 0, а послѣднитѣ три цифри — въ прѣсѣчника на реда, който минава прѣзъ първитѣ цифри на числото и колоната на четвъртата му цифра. За първи двѣ цифри на мантисата се взиматъ тѣзи, що сѫ въ реда на първитѣ три цифри на числото или пъкъ сѫ въ редоветѣ надъ него. Въ случай, че налѣво отъ послѣднитѣ три цифри на мантисата има звѣздица, то за първи двѣ цифри на мантисата се зиматъ тѣзи, що сѫ подъ реда на първитѣ три цифри на числото. Въ таблицитѣ сѫ дадени само мантиситѣ на логаритмитѣ, но не и характеристикитѣ имъ. Послѣднитѣ се намиратъ споредъ даденитѣ по-горѣ правила (§§ 8 и 9).

Примѣри.

1. $log4300=3{\cdot}63347$.

Казахме: характеристика 3; 430 подъ нулата: 6, 3; 3, 4, 7.

2. $log4318=3{\cdot}63528$.

Язваме: характеристика 3; 431 подъ 8: 6, 3; 5, 2, 8.

3. $log4369=3{\cdot}64038$.

Казваме: характеристика 3; 436 подъ 9: 6, 4; 0,3,8.

4. $log4572=3{\cdot}66011$.

Казваме: характеристика 3;457 подъ 2: 6, 6; 0, 1, 1.

2) Логаритми на числа съ по-малко отъ 4 цифри.

Тия логаритми намираме съ таблицитѣ на логаритмитѣ на четирицифренитѣ числа (§ 11).

Примѣри.

1. $log430=2{\cdot}63347$.

Казваме: характеристика 2; 430 подъ нула: 6, 3; 3, 4, 7.

Какво е мантисата на *log* 430, такава е на *log* 4300, защото $430=\frac{4300}{10}$.

2. $log438=2{\cdot}64147$.

Казваме: характеристика 2; 438 подъ нула: 6, 4; 1, 4, 7.

3. $log459=2{\cdot}66181$.

4. $log43=1{\cdot}63347$.

Кнзваме: характеристика 1; 440 подъ 0: 6, 3: 3, 4, 7.

Каквото е мантисата на *log*43, такава е и на *log*430. на *log* 300 и т. н защото $43=\frac{430}{10}=\frac{4300}{100}$.

5. $log46=1{\cdot}66276$.

Казваме: характеристика 1;460 подъ нула: 6, 6; 2, 7, 6.

6. $log5=0{\cdot}69897$.

Казваме: характеристика 0; 500 подъ нула: 6, 9; 8, 9, 7.
Каквато е мантисата на log 5, такава е и на log 50, log 500 log 5000

7. $log7=0{\cdot}84510$.

Намираме мантисата на log7000.

Забѣл. Логаритмитѣ на едноцифренитѣ и двуцифренитѣ числа заедно съ характеристикитѣ имъ сѫ дадени въ таблицитѣ на Д-ръ Студничка на стр. 1.

3) Логаритми на цѣли числа, на които първата, първитѣ двѣ, първитѣ три, или първитѣ 4 цифри сѫ значещи, а останалитѣ сѫ нули.

Тия логаритми се намиратъ съ таблицитѣ на 4-цифренитѣ числа.

Примѣри.

1. $log\ 50{,}000=4\ 69897$.

Казваме; характеристика 4; 500 подъ нула: 6, 9; 897.
Каквато е мантисата на log 5000, такава е и на log 50,000.

2. $log\ 34{,}000=4{\cdot}53148$.

3. $log\ 43400=4{\cdot}63749$.

4. $log\ 50690=4\ 70492$.

4) Логаритми на десетични дроби, които слѣдъ махването на десетичната точка, ни даватъ едноцифрени, двуцифрени, трицифрени или четирицифрени числа.

Тия логаритми се намиратъ пакъ съ сѫщитѣ таблици.

Примѣри.

1. $log\ 21{\cdot}2=1{\cdot}32634$.

Казваме: характеристика 1; 212 подъ нула: 3, 2; 6, 3, 4.
Каквато е мантисата на log 21·2, такава е и на log 212, защото $21{\cdot}2\times10=212$.

2. $log\ 2{\cdot}314=0{\cdot}36426$.

3. $log\ 0{\cdot}02756=\bar{2}{\cdot}44028$.

Б.

1) Логаритми на петоцифрени числа.

Написваме характеристиката и прѣписваме отъ таблицитѣ мантисата на логаритма на числото на първитѣ 4 цифри. Умножаваме 5-та цифра съ диференцията (тя е число отъ колоната D и е разлика на двѣ слѣдващи една слѣдъ друга мантиси) и произведението дѣлимъ съ 10; полученото число притуряме къмъ съотвѣтнитѣ послѣдни цифри отъ взетата таблична мантиса; намираме мантисата на логаритма на петоцифреното число.

Примѣри.

1. $log53457 = 4\cdot7279\overset{+6}{5} = 4\cdot72801.$

$$\frac{7\times8}{10}=\frac{56}{10}=5\cdot6=6.$$

Казваме: характеристика 4; 534 подъ 5: 7, 2; 7, 9, . Умножаваме петата цифра съ диференцията (тя е 8) и дѣлимъ произведението съ 10. Получаваме 5·6; зимаме го за 6 и го притуряме при послѣдната цифра отъ мантисата.

2. $log53\cdot457 = 1\cdot72801.$

3. $log0\cdot0053457 = \overline{3}\cdot72801.$

В.

Логаритми на 6 цифрени, 7-цифрени и многоцифрени числа.

Написваме характеристиката и прѣписваме отъ таблицитѣ мантисата на логаритма на числото на първитѣ четири цифри; умножаваме числото на 5^{ma} и 6^{ma} цифри съ деференцията и дѣлимъ на 100 и частното притуряме къмъ съотвѣтнитѣ послѣдни цифри отъ взетата таблична мантиса. Ако цифритѣ сѫ повече отъ 6, то числото на 5^a, 6^a и 7^a цифри се умножава съ дифиренцията и се дѣли съ 1000. Изобщо, при умножението съ дифиренцията, полученото произведение се дѣли съ 1 съ толкова нули отдѣсно, колкото сѫ цифритѣ въ числото, образувано отъ цифритѣ, слѣдващи подиръ 4_a цифра.

Примѣри.

1. $log556358 = 5\cdot7453\overset{+5}{1} = 5\cdot74536.$

$$\frac{58\times8}{100}=\frac{464}{100}=4\cdot64=5.$$

2. $log0\cdot005623011=\overline{3}\cdot74997.$

$$\frac{11\times8}{1000}=\frac{88}{1000}=0\cdot088.$$

Понеже 0·088 е по близу до 0 отъ колкото до 1, то прибавка нѣма.

§ 12. Изложениятъ начинъ за намирането на логаритмитѣ на петоцифрени, шестоцифрени и, изобщо, на многоцифрени числа се основава на свойството: разликата на числа, лежащи въ малъкъ интервалъ, е пропорционална на разликата между тѣхнитѣ логаритми.

Нека, напр. се търси $log25672$.

Числото 25672 лежи между числата 25670 и 25680 и затова логаритмътъ му лежи между логаритмитѣ на тѣзи числа, т. е.

$$\begin{array}{ll} & 25670<25672<25680, \\ \text{затова} & log25670<log25672<log25680, \\ \text{или} & 4\cdot40943<log25672<4\cdot40960. \end{array}$$

За да узнаемъ съ колко $log25672$ е по-голѣмъ отъ 4·40943, разсѫждаваме така. Разликата на 25680 и 25670 е $=10$; разликата на логаритмитѣ имъ е$=0\cdot00017$. Разликата на 25672 и 25670 е$=2$; разликата на логаритмитѣ имъ е$=x$. При разлика 10 на числата, разликата на логаритмитѣ е 0·00017; при разлика 2 между числата, каква ще бѫде разликата нд логаритмитѣ имъ?

$$\begin{array}{ccc} 10 & — & 0\cdot00017 \\ 2 & — & x \end{array}$$

$$x=\frac{0\cdot00017\times2}{10}=0\cdot000034.$$

Слѣдователно,

$$log25672=log25670+x=4\cdot10943+0\cdot000034=$$
$$=4\cdot409464=4\cdot40946.$$

$x=0\cdot000034$ се нарича коректура. Понеже работимъ съ логаритми съ 5 десетични мѣста, то шестата цифра отъ коректурата се изхвърля; но ако тя е 5 и повече отъ 5, петата цифра на коректурата се увеличава съ 1; при шеста цифра <5, петата цифра на коректурата се пише безъ измѣнение.

Разликата 0·000017, която е разлика на два слѣдващи единъ слѣдъ другъ логаритми, се нарича диференция и се пише въ колоната D. По нѣмане мѣсто, отъ нея се пишатъ въ таблицитѣ само послѣднитѣ цифри, но затова пъкъ коректурата се притуря къмъ послѣднитѣ цифри отъ взетата таблична мантиса.

На кратко:

$$log26672=4\cdot4094\overset{+3}{3}=4\cdot40946.$$

$$x=\frac{2\cdot17}{10}=3\cdot4.$$

По сѫщия начинъ се обяснява и намирането логаритмитѣ на шестоцифрени и многоцифрени числа.

Забѣл. Ако числото, на което се търси логаритмътъ, съдържа 7 или повече цифри, то послѣднитѣ цифри, като започнемъ отъ седмата, не влияятъ на петозначната мантиса. Така, понеже

$$log36784723=7{\cdot}5656\overset{+6}{1}=7{\cdot}56567,$$

$$log36784700=7{\cdot}5656\overset{+6}{1}=7{\cdot}5657,$$

то $$log36784723=log36784700.$$

По тази причина, при търсенето логаритмитѣ на числа съ повече отъ 6 цифри, цифритѣ отъ шестата нататъкъ трѣбва да се смѣтатъ за нули.

Антилогаритми.

а) Мантисата на дадения логаритъмъ се намира въ таблицитѣ.

§ 13. Прѣписваме отъ таблицитѣ съотвѣтното 4-цифрено число и слѣдъ това съ помощьта на характеристиката опрѣдѣляме цифритѣ за цѣлата часть.

Примѣри.

1. $logx=2{\cdot}30103$

$$x=200{\cdot}0=200.$$

Първитѣ двѣ цифри отъ мантисата ни упжтватъ за да намѣримъ послѣднитѣ ѝ три цифри, а тѣ пъкъ опрѣдѣлятъ търсеното число; първитѣ три цифри на числото лежатъ на реда на послѣднитѣ три цифри отъ мантисата, а четвъртата — въ колоната на сжщитѣ три цифри. При опрѣдѣлянето цифритѣ въ цѣлата часть смѣтаме отлѣво на дѣсно.

2. $logx=1{\cdot}85733.$

$$x=72{\cdot}00=72.$$

3. $logx=\bar{2}{\cdot}30103.$

$$x=0{\cdot}02000=0{\cdot}02.$$

б) Мантисата на дадения логаритъмъ не се намира въ таблицитѣ.

§ 14. Въ този случай имаме работа съ петоцифрено, шестоцифрено и, въобще, многоцифрено число. Колко сж цифритѣ на това число, посочва характеристиката. Самото число се намира така.

Прѣписваме отъ таблицитѣ четирецифреното число, което съотвѣтствува на най-близката по-малка мантиса и разликата между дадената мантиса и взетата таблична умножаваме съ 10 (ако се търси само 5-а цифра), съ 100 (ако се търси 5-а и 6-а), съ хиляда (ако се търси 5-а, 6-а и 7-а) и т. н. и произведението дѣлимъ съ диференцията; полученото частно (което се състои отъ една, двѣ или три цифри) се прѣписва на дѣсно отъ четвъртата цифра на прѣписаното отъ таблицитѣ по-рано четирицифрено число. Така работимъ, защото, както видѣхме, коректуритѣ:

$$\varDelta_1=\frac{D\times 5\text{-а цифра}}{10} \text{ и } \varDelta_2=\frac{D\times N5\text{-а 6-а цифри}}{100},$$

отдѣто

$$5\text{-а цифра}=\frac{\varDelta_1\times 10}{D} \text{ и } N5\text{-а 6-а цифри}=\frac{\varDelta_2\times 100}{D}$$

и т. н.

Примѣри.

1. $log\,x=4{\cdot}63412.$

Въ таблицата намираме, че 412 лежи между 407 и 417; прѣписваме числото срѣщу 407 (4·63407 е най-близкия по-малъкъ табличенъ логаритмъ на 4·63412); то е 4306. Разликата 412—407 умножаваме съ 10 и дѣлимъ съ D. Получаваме 5. Прѣписваме отдѣсно на 6 цифрата 6 и намираме 43065. Характеристиката е 4 и затова съотвѣтното на $logx$ число има въ цѣлата си часть 5 цифри. Слѣдов., $x=43065.$

2. $logx=5{\cdot}70040$

$$\underline{\quad 036} \quad — \quad 5016.$$

$$\begin{array}{r|l} 400 & \underline{9} \\ 40 & 44 \end{array}$$

$$x=501644.$$

3. $logx=1{\cdot}37060$

$$\underline{051} \quad — \quad 23{\cdot}47.$$

$$\begin{array}{r|l} 90 & \underline{18} \\ & 5 \end{array}$$

$$x=23{\cdot}475.$$

Бѣл. Тукъ търсимъ само пета цифра.

4. $logx=0{\cdot}75900$

$$\underline{\quad 899} \quad — \quad 5{\cdot}741.$$

$$\begin{array}{r|l} 10 & \underline{7} \\ & 1 \end{array}$$

$$x=5{\cdot}7411.$$

5. $logx=\bar{2}{\cdot}35794$; $x=0{\cdot}0\ldots$

$$\underline{\quad 793} \quad — \quad 2{\cdot}280.$$

$$\begin{array}{r|l} 10 & \underline{19} \\ & 1 \end{array}$$

$$x=0{\cdot}022801.$$

Дѣйствия съ логаритми.

§ 15. Дѣйствията съ логаритми съ положителна характеристика сѫ дѣйствия съ обикновени десетични дроби или числа и затова извършването имъ става по познатия вече начинъ. Но, ако характеристиката е отрицателна, то дѣйствията съ подобни логаритми се извършватъ по особенъ начинъ. Какъ става това, може да се види отъ слѣдното.

Събиране.

Понеже мантиситѣ сѫ винаги положителни, то цѣлитѣ единици, получавани при събирането имъ, сѫ сѫщо положителни. Това трѣбва да се има прѣдъ видъ при събирането на характеристикитѣ, които могатъ да бѫдатъ положителни и отрицателни.

Примѣри.

$$1.\ \begin{array}{r} 2\cdot30103 \\ 5\cdot47712 \\ \hline 7\cdot77815 \end{array} \qquad 2.\ \begin{array}{r} \overline{2}\cdot59615 \\ 1\cdot97621 \\ \hline 0\cdot57236. \end{array}$$

Изваждане.

Ако характеристикитѣ сѫ положителни и умалительтъ е по-малъкъ отъ умаляемото, то изваждането става по обикновенъ начинъ. Но, ако характеристикитѣ сѫ едната положителна и другата отрицателна, или пъкъ и двѣтѣ сѫ отрицателни и ако умалительтъ е $>$ отъ умаляемото, то намѣсто да изваждаме, винаги събираме. Замѣната на изваждането съ събиране става съ помощьта на кологаритма.

Кологаритъмъ.

Логаритмитѣ сѫ съставени отъ цѣла часть, която може да бѫде положителна, отрицателна или нула и отъ дробна часть, която е винаги $\begin{smallmatrix}>0\\<1\end{smallmatrix}$. Ако c е характеристиката, m мантисата на умалителя и N умаляемото, то

$$N-(c+m)=N-(c+1-1+m)=N-[(c+1)-(1-m)]$$
$$=N-(c+1)+(1-m)=N+[-(c+1)]+(1-m).$$

Напр. $N-1\cdot21312=N-1-0\cdot21312=N+(1-1)-1-0\cdot21312=$
$=N+(1-0\cdot21312)-2=N+0\cdot78688-2=N+\overline{2}\cdot78688.$

Отъ тукъ заключаваме, че замѣната на изваждането съ събиране става така:

Измѣняваме знака прѣдъ умалителя отъ — на $+$; притуряме къмъ характеристиката му $+1$ и измѣняваме знака на сбора; изваждаме цифритѣ на мантисата отъ 9, съ изключение на послѣдната значеща цифра, която вадимъ отъ 10. Нулитѣ слѣдъ послѣдната значеща цифра, ако ги има, се прѣписватъ на мантисата.

Примѣри.

1. $N-1\cdot21312=N+\overline{2}\cdot78688.$

Казваме: Измѣняваме знака прѣдъ умалителя на $+$, слѣдъ това: $1+1=2$; измѣняваме знака: става $\overline{2}$; 7 до $9=2$; 8 до $9=1$; 6 до $9=3$; 8 до $9=1$; 8 до $10=2$.

2. $N-\overline{2}\cdot51970=N+1\cdot48030.$
3. $N-0\cdot31200=N+\overline{1}\cdot68800$

Събираемото, което замѣнява умалителя, се нарича кологаритъмъ на умалителя. Така,

на $-1\cdot21312$ кологаритмътъ е $\overline{2}\cdot78688$;
„ $-\overline{2}\cdot51970$ „ „ $1\cdot48030$;
„ $-0\cdot31200$ „ „ $1\cdot68800$;

Сборътъ отъ мантисата на логаритма, взета съ знака $+$ и мантисата на кологаритма е $=1$. Така,

$$0\cdot21312+0\cdot78688=1;$$
$$0\cdot51970+0\cdot48030=1;$$
$$0\cdot31200+0\cdot68800=1.$$

Бѣл. Видѣхме, че

$$\log\frac{a}{b}=\log a-\log b=\log a+\mathrm{colog}\,b\ (1).$$

Отъ друга страна:

$$\log\frac{a}{b}=\log a\frac{1}{b}=\log a+\log\frac{1}{b}\ (2)$$

Слѣдов., $\mathrm{colog}\,b=\log\frac{1}{b}$. Отъ тукъ:

Кологаритмътъ на едно число е логаритъмъ на обратното му число,

Изобщо, всѣки логаритъмъ има свой кологаритъмъ и начинътъ за намирането на кологаритмитѣ е единъ и сѫщъ. Напр.

$$2\cdot31400=-\overline{3}\cdot68600$$
$$-\overline{3}\cdot68600=+2\cdot31400$$

Умножение съ цѣло число.

1. Множительтъ е положително число.

Умножаваме мантисата и послѣ характеристиката; цѣлитѣ, получени отъ първото произведение, сѫ винаги положителни, защото мантисата е положителна; тѣзи цѣли се притурятъ къмъ произведението на характеристиката съ множителя.

Примѣри.

$$\begin{array}{r} \overline{2}\cdot30107 \\ 5 \\ \hline \overline{9}\cdot50535 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overline{5}\cdot79610 \\ 9 \\ \hline \overline{38}\cdot16490 \end{array}$$

2. Множительтъ е отрицателно число.

Опрѣдѣляме знака на произведението и привеждаме тоя случай къмъ прѣдидущия.

Примѣръ.

$$\overline{2}{\cdot}51705.(-5)=-\overline{2}{\cdot}51705.5=-\overline{8}{\cdot}58525=7{\cdot}41475.$$

Дѣление съ цѣло положително число.

1. Дѣлительтъ се съдържа въ отрицателната характеристика.

Примѣръ. $\overline{8}{\cdot}72310:4=\overline{2}{\cdot}18079.$

2. Дѣлительтъ не се съдържа въ отрицателната характеристика.

Притуряме при характеристиката толкова отрицателни единици, колкото сѫ нуждни за да стане дѣлението ѝ съ дѣлителя възможно и притуряме пъмъ мантисата пакъ толкова положителни единици.

Примѣръ.

$$\overset{-2+2}{\overline{8}{\cdot}72310}:5=\overline{2}{\cdot}54462.$$

Смѣтане съ логаритми.

§ 16. ***Дадениятъ изразъ съдържа само дѣйствията умножение, дѣление, степенуване и коренуване.***

1. Да се изчисли изразътъ

$$x=549{\cdot}09.0{\cdot}004866.0{\cdot}047515.$$

Рѣшение.

$$\begin{aligned} logx&=log549{\cdot}09+log0\,0048466+log0{\cdot}04715 \\ &= \overset{+7}{2.73957}+\overset{+5}{\overline{3}{\cdot}68538}+\overline{2}{\cdot}67348 \\ &= 2{\cdot}73964+\overline{3}\,68543+\overline{2}{\cdot}67348 \\ &= \overline{1}{\cdot}09855, \text{ отдѣто} \end{aligned}$$

$$logx=1{\cdot}09855$$

$$\begin{array}{r|l} 830 & \ldots 0{\cdot}1254 \\ \hline 250 & 34 \\ \hline 12 & 7 \end{array}$$

$$x=0{\cdot}12547.$$

2. Да се изчисли изразътъ

$$x=\left(\frac{2}{37}\right)^5.$$

$$\begin{aligned} logx&=5log\frac{2}{37}=5(log2-log37) \\ &=5(0{\cdot}30103-1{\cdot}56820) \\ &=5(0{\cdot}30103+\overline{2}{\cdot}43180) \\ &=5.\overline{2}{\cdot}73283 \\ &=\overline{7}{\cdot}66415, \end{aligned}$$

отдѣто

$$logx=\overline{7}{\cdot}66415$$

$$\begin{array}{r|l} 408 & \ldots 0{\cdot}0000004614. \\ \hline 70 & 9 \\ \hline & 8 \end{array}$$

$$x=0{\cdot}00000046148.$$

3. Да се изчили изразътъ

$$\sqrt[5]{\frac{0{\cdot}5142}{375}}.$$

$$\begin{aligned} logx&=\frac{log0{\cdot}5142-log375}{5} \\ &=\frac{\overline{1}{\cdot}71113-2{\cdot}57403}{5} \\ &=\frac{\overline{1}{\cdot}71113+\overline{3}{\cdot}42597}{5} \\ &=\frac{\overset{-2+2}{\overline{3}}{\cdot}13710}{5} \\ &=\overline{1}{\cdot}42742. \end{aligned}$$

$$logx=\overline{1}{\cdot}42742$$

$$\begin{array}{r|l} 732 & \ldots\ 0{\cdot}2675. \\ \hline 100 & 16 \\ \hline & 6 \end{array}$$

$$x=0{\cdot}26756.$$

§ 17. ***Дадениятъ изразъ съдържа и дѣйствията събиране и изваждане.***

Примѣри.

1. $x=3\sqrt{11}+4{\cdot}8^5.$

Полагаме $3\sqrt{11}=y$ и $4{\cdot}8^5=z$; изчисляваме y и z и ги събираме.

$$\begin{array}{r|r} y=3\sqrt{11} & z=4{\cdot}8^5 \\ logy=0{\cdot}99781 & logz=3{\cdot}40620 \\ y=9{\cdot}9497 & z=2548. \end{array}$$

$$x=y+z=2557{\cdot}9497.$$

2. $x=4{\cdot}325\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{3}.}_{z}}$

Изчисляваме $\sqrt{3}=z.$

$$log\ z=0{\cdot}23856 \text{ и}$$
$$z=1{\cdot}732.$$

Замѣстваме:

$$x=4{\cdot}352\sqrt{2-1{\cdot}732}=4{\cdot}325\sqrt{0{\cdot}268},$$
$$logx=0{\cdot}35005,$$
$$x=2{\cdot}239.$$

§ 18. *Даденият̌ изразъ съдържа положителни и отрицателни множители.*

Слѣдъ като опрѣдѣлимъ знака на израза, логаритмуваме абсолютната му величина и прѣдъ антилогаритма ѝ пишемъ знака на израза.

Примѣръ.

$$x=\frac{\sqrt[3]{-2}}{0\cdot00572^2}$$

Рѣшение.

$$x=\frac{-\sqrt[3]{2}}{0\cdot00572^2}=-\frac{\sqrt[3]{2}}{0\cdot00572^2};$$

$$-x=\frac{\sqrt[3]{2}}{0\cdot00572^2}.$$

$$log\ (-x)=4\cdot58554;$$

$$-x=38507,$$

$$x=-38507.$$

§ 19. I. *Показательтъ на дадената степень е десетична дробь.*

Примѣръ. $x=0\cdot03^{0\cdot03}$

Рѣшение.

$$x=0\cdot03^{\frac{3}{100}}=\sqrt[100]{0\cdot03^3}.$$

$$\log x=\frac{3\log0\cdot03}{100}=\frac{\bar{3}.\bar{2}\cdot47712}{100}=\frac{\overset{-95+95}{\bar{5}\cdot43136}}{100}=\bar{1}\cdot95431;$$

$$x=0\cdot90014.$$

Сжщия резултатъ ще се добие, ако считаме степеньта съ дробенъ показатель не като символъ, а като степень въобще.

$$\log x=0\cdot03\ \log0\cdot03=0\cdot03.\bar{2}\cdot47712=0\cdot03.\ (-1\cdot52288)=$$

$= -\ 0\cdot0456864=\bar{1}\cdot9543136$, или $\log x=\bar{1}\cdot95431$, отдѣто $x=0\cdot90014$.

Вториятъ начинъ е за прѣдпочитане.

II. *Показательтъ на дадената степень е отрицателно число.*

Примѣръ.

$$x=6\cdot263^{-\frac{3}{2}}$$

Рѣшение.

$$x=\frac{1}{6\cdot262^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{6\cdot263^3}};$$

$$\log x=\log 1-\frac{3\log 6\cdot263}{2}=-\frac{3.0\cdot79678}{2}=-3.0\cdot39839=-1\cdot19517.$$

$\log x=\bar{2}\cdot80483$, отдѣто $x=0\cdot063901$.

Сжщия резултатъ ще се добие, ако считаме степеньта съ отрицателенъ показатель не като символъ, а като степень въобще. Така,

$$\log x=-\frac{3}{2}\log 6\cdot263=-\frac{3}{2}\cdot 0\cdot79678=-1\cdot19517=\bar{2}\cdot80483,$$

отдѣто $x=0\cdot063801$.

Вториятъ начинъ е за прѣдпочитане.

§ 20. *Логаритмуване на логаритъмъ.*

Логаритмътъ е число и затова може да се логаритмува. Напр., нека да изчислимъ изразитѣ:

1. $x=0\cdot30103.^{1\cdot20357}$

$$logx=1\cdot20357.\ log\ 0\cdot30103,$$
$$logx=1\cdot20357.\ \bar{1}\cdot47861,$$
$$logx=1\cdot20357.\ (-0\cdot52139),$$
$$logx=-\ 1\cdot20357\cdot\ 0\cdot52139,$$
$$-logx=1\cdot20357.\ 0\cdot52139;$$
$$log(-logx)=\bar{1}\cdot79764,$$
$$-logx=0\cdot62754,$$
$$logx=-0\cdot62754,$$
$$logx=\bar{1}\cdot37246;$$
$$x=0\cdot23577.$$

2. $x=0\cdot513^{\sqrt[6]{0\cdot69}}$.

$$log\,x=\sqrt[6]{0\cdot69}\ log\,0\cdot513,$$
$$log\,x=\sqrt[6]{0\cdot69}\,.\,\bar{1}\cdot71012,$$
$$log\,x=-\sqrt[6]{0\cdot69}\,.\,0\cdot28988,$$
$$-log\,x=\sqrt[6]{0\cdot69}\,.\,0\cdot28988;$$
$$log(-log\,x)=\bar{1}\cdot43536,$$
$$-\ log\,x=0\cdot27243,$$
$$log\,x=-\ 0\cdot27243,$$
$$log\,x=\bar{1}\cdot73757;$$
$$x=0\cdot53404.$$

§ 21. *Прѣминаване отъ неперови логаритми къмъ бригови и обратно,*

Нека $N = 10^x = e^y$, или $x = \log N$ и $y = LN$. Ако логаритмуваме равенството

$$10^x = e^y$$

при основа *e*, ще получимъ:

$$x\ L10 = y.$$

отдѣто

$$x = y \cdot \frac{1}{L10}, \text{ или}$$

$$\log N = LN \frac{1}{L10} = LN.0{\cdot}4343:$$

Обратно, ако логаритмуваме горното равенство при основа 10, ще получимъ

$$x = y \log e,$$

отдѣто

$$y = x. \frac{1}{\log e}, \text{ или}$$

$$LN = \log N. \frac{1}{\log e} = \log N.\ 2{\cdot}3025.$$

Примѣри.

1. $l2 = 0{\cdot}69315;\ log\ 2 = ?$
$log 2 = 0{\cdot}69315.\ 0{\cdot}4343 = 0{\cdot}301035045$, или $log 2 = 0{\cdot}30103$.

2. $log 2 = 0{\cdot}30103;\ l2 = ?$
$l2 = 0{\cdot}30103.\ 2{\cdot}3025 = 0{\cdot}693121575$, или $l2 = 0{\cdot}69312$.

Множителитѣ 0·4343 и 2·3025 се наричатъ **модули**. Въ логаритмичнитѣ таблици на Д-ръ Студничка, на стр. 2 – 8, дадени сѫ неперовитѣ и бриговитѣ логаритми на проститѣ числа отъ 1 до 1063.

ГЛАВА III.

Показателни и логаритмични уравнения.

Опрѣдѣления.

§ 22. Уравнение, въ което неизвѣстната влиза като степененъ или корененъ показатель, се нарича **показателно (експоненциално) уравнение**. Уравнение, въ което неизвѣстната се намира подъ логаритъмъ, се нарича **логаритмично уравнение**. Уравнение, което е едновърѣменно и логаритмично и показателно, се нарича **логаритмично-показателно уравнение**. Напр.,

$a^x = b$ е показателно уравнение,
$log x = a$ е логаритмично уравнение,
$a^{log x} = b$ е показателно-логаритмично уравнение.

Показателни уравнения.

§ 23. При показателнитѣ уравнения срѣщаме слѣднитѣ двѣ форми:
а). Ако двѣтѣ страни на уравнението могатъ се прѣдстави въ видъ на степени съ една и сѫща основа, то заключаваме, че и степеннитѣ показатели трѣбва да бѫдатъ равни; получаваме обикновено алгебрично уравнение. Напр., отъ уравнението $a^x = a^n$ слѣдва $x = n$.

Често пѫти даденото уравнение получава горния видъ слѣдъ прѣработване. Напр.,

$$a^{2(x-1)} - a^{2x-3} = (a-1)^{x-\frac{1}{2}},$$

$$a^{2x-2} - a^{2x-3} = (a-1)^{\frac{2x-1}{2}},$$

$$a^{2x-3}(a-1) = (a-1)^{\frac{2x-1}{2}},$$

$$a^{2x-3} = (a-1)^{\frac{2x-3}{2}},$$

$$a^{2x-3} = (\sqrt{a-1})^{2x-3}$$

$$(a : \sqrt{a-1})^{2x-3} = 1, \text{ отдѣто } 2x - 3 = 0, \text{ или } x = \frac{3}{2}.$$

b). Ако двѣтѣ страни на уравнението сѫ степени съ различни основи, то логаритмуваме и получаваме алгебрично уравнение. Напр., отъ $a^x = b$ слѣдва $x log a = log b$ и $x = log b : log a$.

c) Понѣкога се случва, че трѣбва да въвеждаме нова неизвѣстна. Напр., $2^{2x} - 6.\ 2^x + 8 = 0$; замѣстяме 2^x съ y и получаваме уравнението $y^2 - 6y + 8 = 0$, коренитѣ на което сѫ $y_1 = 4$ и $y_2 = 2$. Слѣдов., $2^x = 4 = 2^2$, отдѣто $x_1 = 2$ и $2^x = 2$, отдѣто $x_2 = 1$.

Логаритмични уравнения.

§ 24. При рѣшаването на логаритмичнитѣ уравнения гледаме всѣкога да ги прѣдставимъ въ равенство на два логаритма, слѣдъ което заключаваме, че и антилогаритмитѣ сѫ равни; по този начинъ получаваме пакъ алгебрично уравнение, което знаемъ да рѣшаваме. Напр., нека е дадено уравнението:

$$log(x+7) = 1 + log(x-11).$$

Тогава: $log(x+7) = log 10 + log(x-11)$,
и $log(x+7) = log 10(x-11)$,
отдѣто $x + 7 = 10x - 110$
и $x = 13$.

Уравнението $16^{log 2x} = 32^{log x}$ ще рѣшимъ по слѣдния начинъ:

$$2^{4 log 2x} = 2^{5 log x};$$

$$4 log 2x = 5 log x,$$

$$(2x)^4 = x^5,$$

$$16x^4 = x^5$$

и $x = 16$.

Система на показателни и логаритмични уравнения.

§ 25. Ако е дадена система отъ показателни и логаритмични уравнения, то гледаме да приведемъ тая система въ друга отъ алгебрични уравнения. Напр., отъ системата

$$\begin{cases} 3^{x+y} = 27 \\ 5^{y-x+1} = 1 \end{cases}$$

получаваме системата

$$\begin{cases} x+y=3 \\ y-x+1=0, \end{cases}$$

отдѣто $x=2,\ y=1,$

Задачи и упражнения.

Логаритми при разни основи.

1. Опрѣдѣли:
2) $log_2 4.$ b) $log_3 27.$ c) $log_2 16.$
d) $log_{0\cdot5} 0\cdot25.$ e) $log_{0\cdot2} 0\cdot008.$ f) $log_{0\cdot5} 0\cdot0625.$

2. a) Кое число при основа 3 има логаритъмъ 5 ?
b) „ „ „ „ 9 „ „ —2 ?
c) „ „ „ „ 0·6 „ „ 4 ?
d) „ „ „ „ $\frac{2}{7}$ „ „ —3 ?

3. a) При коя основа логаритмътъ на 16 е 2 ?
b) „ „ „ „ „ „ „ 4 ?
c) „ „ „ „ „ $\frac{18}{625}$ „ 4 ?
d) „ „ „ „ „ 0·729 „ 3 ?

Свойства на логаритмитѣ.

3. a) $ab.$ b) $pqr.$ c) $3x\ .\ 4\ y.$
d) $a(b+c).$ e) $a^2+ab.$ f) $a^2—ab.$

5. a) $\frac{ab}{c}.$ b) $\frac{pq}{rs}.$ c) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}.$
b) $\frac{x(a+x)}{cd}.$ e) $\frac{(a+b)(c—d)}{x(y—z)}.$ f) $\frac{a^2+ab}{ab—b^2}.$

6. a) $a^5b^3c^7.$ b) $\frac{a^7b^2}{c^6}.$ c) $\frac{a^mb^n}{c^pd^q}.$
d) $(a^3b^{12}c)^5.$ e) $\left(\frac{ab^4}{c^2d}\right)^6.$ f) $\frac{a^7}{z}\cdot\left(\frac{bc}{x+y}\right)^5.$

7. a) $\sqrt[5]{a}.$ b) $\sqrt[9]{ab}.$ c) $a\sqrt[3]{bc}.$
d) $\frac{a}{b}\sqrt[4]{cx}.$ e) $(a\sqrt{b})^5.$ f) $(x^4\sqrt[3]{y^2})^7.$

8. a) $\frac{4a^2}{b^3}\sqrt[10]{\frac{(a—2b)^5c^7}{7x^2y^3}}.$ b) $\frac{x^n\ y^{2n}}{2\sqrt[n]{(x+y)^3}}.$ c) $\frac{a^4\sqrt[5]{b^2c}}{x^2\sqrt[3]{yz^4}}.$
d) $\frac{\sqrt[3]{a\sqrt[5]{a^7}}}{\sqrt[4]{x}}.$ e) $\sqrt[5]{a\sqrt[3]{b}}.$ f) $\sqrt[3]{x^2\sqrt[4]{y^5}}.$

9. a) $a\sqrt[8]{\frac{b^5c^7}{x\sqrt{y}}}.$ b) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{b\sqrt{c}}}.$ c) $\sqrt[x]{a\sqrt[x]{b\sqrt[x]{c}}}.$
d) $\sqrt[x]{\frac{\sqrt[y]{p}}{q}}.$ e) $\sqrt[12]{\frac{a^5\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[4]{a^5\sqrt{a}}}}.$ f) $\sqrt[4]{\frac{m}{\sqrt{mn}}\sqrt[3]{\frac{m}{n}}}.$

Антилогаритмувай изразитѣ!

10. a) $loga+logb-log(a+b).$
b) $logx—logy+log(x+y)—log(x—y).$
c) $log(a—2b)—logc+log(a+2b)-(loga+logb).$
d) $log\frac{a}{x}—log\frac{b}{x}+log\frac{c}{x}.$
e) $log\frac{1}{a}—log\frac{b}{a}+log\frac{2b}{3a}+log6a.$

11. a) $5loga+7logb—3logc.$
b) $2log5+5log2—7log8—log12.$
c) $4log(a+b)+3log(a—b)—4log(x—y).$
d) $mlog(a+b)—nloga+mlog(a—b)—nlogb.$

12. a) $\frac{loga+logb}{4}.$ b) $\frac{5(logx—logy)}{6}.$
c) $loga+\frac{logb+3logc}{n}$ d) $logx+\frac{2logy+3logz}{4}.$

13. a) $\frac{1}{5}logx+\frac{1}{3}logy+3logz—\frac{1}{7}(logp—logq).$
b) $3(loga+5logb—\frac{1}{4}logc)+4log(b+c).$

14. a) $\frac{1}{4}\left[\log3+5\log a+\frac{1}{5}\log(a-b)-\frac{1}{7}(\log x+\log y)\right]$.

b) $\log(3x+4y)-\left[\frac{1}{3}\log(a+b)+\frac{1}{6}\log(a-b)\right]+\log(y-3z)$.

c) $\log a+\frac{1}{a}\left(\log a+\frac{1}{a}\left[\log a+\frac{1}{a}(\log a+\frac{1}{a}\log a)\right]\right]$.

Логаритмични изчисления на числени изрази.

Изчисли!

15. a) $\log15+\log519+\log6752+\log0\cdot9448$.
b) $\log0\cdot932^3+\log4\cdot624^4+\log411\cdot85^3$.
c) $\log49\cdot25^3+\log\sqrt{82275}+\log0\cdot428^4$.
d) $\log\sqrt{0\cdot4146^3}+\log\left(\sqrt[5]{0\cdot7625}\right)^3+\log\sqrt{819^3}$.

16. a) $31\cdot834.168\cdot498$. b) $7\cdot4008\ 0\cdot3216$. c) $0\cdot004893.6\cdot79308$.

17. a) $\frac{19\cdot7939}{7\cdot3792}$ b) $\frac{7\cdot83.91\cdot3504}{0\cdot0479}$. c) $\frac{4\cdot9.306.48\cdot3}{100\cdot088.2\cdot9.8\cdot11}$

18. a) $(1\cdot0435)^9$. b) $(0\cdot538009)^7$. c) $(0\cdot79183.3\cdot17)^8$.

d) $\left(\frac{917}{425}\right)^{10}$. e) $\left(\frac{17\cdot944.0\cdot38}{9\cdot731}\right)^8$. f) $\left(2\frac{18}{487}\right)^{11}$.

19. a) $\sqrt[8]{39\cdot8376}$. b) $\sqrt[9]{82\cdot724.563\cdot73}$. c) $\sqrt[6]{\frac{21\cdot304.1\cdot63406}{0\cdot047.}}$.

d) $\sqrt[3]{7\cdot8312}$. e) $(0\cdot021386.)^{\frac{4}{5}}$ f) $\frac{5}{348}\sqrt[4]{3\cdot7582}$.

20. a) $\frac{0\cdot78345}{6\cdot29309}\sqrt[3]{\frac{35\cdot8}{0\cdot005374}}$. b) $\frac{87\sqrt[6]{0\cdot48371}}{19\cdot7\sqrt[5]{0\cdot00078942}}$.

c) $\left(\frac{14}{19}\right)^6\sqrt[3]{\frac{58\cdot463.31\cdot69}{0\cdot0372}}$. d) $5\sqrt[7]{\frac{18}{47}}.\sqrt[6]{0\cdot637}$.

e) $\sqrt[6]{34\sqrt[5]{0\cdot93}}$. f) $\sqrt[11]{\frac{3\cdot19\sqrt[6]{\frac{2}{3}}}{8\sqrt{0\cdot35}}}$ g) $\sqrt[10]{\frac{0\cdot83\sqrt[7]{0\cdot4783}}{\left(1\cdot7\sqrt[3]{0\cdot23}\right)}}$.

21. a) $\sqrt[7]{-251}$. d) $\sqrt[9]{(-0\cdot28718)^5}$. c) $\frac{1}{\sqrt[5]{(-0\cdot63824)^7}}$.

22. a) $\sqrt[3]{8+\sqrt[5]{7}}$. b) $\sqrt[11]{35\cdot7+8\sqrt[3]{11\cdot3259}}$. c) $\sqrt[5]{0\cdot783-6\sqrt{0\cdot0431}}$.

d) $\sqrt[7]{\frac{52\cdot3-17\sqrt[3]{0\cdot138}}{5\sqrt[4]{6\cdot94}}}$. e) $\sqrt[3]{\frac{6\sqrt{66}+7\sqrt{27}}{3\sqrt{219}-18\sqrt{0\cdot273}}}$.

23. a) $(62500)^{0\cdot2}(0\cdot534)^{1\frac{2}{3}}$ b) $\left(\frac{229\cdot25^{-0\cdot3}2.549^{3\frac{1}{7}}}{0\cdot7428^{-2\frac{1}{3}}}\right)^5$.

c) $(0\cdot627839)^{-0\cdot12}\ (9\cdot012)^{0\cdot06}$ d) $(0\cdot0359547)^{\sqrt[3]{0\cdot25}}$.

e) $(1\cdot002)^{\sqrt[5]{1\cdot002}}$ f) $(0\cdot0003)^{\sqrt[3]{0\cdot0003}}$

Показателни и логаритмични уравнения.

Рѣшй безъ логаритмуване уравненията:

24. a) $2^x=32$. b) $\frac{1}{8^x}=64$. c) $5^x=\frac{1}{125}$.

d) $(5^x)^3=25$. e) $\frac{1}{49^{2x}}=-343$. f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-7}=64$.

25. a) $\left(\frac{4}{3}\right)^{4x-7}=\left(\frac{3}{4}\right)^{2-3x}$. b) $\left(\frac{27}{19}\right)^{11x-15}=\left(\frac{19}{27}\right)^{7x-3}$.

c) $\left(\frac{2a}{3b}\right)^{x-1}=\left(\frac{3b}{2a}\right)^{2x-3}$.

26. a) $(a^{x-3})^{2x}=(a^{2x})^{1+x}$. b) $\sqrt[x-3]{a^{4x-17}}=\sqrt[x-3]{a^{4(x-5}}$.

c) $(0\cdot25)^{23}=\sqrt[3]{4^{5x-3}}\,.0125^{6x}$. d) $64^{\frac{x+2}{8x-5}}=\sqrt[4]{0\cdot5\sqrt[x+3]{2^{x+24}}}$.

e) $\sqrt[x]{15^{7x-6}}=5.\sqrt[2x]{3^{2x-1}}$.

27. a) $7^x+7^{x-1}=8^x$. b) $2^{x-1}-2^{x-3}=3^{x-2}-3^{x-3}$.

Рѣшй безъ логаритмуване уравненията:

28. a) $\log x=3$. b) $2\log y-1=3\log2$. c) $3-\frac{2}{5}\log x=3\log5$.

29. a) $5\log x^2=\log x-18$. b) $4\log(x-1)=3\log(x-1)^3+5$.

30. a) $\log 5x+\log(2x+3)=1+2\log(3-x)$.
b) $\log(x+7)=2+\log(x-11)$.

31. a) $3^{\log x}=9$. b) $5^{\log 2x}=625$. c) $16^{\log 3x}=32^{\log x}$,

Рѣшй чрѣзъ логаритмуване уравненията:

32. a) $5011{\cdot}89^{\frac{1}{x}}=10$. b) $\sqrt[3x]{18{\cdot}1194}=25$. c) $\sqrt[x]{\tfrac{3}{7}}=0{\cdot}84412^{9}$.

33. a) $\sqrt[3]{3^{x}}=2{\cdot}478062$. b) $3^{15x-4}=2^{7x}$. c) $5^{2x+3}=(0{\cdot}0)^{3x}$.
d) $\left(\frac{11}{17}\right)^{5x}=7^{4x-3}$. e) $\left(\frac{3}{4}\right)^{5x-2}=(5{\cdot}301)^{x+1}$.

34. a) $(13{\cdot}4)^{3x+4}-0{\cdot}16.(83{\cdot}75)^{8x+9}$ b) $22{\cdot}83^{3-4x}=0{\cdot}002208^{7-4x}$

35. a) $\sqrt[x]{1{\cdot}7^{3}}=4\sqrt[3x]{0{\cdot}135018^{8}}$. b) $7^{(8^{x})}=3^{(5^{x})}$
c) $\sqrt[5]{\left(\frac{988}{935}\right)^{6x+5}}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{437}{1547}\right)^{4-x}}=\frac{361}{340}\sqrt[4]{\left(\frac{69}{3094}\right)^{3x+10}}$.

36. a) $12^{x+3}-12^{x}=5^{x+2}-5^{x+1}$.
b) $5.10^{2x-3}+6.11^{3x+1}-2.10^{2x+1}=3.11^{3x-1}+10^{2x}$.

Рѣшй чрѣзъ логаритмуване уравненията:

37. a) $3+5\log x=7{\cdot}8$. b) $\log x^{2}+\log x^{5}=15{\cdot}561$.

38. a) $\log\sqrt[3]{5x}=0{\cdot}398707$. b) $\log(x+2)-\log(x+1)=0{\cdot}02345$.

39, a) $\log 3x+\log(4x-7)=\log 11x+0{\cdot}389970$.

40. a) $0{\cdot}149+\log(7^{x}-3)=x\log 7$. b) $3^{\log x}=(6{\cdot}23)^{4}$.
c) $11^{\log 3x}=(0{\cdot}91514)^{6}$. d) $(5{\cdot}65055)^{5\log x}=(6{\cdot}23)^{4}$.

41. $\sqrt[4]{(1{\cdot}8282)^{3+\log x}}=(1{\cdot}59)^{\log 2x}$.

Да се рѣшатъ слѣднитѣ системи уравнения:

42. a) $\begin{cases}3^{3x}.3^{4y}=18\\ 2x-y=\frac{1}{6}.\end{cases}$ b) $\begin{cases}4^{x}.(\frac{2}{3})^{y}=9\\ 16^{x}.\frac{1}{3y}=144.\end{cases}$

43. a) $\begin{cases}\sqrt[5]{7^{2x}}\sqrt[7]{5^{y+1}}=245\\ 3x-2y=3.\end{cases}$ b) $\begin{cases}\sqrt[x]{3}.\sqrt[y]{0{\cdot}5}=1{\cdot}164089\\ \sqrt[x]{7}.\sqrt[2y]{13}=16{\cdot}1082.\end{cases}$

43. a) $\begin{cases}22{\cdot}5^{x}\sqrt[y]{2}=5{\cdot}97633\\ 15^{x}\sqrt[y]{19}=10{\cdot}334675.\end{cases}$ d) $\begin{cases}\sqrt[6]{x^{5y}}=1024\\ 1{\cdot}5\sqrt{x}=\sqrt[y]{729}.\end{cases}$

Да се рѣшатъ слѣднитѣ уравнения:

45. a) $3^{x-1}=\sqrt[x]{9}$. b) $8^{2(x+1)}=32^{\frac{2}{x}-1}$. c) $7^{2x}\sqrt[x]{11^{3}}=41503$.
d) $27^{x+1}=5\sqrt[x]{0{\cdot}6}.\ 75^{6x-1}$. e) $7^{2x}-5.7^{x+1}+300=0$.

46. a) $3^{x+2}+3^{2-x}=82$. b) $25^{x-1}-5^{x+1}+24=0$.

47. a) $2\log x+\frac{1}{\log x}=3$. b) $x^{2+3\log x}=10$.

48. a) $x^{2+\log x}.x^{5+\log x}=10000$. b) $(0{\cdot}55x^{2})^{\log x}=12898{\cdot}5$.
c) $3x^{\log x}+\frac{100}{x^{\log x}}=35$. d) $x^{2\log x-6}+12=7x^{\log x-3}$.

ГЛАВА IV.

Аритметична прогресия.

Опрѣдѣления и означения.

§ 26. Редъ отъ числа, които иматъ това свойство, че разликата между кое да е отъ тия числа и прѣдидущето му, ако го има, е величина постоянна, се нарича аритметична прогресия. Така, редътъ

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,$$

въ който

$$3-1=5-3=7-5=9-7=2,$$

е аритметична прогресия.

Постоянната величина се нарича разлика на прогресията и може да бжде положителна, или отрицателна. Прогресията, разликата на която е положителна, се нарича възходяща прогресия, а оная, разликата на която е отрицателна, — низходяща прогресия. Така,

$$2,\ 6,\ 10,\ 14,\ 18$$

е възходяща прогресия, а

$$5,\ 2,\ -1,\ -4,\ -7$$

— низходяща. Разликата на първата прогресия е $+4$, а на втората -3. Числата, които съставятъ прогресията, се наричатъ членове на прогресията; при това, първото число отлѣво се нарича прървъ членъ, второто — вторъ членъ и послѣдното (отдѣсно)—послѣденъ членъ. Членоветѣ на възходящата прогресия, отъ началото й къмъ края, смѣтано отъ лѣво на дѣсно, се увеличаватъ, а на низходящата — се намаляватъ. Написани въ обратенъ редъ, възходящата прогресия става низходяща, а низходящата— възходяща. Така,

$$2,\ 6,\ 10,\ 14,\ 18$$

е възходяща прогресия, а

$$18,\ 14,\ 10,\ 6,\ 2$$

— низходяща.

§ 27. За да покажемъ че числата

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ .\ .\ .\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n$$

сѫ послѣдователни членове на аритметична прогресия, пишемъ:

$$\div a_1,\ a_2,\ a_3,\ .\ .\ .\ .\ .\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n$$

Разликата на прогресията се бълѣжи съ d, числото на членоветѣ — съ n и сумата съ s.

Свойства на членоветѣ.

§ 28. 1. ***Всѣки членъ на прогресията е равенъ на прѣдидущия си членъ, ако го има, събранъ съ разликата, или на послѣдующия си, ако го има, безъ разликата***. Така,

$$a_4=a_3+d \text{ и } a_4=a_5-d.$$

Това слѣдва отъ опрѣдѣлението.

2. ***Всѣки членъ нс прогресията е срѣдня аритметична на съсѣднитѣ си членове, ако ги има.*** Така,

$$a_5=a_4+d,$$
$$a_5=a_6-d,$$

отдѣто $\quad 2a_5=a_4+a_6$ и $a_5=\frac{a_4+a_6}{2}$.

3. ***Всѣки членъ на прогресията, начиная отъ втория, е равенъ на първия членъ, събранъ съ разликата, взета толкова пѫти, колкото сѫ членоветѣ прѣдъ опрѣдѣлкемия членъ.*** Така,

$$a_2=a_1+d,$$
$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$
$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d$$

и т. н.

Изобщо, $\quad a_n=a_1+(n-1)d.$

4. ***Сумата на два члена на прогресията, еднакво отдалечени отъ крайничѣ ѝ членове, е равна на сумата отъ крайнитѣ членове.*** Така,

$$a_3+a_{n-2}=a_1+a_n\,,$$

защото

$$a_3=a_1+2d,$$
$$a_{n-2}=a_n-2d;$$

слѣдов., $\quad a_3+a_{n-2}=a_1+a_n\,.$

§ 29. ***Общъ членъ на прогресията.***

Видѣхме (§ 38, 3), че

$$a_n=a_1+(n-1)d \text{ (I)}.$$

Равенството (I), съ което може да се изчисли кой и да е членъ на прогресията, като се знаятъ само първия ѝ членъ и разликата ѝ, се нарича **равенство на общия членъ**, а членътъ a_n — **общъ членъ** на прогресията.

Примѣръ. Да се изчислятъ осмия и десетия членове на прогресията

$$\div 2,\ 6,\ 10,\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

Рѣшение.

$$a_8=a_1+7d=2+7.4=30\,;\ a_{10}=a_1+9d=2+9.4=38.$$

§ 30. Равенството

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

съдържа 4 величини: a_n , a_1, n и d и за да изчислимъ една отъ тѣхъ, трѣбва да бѫдатъ дадени останалитѣ три. Отъ това равенство намираме:

$$a_1=a_n-(n-1)d\,;$$ $-a_n+(n-1)d$

$$d=\frac{a_n-a_1}{n-1}\,;$$

$$n=\frac{a_n-a_1+d}{d}=\frac{a_n-a_1}{d}+1.$$

Сума на членоветѣ на прогресията.

§ 31. ***Сумата на членоветѣ на дадена аритметична прогресия е равна на произведението очъ полусумата на крайнитѣ*** ѝ ***членове и числото на членоветѣ***

Доказ. Ако дадената прогресия е

$$\div a_1,\ a_2,\ a_3,\ .\ .\ .\ .,\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n\ , \text{ то}$$
$$S=a_1+a_2+a_3+\ .\ .\ .\ +a_{n-2}+a_{n-1}+a_n \text{ и}$$
$$S+a_n+a_{n-1},+a_{n-2}+\ .\ .\ .\ a_3+a_2+a_1, \text{ отдѣто}$$
$$2S=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$+(a_{n-2}+a_3)+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1),$$
$$2S=(a_1+a_n)n \text{ и най-послѣ}$$
$$S=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n.$$

Примѣри.

1. Да се изчисли сумата на членоветѣ на прогресията

$$\div\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13.$$

Рѣшение.

$$S=\frac{(1+13).7}{2}=49.$$

2. Да се изчисли сумата на членоветѣ на прогресията

$$\div\ 32,\ 28,\ 24,\ 20,\ 16,\ 12.$$

Рѣшение.

$$S=\frac{(32+12)6}{2}=132.$$

§ 32. Равенството

$$S=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$$

съдържа 4 величини: S, a_1, a_n, n и за да изчислимъ една отъ тѣхъ, трѣбва да знаемъ останалитѣ три. Отъ това равенство намираме:

$$n=\frac{2S}{a_1+a_n};$$

$$a_1=\frac{2S-a_n\,.\,n}{n};$$

$$a_n=\frac{2S-a_1\,.\,n}{n}.$$

§ 33. Ако въ равенството

$$S=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$$

замѣнимъ a_n съ $a_1+(n-1)d$, ще намѣримъ

$$S=\frac{[2a_1+(n-1)d]n}{2}.$$

Послѣдното равенство се употрѣбява, когато не е даденъ послѣдния членъ.

§ 34. Двѣтѣ равенства

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

$$S=\frac{(a_1+a_n)n}{2}$$

съдържатъ петь величини: a_1, a_n, n, d, S и служатъ за изчисляване на двѣ отъ тѣхъ, когато сѫ дадени останалитѣ три. Понеже могатъ да се диритъ

a_1, a_n, ако сѫ дадени n, d, S,
a_1, n, „ „ „ a_n, d, S,
a_1, d, „ „ „ a_n, n, S,
a_1, S, „ „ „ a_n, n, d,
a_n, n, „ „ „ a_1, d, S,
a_n, d, „ „ „ a_1, n, S,
a_n, S, „ „ „ a_1, n, d,

n, d, ако сѫ дадени a_1, a_n, S,
n, S, „ „ „ a_1, a_n, d,
d, S, „ „ „ a_1, a_n, n,

то задачитѣ, къмъ които ни привождатъ равенствата за a_n и s, сѫ десеть и да рѣшимъ една отъ тѣзи задачи, ще рече да рѣшимъ тѣзи равенства.

Вмѣстване (интерполация).

§ 35. ***Да се вмѣстятъ m срѣдно-аритметични числа между двѣ числа a и b ще рече, да се състави аритметична прогресия съ $m+1$ члена, на която първия членъ да е a и послѣдния b.***

Нека опрѣдѣлимъ разликата d на тази прогресия. Понеже b е $m+2$-ия членъ, то

$$b=a+(m+1)d,\ \text{отдѣто}$$

$$d=\frac{b-a}{m+1}$$

и членоветѣ на прогресията сѫ

$$a,\ a+\frac{b-a}{m+1},\ a+2\frac{b-a}{m+1},\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ,\ a+n\frac{b-a}{m+1},\ b.$$

Примѣри. 1. Между 1 и 2 вмѣсти 4 срѣдно-аритметични числа!

Тукъ: $d=\frac{1}{5}$

и получаваме $\div 1,\ \frac{6}{5},\ \frac{7}{5},\ \frac{8}{5},\ \frac{9}{5},\ 2.$

2. Между 1 и 9 вмѣсти 3 срѣдно-аритметични числа!

Тукъ $d=2$ и $\div\ 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9.$

Слѣдствие. Ако между всѣки два съсѣдни члена на дадена аритметична прогресия вмѣстимъ по m срѣдно-аритметични числа, то тѣзи числа и членоветѣ на прогресията ще съставятъ нова аритметична прогресия. Да опрѣдѣлимъ разликата d_1 на тази прогресия.

Нека прогресията е

$$\div\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ .\ .\ .\ .\ .\ a_{n-1},\ a_n.$$

Като вмѣстимъ между a_1 и a_2; a_2 и a_3; . . . по m срѣдно-аритметични числа, ще получимъ, споредъ прѣдидущето, прогресии съ разлики

$$\frac{a_2-a_1}{m+1},\ \frac{a_3-a_2}{m+1},\ .\ .\ .\ .\ \frac{a_n-a_{n-1}}{m+1}.$$

Понеже $a_2-a_1=a_3-a_2=\ .\ .\ .=a_n-a_{n-1}=d$, то тѣзи разлики сѫ равни помежду си. Слѣдов., вмѣстенитѣ числа и членоветѣ на дадената прогресия съставятъ нова прогресия съ разлика $d_1=\frac{d}{m+1}$.

Примѣри. 1. Между членоветѣ на прогресията

$$\div 1,\ 2,\ 3$$

вмѣстѝ по 4 срѣдно-аритметични числа!

Рѣшение. $d_1=\frac{1}{5}$ и получаваме

$$\div 1, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}, \frac{9}{5}, 2, \frac{11}{5}, \frac{12}{5}, \frac{13}{5}, \frac{14}{5}, 3.$$

2. Между членоветѣ на прогресията

$$\div 1,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17,$$

вмѣстѝ по 3 срѣдно-аритметични числа.

Отг. $\div$ 1, 2. 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.

Сума на числата на натуралния редъ отъ 1 до п включително и сума отъ квадратитѣ на тѣзи числа

§ 36. ***Сума но числата отъ 1 до n, включително.***

Числата на натуралния редъ отъ 1 до n, включително, съставятъ аритметична прогресия и затова

$$S=1+2+3+\ \dots\ +n=\frac{(1+n)n}{2}.$$

Примѣръ. Да се намѣри сумата на всички числа отъ 1 до 50, включително.

Рѣшение. Тукъ $n=50$, слѣдов.

$$S=\frac{(1+50)50}{2}=1275.$$

§ 37. ***Сума на квадратитѣ на числата отъ 1 до n, включително.***

Сумата на квадратитѣ на числата отъ 1 до n включително намираме така:

9

$$\begin{aligned}
2^3&=(1+1)^3=1^3+3.1^2+3.1+1,\\
3^3&=(2+1)^3=2^3+3.2^2+3.2+1,\\
4^3&=(3+1)^3=3^3+3.3^2+3.3+1,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
(n+1)^3&=n^3+3n^2+3n+1
\end{aligned}$$

и като съберемъ и съкратимъ:

$$(n+1)^3=1^3+3(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2)+3(1+2+3+\dots+n)+n;$$

$$n^3+3n^2+3n+1=1+3(1^2+2^2+\dots\dots+n^2)+\frac{3n(n+1)}{2}+n;$$

$$2n^3+6n^2+4n=6(1^2+2^2+3^2+\ \dots\ +n^2)+3n^2+3n;$$

$$2n^3+3n^2+n=6(1^2+2+{}^23+\ \dots\ +n^2), \text{ отдѣто}$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots\dots+n^2=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}=\frac{n(2n^2+3n+1)}{6}=$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Грамади.

§ 38. Сферитѣ въ арсеналитѣ се нареждятъ въ **грамади**, формата на които е пирамидална. Сферитѣ въ грамадитѣ образуватъ пластове съ различна форма: трижгълна, квадратна и правожгълна. Ако основата е равностраненъ трижгълникъ, грамадата се нарича **трижгълна**, ако е квадратъ — **квадратна** и ако е правожгълникъ — **правожгълна**.

Трижгълни грамади.

§ 39. Сферитѣ въ пластоветѣ на ⊿-тѣ грамади образуватъ равностранни трижгълници. На върха на грамадата има една сфера; пластътъ подъ тази сфера има 1+2 сфери; пластътъ подъ този пласть има 1+2+3 сфери; слѣдващия пласть има 1+2+3+4 сфери и т. н.; послѣдниятъ пласть (п$^{\text{ия}}$ пласть) има $1+2+3+\dots+п$ сфери. Всичкитѣ сфери въ п$^{\text{ия}}$ пласть сж $\frac{п(п+1)}{2}=п^2.\frac{1}{2}+п.\frac{1}{2}$ и ако въ това равенство замѣнимъ n съ 1, 2, 3 и т. н., ще намѣримъ колко сж сферитѣ въ първия, втория, третия и т. н. пластове. Така,

въ I-ия пласть (п = 1) има $s_1=1^2.\frac{1}{2}+1.\frac{1}{2}$ сфери,
„ II-ия „ (п = 2) „ $s_2=2^2.\frac{1}{2}+2.\frac{1}{2}$ „
„ III-ия „ (п = 3) „ $s_3=3^2.\frac{1}{2}+3.\frac{1}{2}$ „

и т. н. и числото на сферитѣ въ грамадата е

$$\begin{aligned}
S&=s_1+s_2+s_3+\dots\dots+s_n=1^2.\tfrac{1}{2}+2^2.\tfrac{1}{2}+3^2.\tfrac{1}{2}+\dots\dots+п^2.\tfrac{1}{2}+1.\tfrac{1}{2}+2.\tfrac{1}{2}+3.\tfrac{1}{2}+\\
&+\dots\dots+п.\tfrac{1}{2}=\tfrac{1}{2}(1^2+2^2+3^2+\ \dots\ +п^2)+\tfrac{1}{2}(1+2+3+\ \dots\ +п)=\\
&=\frac{1}{2}\,\frac{п(п+1)\,(2п+1)}{6}+\frac{1}{2}.\frac{п(п+1)}{2}=\\
&=\frac{п(п+1)}{2}\left[\frac{2п+1}{6}+\frac{1}{2}\right]=\frac{п(п+1)}{2}.\frac{2п+1+3}{6}=\frac{п(п+1)\,(п+2)}{6}.
\end{aligned}$$

Ако п=10, то

$$S=\frac{10(10+1)\,(10+2)}{6}=\frac{10.\ 11.\ 12}{6}=220.$$

Квадратни грамади.

§ 40. Сферитѣ въ пластоветѣ на квадратнитѣ грамади образуватъ квадрати. На върха на грамадата има 1 сфера; пластътъ подъ тази сфера има 2^2 сфери (е квадратъ съ 2 сфери въ страната му); пластътъ подъ този пластъ има 3^2 сфери (е квадратъ съ 3 сфери въ страната му); слѣдващиятъ пластъ има 4^2 сфери и т. н.; послѣдниятъ пластъ (п-ия пластъ) има $п^2$ сфери. Слѣдов.,

$$S=1^2+2^2+3^2+4^2+\ \dots\ +п^2=\frac{п(п+1)\,(2п+1)}{6}.$$

Ако $n=10$, то

$$S=\frac{10(10+1)(20+1)}{6}=\frac{10.11.21}{6}=385.$$

Правожгълни грамади.

§ 41. Сферитѣ въ пластоветѣ на правожгълнитѣ грамади образуватъ правожгълници. Грамадата прилича на обикновенъ кжщенъ покривъ: основата й е правожгълникъ, а околнитѣ страни—двѣ трапеции и два равнобедрени трижгълника. На върха на грамадата има единъ редъ съ m сфери; пластътъ подъ този редъ съдържа 2 реда съ $m+1$ сфери въ всѣки редъ; пластътъ подъ този пластъ съдържа 3 реда съ $m+2$ сфяри въ всѣки редъ; слѣдващиятъ пластъ съдържа 4 реда съ $m+3$ сфери въ всѣки редъ и т. н., послѣдниятъ пластъ (n-ия пластъ) съдържа n реда съ $m+(n-1)$ сфери въ всѣки редъ. Споредъ това:

въ I-ия пластъ има m сфери,
„ II-ия „ „ $2(m+1)$ „ ,
„ III-ия „ „ $3(m+2)$ „ ,
„ IV-ия „ „ $4(m+3)$ „ ,
. . . .
„ n-ия „ „ $n(m+n-1)$, „ .

Ако въ равенството $n(m+n-1)=nm+n^2-n$ замѣнимъ n съ 1, 2, 3, . . . ще намѣримъ колко сж сферитѣ въ всѣки пластъ. Така

въ I-ия пластъ $(n=1)$ има $s_1=1.\ m+1^2-1$ сфери,
„ II-ия „ $(n=2)$ „ $s_2=2.\ m+2^2-2$ „ ,
„ III-ия „ $(n=2)$ „ $s_3=3.\ m+3^2-3$ „ ,
„ IV-ия „ $(n=4)$ „ $s_4=4.\ m+4^2-4$ „ ,
. . . .
„ n-ия „ $(n=n)$ „ $S_n=n.\ m+n^2-n$ „ .

и числото на сферитѣ въ грамадата е

$$\begin{aligned}S&=s_1+s_2+s_3+\ .\ .\ .\ .\ .+s_n=\\&=(1.\ m+2.\ m+3.\ m+\ .\ .\ .+n.\ m)+(1^2+2^2+3^2+\ .\ .\ .+n^2)-\\&-(1+2+3+\ldots+n)=m(1+2+3+\ldots+n)+(1^2+3^2+3^2+\ldots+n^2)-\\&-(1+2+3+\ldots+n)=m.\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\\&=\frac{3mn(n+1)+n(n+1)(2n+1)-3n(n+1)}{6}=\\&=\frac{n(n+1)[3m+2n+1-3]}{6}=\frac{n(n+1)(3m+2n-2)}{6}.\end{aligned}$$

Така, ако $n=11$ и $m=5$, то

$$S=\frac{12.13.(15+24-2)}{6}=962.$$

Призматични грамади.

§ 42. Гранатитѣ, които иматъ цилиндроконична форма, се нареждатъ въ призматични грамади. Най-горниятъ пластъ на призматичната грамада съдържа единъ редъ съ m гранати; пластътъ подъ него съдържа 2 реда съ по m гранати; пластътъ подъ този пластъ съдържа 3 реда съ по m гранати и т. н., послѣдниятъ пластъ (основниятъ пластъ) съдържа n реда съ по m гранати. Споредъ това:

въ I-ия пластъ има m гранати.
„ II-ия „ „ $2m$ „ ,
„ III-я „ „ $3m$. „ .
. . . .
„ n ия „ „ nm гранати и

слѣдов., числото на гранатитѣ въ грамадата е:

$$S=m+2m+3m+\ .\ \ .\ \ .+nm=m(1+2+3+\ .\ \ .\ \ .+n)=m.\frac{n(n+1)}{2}.$$

Основата на тази грамада е правожгълникъ, неравнитѣ страни на който съдържатъ едната n и другата m гранати.

ГЛАВА IV.

Геометрична прогресия.

Опрѣдѣления и означения.

§ 43. Редъ отъ числа, които иматъ това свойство, че частното на кое да е отъ тия числа и прѣдидущето му, ако го има, е величина постоянна, се нарича **геометрична прогресия**. Постоянната величина се нарича **показатель** или **частно** на прогресията. Така, редътъ

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,$$

въ който

$$\frac{3}{1}=\frac{9}{3}=\frac{27}{9}=\frac{81}{27}=\frac{243}{83}=3,$$

е геометрична прогресия съ показатель $=3$.

Числата, които съставятъ прогресията, се наричатъ членове на прогресията; при това първото число (отлѣво) се нарича първъ членъ, второто—вторъ членъ, третото — трети членъ и т. н. и послѣдното (отдѣсно) – послѣденъ членъ на прогресията.

Показательтъ на прогресията по абсолютната си величина може да бжде $\gtrless 1$. Въ първия случай прогресията се нарича възходяща а въ втория—низходяща. Прогресията

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ .\ \ .\ \ .$$

е възходяща, а прогресията

$$20,\ 10,\ 5,\ \frac{5}{2},\frac{5}{4},\ .\ .\ .\ .\ .$$

е низходяща. На първата прогресия показательтъ е 2, а на втората — $\frac{1}{2}$.

Написана въ обратенъ редъ, възходящата прогресия става низходяща, а низходяшата — възходяща.

Така,

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32.\ .\ .\ .\ .$$

е възходяща прогресия, а

$$32,\ 16,\ 8,\ 4,\ 9,\ .\ .\ .\ .$$

—низходяща. Показательтъ може да бѫде и отрицателно число; въ тоя случай членоветѣ прѣзъ единъ сѫ ту положителни, ту отрицателни и членоветѣ на прогресията растятъ или намаляватъ по абсолютнитѣ си величини. Такава е, напр., прогресията

$$2,\ -4,\ 8,\ -16,\ 32\ .\ .\ .\ .$$

Показательтъ на тази прогресия е — 2.

§ 44. За да покажемъ, че числата

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ .\ .\ .\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n$$

сѫ послѣдователни членове на геометрична прогресия, пишемъ:

$$∺ a_1,\ a_2,\ a_3,\ .\ .\ .\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n,$$

Показательтъ на прогресията се бѣлѣжи съ q, числото на членоветѣ съ n и сумата съ S.

Свойства на членоветѣ.

§ 45. 1. ***Всѣки членъ на прогресията е равенъ на прѣдидущия си членъ, ако го има, умноженъ съ показателя, или на послѣдующия си, ако го има, дѣленъ съ показателя.***

$$a_5=a_4q;\ a_8=a_7q;\ a_n=a_{n-1}q \text{ и } a_4=\frac{a_5}{q};\ a_7=\frac{a_8}{q};$$

$$a_{n-1}=\frac{a_n}{q} \text{ и т. н.}$$

Това слѣдва отъ опрѣдѣлението на прогресията.

2. ***Всѣки членъ на прогресията е срѣдня-геометрична на съсѣднитѣ си два члена, ако ги има.***

$$a_5=a_4q,\ a_6=a_5q \text{ и}$$

$$a_5=\frac{a_6}{q}, \text{ отдѣто}$$

$$a_5^2=a_4a_6 \text{ и } a_5=\sqrt{a_4a_6}.$$

3. ***Всѣки членъ на прогресията, начиная отъ втория, е равенъ на първия членъ, умноженъ съ показателя, степенуванъ на число, равно на броя на членоветѣ, които прѣдшествуватъ опрѣдѣляемия членъ.*** Така,

$$a_2=a_1q,$$
$$a_3=a_2q=(a_1q).q=a_1q^2,$$
$$a_4=a_3q=(a_1q^2).q=a_1q^3$$

и т. н.

Изобщо, $a_n=a_1q^{n-1}$.

4 ***Произведението на два члена на прогресията, еднакво отдалечени отъ крайнитѣ ѝ членове, е равно на произведението отъ крайнитѣ членове.*** Така, понеже a_3 е третиятъ членъ отъ началото на прогретията и a_{n-2}—третиятъ членъ отъ края ѝ, то

9

$$a_3=a_1q^2,$$
$$a_{n-2}=a_n\,.\frac{1}{q^2};$$

$a \cdot q^2 \cdot \frac{a_n}{q^2}$

слѣдов $a_3.a_{n-2}=a_1a_n$.

$a,\ a_n$

5. ***Произведението на членоветѣ на една геометрична прогресия съ n члена е равно на квадратния коренъ отъ n^a степень на произведението оть крайнитѣ членове.*** Такг,

$$p=a_1.a_2a_3\ .\ \ .\ \ .a_{n-2}.a_{n-1}.a_n\,,$$
$$p=a_n.\ a_{n-1}a_{n-2}\ .\ \ .\ \ .a_3a_2a_1;$$

слѣдов.

$$p^2=(a_1a_n).(a_2a_{n-1})\ .\ \ .\ \ .\ \ .(a_{n\ 1}a_2).(a_n\,a_1),$$

или

$$p^2=(a_1a_n)^n, \text{ отдѣто}$$
$$p=\sqrt{(a_1a_n)^n}.$$

6. ***Кои да сѫ четири члена на прогресията, слѣдващи единъ слѣдъ другъ, съставятъ геометрична пропорция.***

Така, $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ образуватъ геометрична пропорция, защото

$$a_2=a_1q$$

и

$$a_3=\frac{a_4}{q},$$

отдѣто

$a_2a_3=a_1a_4$, или $a_1 : a_2=a_3 : a_4$.

7. ***Членоветѣ на геометричната прогресия, взети прѣзъ единъ или прѣзъ два, или прѣзъ три и т. н., съставятъ пакъ геометрична прогресия.*** Така, отъ прогресията

$$∺\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256, \text{ получаваме}$$

геометричнитѣ прогресии:

1, 4, 16, 64, 256;
1, 8, 64, 512;
2, 8, 32, 128;
2, 16, 128.

Общъ членъ.

§ 46. Видѣхме, че

$$a_n=a_1q^{n-1}...(I).$$

Равенството (I), съ което може да се изчисли който и да е членъ на прогресията, стига да се знаятъ само първия ѝ членъ и показателя, се нарича равенство на общия членъ, а членътъ a_n — общъ членъ на прогресията,

Примѣръ. Да се изчислятъ петия и седмия членъ на прогресията

$$\div\div\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

Рѣшение.

$$a_5=a_1q^4=2\ .\ 2^4=2^5=32,$$
$$a_7=a_1q^6=2\ .\ 2^6=2^7=128.$$

§ 47. Равенството

$$a_n=a_1q^{n-1}$$

съдържа 4 величини; a_n, a_1, q, n и за да изчислимъ една отъ тия величини трѣбва да бждатъ дадени другитѣ три. Отъ това равенство намираме:

$$a_1=\frac{a_n}{q^{n-1}};$$

$$q=\sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}};$$

$$n=\frac{loga_n-loga_1+logq}{logq}=\frac{loga_n-loga_1}{logq}+1.$$

Сума на членоветѣ на прогресията.

§ 48. За да намѣримъ сумата S на прогресията

$$\div\div\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ .\ .\ .\ .\ .\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n$$

постжпваме така:

$S=a_1+a_2+a_3+\ .\ .\ .\ +a_{n-2}+a_{n-1}+a_n$ (1),

отдѣто $Sq=a_1q+a_2q+a_3q+\ .\ .\ .\ +a_{n-2}q+a_{n-1}q+a_n\,q$,

или $Sq=a_2+a_3+a_4+\ .\ .\ .\ +a_{n-1}+a_n+a_n\,q(2)$ и, слѣдъ изваждане,

$$Sq-S=a_n\,q-a_1 \text{ и, ако } q\mp1,$$

то

$$S=\frac{a_n\,q-a_1}{q-1}.$$

З а б ѣ л. 1. При възходящитѣ прогресии $a_n\,q\,\triangleright\,a_1$ и $q\,\triangleright\,1$, а при низходящитѣ $a_n\,q\angle a_1$ и $q\angle1$; и въ двата случая $\frac{a_n\,q-a_1}{q-1}$ е положителна величина, но за да се избѣгнатъ отрицателнитѣ числа, пишатъ: $S=\frac{a_n'q-a_1}{q-1}$ (II) и $S=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$ (III) споредъ това, дали прогресията е възходяща или пъкъ низходяща.

З а б ѣ л. 2. Ако $q=\text{I}$, то всичкитѣ членове сж равни по между си и сумата имъ е равна на n пжти първия членъ, дѣто n е числото на членоветѣ.

Примѣри.

1. Да се изчисли сумата на членоветѣ на прогресията

$$\div\div 144,\ 72,\ 36,\ 18,\ 9.$$

$$S=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{144-9.\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{288-9}{2}}{\frac{1}{2}}=279.$$

2) Да се изчисли сумата на членоветѣ на прогресията

$$\div\div\ 2.\ 4,\ 8,\ 16,\ 32.$$

$$S=\frac{a_nq-1}{q-1}=\frac{32.2-2}{2-1}=62.$$

§ 49. Равенствата (II) и (III) съдържатъ по 4 величини: S,a_1, a_n и q и за да изчислимъ една отъ тѣхъ, трѣбва да бждатъ дадени останалитѣ три. Отъ равенството (II) намираме:

$$a_1=a_n\,q-S(q-1);$$

$$a_n=\frac{a_1+S(q-1)}{q};$$

$$q=\frac{a_1-S}{a_n-S}.$$

§ 50. Ако въ равенствата (II) и (III) замѣнимъ a_n съ a_1q^{n-1}, ще намѣримъ за сумата други двѣ равенства:

$$S=\frac{a_1\,(q_n-1)}{q-1} \text{ и } S=\frac{a_1\,(1-q^n)}{1-q}.$$

Послѣднитѣ равенства се употрѣбяватъ, когато не е даденъ $n^{\text{ия}}$ членъ.

§ 51. Равенствата

$$a_n=a_1q^{n-1}$$

$$S=\frac{a_n\,q-a_1}{q-1} \text{ или } S=\frac{a_1-a_nq}{1-q}$$

съдържатъ петь величини: a_1, a_n, n, q, S и служатъ за изчисляване на двѣ отъ тѣхъ, когато сж дадени другитѣ три. Понеже може да търсимъ:

n и a_1, ако сж дадени a_n , q s.
n „ a_n , „ „ „ a_1, q, S.
n „ q, „ „ „ a_1, a_n , S.
n „ S, „ „ „ a_1, a_n , q.
q „ a_1, „ „ „ a_n , n, S.
q „ a_n „ „ „ a_1, n, S.
q „ S „ „ „ a_1 a_n , n.
S „ a_1 „ „ „ a_n, n, q.
S „ a_n , „ „ „ a_1, n, q,
a_1 „ a_n , „ „ „ n, q, S,

то задачитѣ, изъ които ни привождатъ равенствата за a_n и S, сж десеть. При това послѣднитѣ 4 задачи се рѣшаватъ съ уравнения отъ първа степень; задачитѣ пета и шеста—съ уравнения отъ $n-1$ степенъ и първитѣ четири задачи ни привождатъ къмъ показателни уравнения.

Безкрайна геометрична прогресия.

§ 52. Ако числото на членоветѣ на геометричната прогресия е безкрайно голѣмо, тя се нарича безкрайна геом. прогресия. Сумата на такава прогресия при $b > 1$ е $S=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{a_1(q^\infty-1)}{q-1}=\infty$, сир., сумата на възходяща безкрайна геометрична прогресия е безкрайно голѣма. Ако $q>1$, напр., $q=\frac{1}{b}$, дѣто $b>1$, то

$$S=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1\left[1-\left(\frac{1}{b}\right)^n\right]}{1-q}=\frac{a_1\left(1-\frac{1}{b^n}\right)}{1-q}=\frac{a_1\left(1-\frac{1}{\infty}\right)}{1-q}$$

$$=\frac{a_1(1-0)}{1-q}=\frac{a_1}{1-q},$$

сир., сумата на низходящата безкрайна прогресия е равна на първия й членъ, дѣленъ съ $1-q$.

Примѣри.

1. Да се изчисли сумата на безкрайната прогресия:

$$\div\div \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots .$$

Рѣшение.

Тукъ $a_1=\frac{1}{2}$, $q=\frac{1}{2}$, слѣдов.,

$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

2. Да се изчисли сумата на безкрайната прогресия

$$\div\div \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{9}, \frac{4}{17}, \ldots .$$

Рѣшение.

Тукъ $a_1=\frac{1}{2}$, $q=-\frac{2}{4}$; слѣдов.,

$$S=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{3}{10}.$$

3. Периодичната дробь 0·363636 . . . на коя проста дробь е равна?

Периодичнитѣ дроби сж суми на безкрайно низходящи геометрични прогресии. Така,

$$0{\cdot}863636\ldots=\frac{36}{100}+\frac{36}{10000}+\ldots=\frac{36}{100}+\frac{36}{100.000}+\ldots,$$

$$0{\cdot}363636\ldots=\frac{\frac{36}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{36}{99}=\frac{4}{11}.$$

Понеже съ увеличението на n, $\frac{1}{b^n}$ се приближава къмъ 0 безспирно, то и $1-\frac{1}{b^\infty}$ се приближава безспирно къмъ 1; слѣдов., при $n=\infty$ и $S=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ се приближааа безспирно къмъ $\frac{a_1}{1-q}$. Но, както $\frac{1}{b^\infty}$ никога не достига до 0, тъй и $S=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ нѣма да достигне до $\frac{a_1}{1-q}$. Слѣдов., подъ $S=\frac{a_1}{1-q}$ трѣбва да се подразбира прѣдѣлно число, къмъ което се стреми $S=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, когато n безспирно се приближава къмъ ∞.

§ 53. Числа, съставени по извѣстенъ законъ и наредени, образуватъ редица. Числата, които съставляватъ редицата, сж нейни членове. Прогресиитѣ сж редици. Редици съ безкрайно много членове сж безкрайни редици. Сумата на безкрайнитѣ редици (както се види отъ § 52) не всѣки пжть е безкрайно голѣма. Редици, на които сумата е конечно число, се наричатъ конвергентни (сходящи), а тия, на които сумата се стрѣми къмъ безкрайно голѣмо число, — дивергентни (разходящи).

Вмѣстване (интерполация).

§ 54. ***Да се вмъстятъ** m **срѣдно-геометрични числа ме*** ***числата** a **и** b**, ще рече, да се състави геометрична прогреси*** $m+2$ ***члена, първиятъ членъ на която да е** a**, а послѣдниятъ***

Нека опрѣдѣлимъ показателя q на тая прогресия. Понеже $m+2^{\text{-ия}}$ членъ, то

$b=aq^{m+1}$, отдѣто $q=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$ и членоветѣ на прогресията сж:

$$a,\ a\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}, a\left(\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}\right)^2, \ldots, a\left(\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}\right)^m, b.$$

Примѣри.

1. Между 1 и 32 вмѣстй 4 срѣдно-геометрични числа!

Рѣшение.

$$q=\sqrt[5]{32}=2.$$

$$\div\div\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32.$$

2. Между 3 и 162 вмѣстй 3 срѣдно-геометрични числа!

Рѣшение.

$$q=\sqrt[4]{\frac{162}{2}}=3.$$

$$\div\div\ 2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162.$$

Слѣдствие. Ако между всѣки два съсѣдни члена на дадена гео рична прогресия вмѣстимъ по m срѣдно-геометрични числа, тѣзи числа и членоветѣ на прогресията ще съставятъ нова гео рична прогресия. Да опрѣдѣлимъ показателя q_1 на тази прогресия

Нека е дадена прогресията

$$\div\div\ a_1,\ a_2,\ a_3 \ldots a_{n-1},\ a_n.$$

Като вмѣстимъ между a_1 и a_2; a_2 и a_3; ... по m срѣдно-гео рични числа, ще получимъ, според прѣдидущето, прогреси показатели

$$\sqrt[m+1]{\frac{a_2}{a_1}},\ \sqrt[m+2]{\frac{a_3}{a_2}},\ \ldots,\ \sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_{n-1}}} \text{ и}$$

понеже $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\ldots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=q$, то тѣзи показатели сж равни

у си. Слѣдов., вмѣстенитѣ числа и членоветѣ на дадената про ия съставятъ нова прогресия съ показатель $q_1=\sqrt[m+1]{q}$.

Примѣри.

1. Между членоветѣ на прогресията

$$\div\div\ 3,\ 48,\ 768$$

тй по 3 срѣдно-геометрични числа!

Рѣшение.

Понеже $q_1=\sqrt[4]{16}=2$,

$$\div\div\ 3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96,\ 192,\ 384,\ 768.$$

2. Между членоветѣ на прогресията

$$\div\div\ 1,\ 8,\ 64,\ 512$$

тй по 2 срѣдно-геометрични числа!

Получаваме прогресията

$$\div\div\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ 512.$$

Отъ двѣ таблици, намѣрени сега наскоро, се вижда, че прогресиитѣ сж извѣстни на Вавилонянитѣ. Таблицитѣ, за които е думата, сж писани у 2300 и 1600 год. пр. Р. Хр. Извѣстни сж биле прогресиитѣ сжщо и на янитѣ, което се вижда отъ папируса на Rhind, написанъ отъ жреца s, 1000 г. пр. Хр. и, както изглежда, прѣписанъ отъ другъ по-старъ писъ (3400 г. пр Хр.). Древнитѣ гръцки математици сж биле добрѣ зати съ прогресиитѣ и съ сжщественитѣ имъ свойства.

Задачи и упражнения.

A. Аритметична прогресия.

1. Първитѣ два члена на една аритметична прогресия сж 1 и 7. е изчислятъ: a) слѣдващитѣ 6 члена, b) 20-ия членъ и c) сумата ървитѣ 20 члена.
2. Първиятъ членъ на една аритметична прогресия е 3 и раз- а 5; да се изчислятъ 25-я членъ и сумата на първитѣ 25 члена.
3. Да се намѣри сумата на всички цѣли числа отъ 1 до 50 и цо, отъ 1 до n, включително.
4. Напишете $n^{\text{то}}$ нечетно число и сумата на първитѣ n не- числа.
5. Напишете $n^{\text{то}}$ четно число (нулата не се чете) и сумата на итѣ n четни числа.
6. Дадени сж: $a_1=-5$, $d=3$, $a_n=100$; да се изчислятъ S и n.
7. $a_1=5$, $d=-2$, $s=-27$; $n=?$ $a_n=?$
8. $a_1=3\frac{1}{2}$, $a_n=-2$, $n=23$; $d=?$ $s=?$

9. Между числата 6 и 20 да се вмѣстятъ 15 числа така, че да се получи една аритметична прогресия. Да се напишатъ всичкитѣ членове на тая прогресия и да се изчисли сумата имъ.

10. Между всѣки два члена на прогресията: 1, 7, 13, 19.... да се вмѣстятъ 7 числа така, че да се получи пакъ аритметична прогресия. Да се изчисли 19-ия членъ и сумата на първитѣ 19 члена на получената прогресия.

11. $a_1=-8$, $n=19$, $s=190$; $d=?$ $a_{19}=?$
12. $a_1=8$, $a_n=-174$, $s=-2241$; $d=?$ $n=?$
13. $d=\frac{2}{3}$, $n=16$, $a_n=10\frac{3}{4}$; $a_1=?$ $s=?$
14. $d=\frac{1}{6}$, $n=13$, $s=-29\frac{1}{4}$; $a_1=?$ $a_n=?$
15. $d=5$, $a_n=19$, $s=861$; $a_1=?$ $n=?$
16. $n=12$, $a_n=0{\cdot}575$, $s=-1{\cdot}35$; $a_1=?$ $d=?$

Въ всѣка задача на долнята таблица три отъ величинитѣ a_1, d, n, a_n и S да се взематъ за дадени и да се изчислятъ другитѣ двѣ.

№	a_1	d	n	a^n	S
17.	—1	8	31	239	3689
18.	11	—4	40	—145	—2680
19.	0	$1\frac{1}{2}$	26	$37\frac{1}{2}$	$487\frac{1}{2}$
20.	$\frac{5}{7}$	$\frac{1}{12}$	17	$2^1/_{21}$	$23\frac{10}{21}$
21.	32	--5	46	—193	—3703
22.	$6\frac{7}{8}$	$\frac{2}{5}$	13	$11\frac{27}{40}$	$120\frac{23}{40}$
23.	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{8}$	7	$-^1/_{12}$	$2^1/_{24}$
24.	$-3\frac{7}{8}$	$\frac{1}{9}$	44	$\frac{65}{72}$	$-65^7/_{18}$
25.	—15	10	29	265	3625
26.	512	—17	34	- 49	7871
27.	7·9	0·45	29	20·5	411·8
28.	19·73	—2·16	36	—55·87	—650·52
29.	27·9	—3·72	16	—27·9	0
30.	—144·9	6·3	24	0	—1738·8
31.	740	—18	42	2	15582
32.	$81\frac{1}{2}$	$-7\frac{3}{4}$	15	—27	$408\frac{3}{4}$
33.	418	—21·4	22	—31·4	4252·6
34.	—7	—11	18	194	—1809
35.	$-2\frac{5}{8}$	$-1\frac{1}{6}$	9	$11\frac{23}{24}$	$-65\frac{5}{8}$
36.	—5·23	—3·7	14	—53·33	—409·92

37. Да се изчислятъ първия членъ и разликата на прогресията, ако сѫ дадени:

1) $a_5=16$ и $a_{21}=64$.
2) $a_9+a_{12}=67$ и $a_7+a_2=85$.
3) S_{10}*)$=230$ и $a_8+a_{13}=86$.
4) $a_{15}-a_8=-21$ и $a_3+a_9=-26$.
5) $a_7+a_{10}+a_{18}=2\frac{1}{2}$ и $S_{21}=21$.
6) $S_{15}-S_4=119\frac{5}{8}$, $S_{25}-2S_{10}=223\frac{5}{8}$.

38. $S=n$, $d=\frac{2}{9}$, $a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=4\frac{1}{3}$; $a_1=?$ $n=?$

39. Въ аритм. прогресия съ 10 члена сумата на всичкитѣ членове, дѣлена на третия членъ, дава частно 20 и остатъкъ 5. Цифритѣ на първитѣ два члена, които сѫ едноцифрени числа, написани една слѣдъ друга, даватъ число, равно на 6-ия членъ. Коя е тази прогресия?

40. $a_4 \cdot a_9=-9$, $a_{15}-a_6=-18$, $a_1=?$ $d=?$
41. $a_{10} \cdot a_{17}+a_{10}+a_{17}=1011$, $n=20$, $S=470$; $a_1=?$ $d=?$
42. $a^2_{18}-a^2_{14}=160$, $n=19$, $S=38$; $a_1=?$ $d=?$
43. $a^2_5+a_7=61$, $n=22$, $a_{18}+a_{19}+\ldots+a_{22}=62\frac{1}{2}$; $a_1=?$ $d=?$
44. $a_n=-73$, $a_{19}=-137$, $a_{n-1} \cdot a_n=22185$; $a_1=?$ $d=?$ $n=?$
45. $a_3+a_8=-14$, $a_{15}-a_{12}=-6$, $a^2_{n-1}+a^2_n=1684$; $a_1=?$ $d=?$ $n=?$
46. $d=-4$, $S=-117$, $a_4 \cdot a_{12}=-81$; $a_1=?$ $n=?$
47. $d=-\frac{1}{4}$, $n=4$, p*)$=19\frac{11}{16}$; $a_1=?$
48. $n=4$, $p=-15$, $a_3:a_2=3$; $a_1=?$ $d=?$
49. $n=4$, $S=10$, $p=-56$; $a_1=?$ $d=?$
50. $n=4$, $p=360$, $a_1^2-a_3^2=9$; $a_1=?$ $d=?$
51. $S=25$, $p=945$, $n=5$; $a_1=?$ $d=?$

52. Сумата на 4 числа, които образуватъ аритм. прогресия, е 30, а сумата на реципрочнитѣ имъ числа е $\frac{25}{36}$. Кои сѫ тия числа?

53. Числата на отдѣлнитѣ цифри на едно 4-цифрено число образуватъ аритм. прогресия. Ако раздѣлимъ числото на последнитѣ двѣ цифри съ числото на първитѣ двѣ цифри, ще получимъ частно 2 и остатъкъ 9. Сумата отъ квадратитѣ на числата на отдѣлнитѣ цифри е 164. Кое е това число?

54. Единъ чиновникъ ималъ първа годишна заплата 1800 лв., за всѣка слѣдваща година ималъ 75 лв. увеличение. Колко му е била заплатата прѣзъ 24-а му служебна година и колко лева е получилъ той въ продължение на тия 24 години?

55. За изкопаването на единъ кладенецъ се е заплатило 4 лв. за първия метъръ дълбочина, а за всѣки слѣдващъ метъръ се е плащало 0·12 лв. повече отколкото за прѣдидущия. Колко е било заплатено за послѣдния метъръ и колко за цѣлия кладенецъ, ако е билъ 39 м. дълбокъ?

56. Едно лице вложило въ банката 500 лв. по $4\frac{1}{2}\%$ проста лихва, като прибавяло къмъ тази сума въ края на всѣка година 150 лв. Колко лихва ще получи това лице за 10 години и колко само за 10-а година?

---

*) Съ S_n ще означаваме сумата на първитѣ n члена на прогресията.

*) Съ p ще означаваме произведението отъ всичкитѣ членове на дадена прогресия.

57. Нѣкой си получава прѣзъ първитѣ двѣ години на службата си 2400 лв. годишна заплата, а слѣдъ всѣки двѣ години му се увеличавала годишната заплата съ 300 лв. Слѣдъ колко години ще нарастне годишната му заплата до 4200 лв.?

58. Едно лице, което спестявало всѣка седмица 15 ст. повече отколкото въ прѣдидущата седмица, спестило въ продължение на една година 224·90 лв. Колко е спестилъ прѣзъ първата и колко прѣзъ послѣдната седмица (1 год. = 52 седм.)?

59. Едно лице почнало да получава рента и то така, че първата година получило 900 лв., а всѣка слѣдваща година 150 лв. повече. Той изразходвалъ прѣзъ първата година 850 лв, а всѣка слѣдваща година 155 лв повече. Прѣзъ коя година приходитѣ и разходитѣ на това лице сѫ били равни?

60. Между дванадесеть души трѣбва да се разпрѣдѣлятъ 318 лева така, че всѣко слѣдваще лице да получи 3 лв. повече, отколкото прѣдидущето. Колко ще получи първото лице?

61. Кое цѣло число е петата часть отъ сумата на всичкитѣ негови прѣдидущи цѣли числа?

62. Кое нечетно число е съ 1 по-голѣмо отъ петата часть на сумата отъ всичкитѣ негови прѣдидущи нечетни числа?

63. Единъ дългъ отъ 4650 лв. трѣбва да се изплати въ полугодишни срокове така, че на първия срокъ да се платятъ 250 лв., а на всѣки слѣдващъ срокъ 25 лв. повече, отколкото на прѣдидущия срокъ. Въ продължение на колко години ще се изплати цѣлия дългъ?

64. Двама куриери тръгватъ едноврѣмено единъ срѣщу другъ отъ селата A и B, разстоянието между които е $29\frac{3}{4}$ мили. Първиятъ изъ A е изминалъ прѣзъ първия день 2 мили, а всѣки слѣдващъ день $\frac{1}{4}$ м. повече, отколкото прѣзъ прѣдидущия день. Вториятъ изъ B е изминалъ въ първия день $1\frac{1}{2}$ м., а всѣки слѣдващъ день е усилвалъ хода си съ $\frac{1}{3}$ м. на день. Слѣдъ колко дни и на какво разстояние отъ A ще се срѣщнатъ двамата куриери?

65. Отъ едно и сѫщо мѣсто тръгватъ двама пѫтника по единъ пѫть, но вториятъ тръгва 3 дни по-късно отъ първия. Първиятъ изминалъ въ първия день 23 км., а въ всѣки слѣдващъ день усилвалъ хода си съ по 3 км. Слѣдъ колко дни отъ тръгването на втория ще се застигнатъ пѫтницитѣ и колко км. пѫть ще сѫ изминали?

66. Всички газове при загрѣване се разширяватъ, като увеличаватъ обема си съ $\frac{1}{273}$ отъ първоначалния си обемъ (при 0^0), когато се повиши температурата имъ съ 1^0C. Какъвъ обемъ ще има при 0^0 извѣстенъ газъ, ако сега при температура 21^0C има обемъ 16 литри?

67. Отъ физпката знаемъ, че всѣко свободно падаше (въ въздухопраздно пространство) тѣло изминава въ първата секунда 4·9 м., а въ всѣка слѣдваща секунда 9·8 м. повече отъ прѣдидущата. Колко метра пѫть ще измине подобно тѣло въ $15^а$ секунда и колко въ първитѣ 15 секунди?

68. За колко секунди едно тѣло на височина 313·6 м. ще падне на земята, като се спазватъ условията въ прѣдидущата задача?

69. Скоростьта на вертикално нагорѣ хвърлено тѣло намалява (съпротивлението на въздуха не се взима подъ внимание) всѣка секунда съ по 9·8 м. Ако първоначалната скорость на хвърленото тѣло е 78·4 м., слѣдъ колко секунди тѣлото ще почне да пада?

70. Колко сфери съдържа една трижгълна грамада, на която страната на най-долния пласть съдържа 18 сфери?

71. Колко сфери съдържа една прѣсѣчена трижгълна грамада, на която страната на най-долния пластъ съдържа 20 сфери, а оная на най-горния пластъ — 5 сфери?

72. Колко сфери съдържа една прѣсѣчена квадратна грамада, на която страната на най-долния пластъ съдържа 15, а оная на най-горния пластъ – 8 сфери?

73. Нѣкой си иска да нареди 5240 сфери въ една квадратна грамада и наредилъ въ всѣка страна на основния пластъ 25 сфери. По този начинъ, той не получилъ пълна грамада; колко пласта е наредилъ и колко сфери има въ страната на най-горния пластъ?

74. Колко сфери съдържа една правожгълна грамада, най-долниятъ пластъ на която съдържа въ едната си страна 6, а въ другата 10 сфери?

75. Една правожгълна грамада, горниятъ пластъ на която съдържа 4 сфери, се състои отъ 13 пласта. Колко сфери има въ долнитѣ 8 пласта?

76. Да се изчисли сумата отъ крадратитѣ на всичкитѣ цѣли числа: a) отъ 1 до 25 включително, b) отъ 15 до 22 включително.

Геометрична прогресия.

77. Първитѣ два члена на геом. прогресия сѫ $\frac{5}{81}$ и $\frac{5}{27}$. Дд се изчислятъ: a) слѣдващитѣ 4 члена, b) 13-ия членъ и c) сумата на първитѣ 13 члена.

78. Да се изчислятъ послѣдния членъ и сумата на геометрична прогресия, ако сѫ дадени:

1) $a_8 = 0·00729,\ q = 3\frac{1}{3},\ n = 7.$

2) $a_8 = 3,\ q = -2,\ n = 18.$

3) $a_8 = 473·25,\ q = 1·0325,\ n = 12.$

79. Какъвъ редъ образуватъ логаритмитѣ на членоветѣ на дадена геом. прогресия?

80. $a_1 = 1875,\ q = 0·4,\ a_n = 0·196608$ $n = ?$ $S = ?$

81. $a_1 = 265\frac{13}{27},\ q = \frac{3}{4},\ S = 955\frac{265}{432};\ a_n = ?\ n = ?$

82. $a_1 = 1·55,\ a_n = 1587·2,\ n = 11\ ;\ q = ?\ S = ?$

83. $a_1 = \frac{1}{4},\ n = 5,\ S = 7\frac{3}{4};\ q = ?$

84. $a_1=37500$, $a_n=1049\frac{19}{25}$, $S=92175\frac{9}{25}$; $q=?$ $n=?$

85. $q=-1{\cdot}5$, $n=10$, $a\ =-384\frac{112}{256}$; $a_1=?$ $S=?$

86. $q=3$, $n=10$, $S=206668$; $a_1=?$ $a_n=?$

87. $q=1\frac{1}{5}$, $a_n=22\frac{506}{625}$, $S=91\frac{91}{3750}$; $a_1=?$ $n=?$

88. $n=6$, $a_n=9$, $S=13\frac{13}{27}$; $q=?$ $a_1=?$

89. Между числата 13 и 28431 да се вмѣстятъ 6 числа, които заедно съ даденитѣ да образуватъ геом. прогресия. Да се напише тая прогресия.

90. Между x^{15} и y^{15} да се вмѣстятъ 5 члена така, че да се получи геом. прогресия. Коя е тая прогресия?

91. Между всѣки два члена на геом. прогресия: 1, 3, 9, 27... да се вмѣстятъ по 4 члена така, че да се получи пакъ геом. прогресия. Да се изчисли показателя на получената прогресия?

92. Да се изчисли сумата на безконечната геом. прогресия, ако сж дадени $a_1=12$ и $q=\frac{1}{3}$.

93. Да се изчислятъ сумитѣ на слѣднитѣ безконечнн геометрични прогресии:

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ . \ . \ . \ . \ .$

2) $1, \frac{2}{5}, \left(\frac{2}{5}\right)^2, \left(\frac{2}{5}\right)^3, \ . \ . \ . \ . \ .$

3) $8, \frac{4}{5}, \frac{2}{25}, \frac{1}{125}, \ . \ . \ . \ . \ .$

4) $\frac{9}{8}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ . \ . \ . \ . \ .$

5) $7, 2{\cdot}1, 0{\cdot}63, 0{\cdot}189, \ . \ . \ . \ . \ .$

6) $\frac{5}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{10}, -\frac{9}{50}, \ . \ . \ . \ . \ .$

7) $7, -\frac{7}{8}, \frac{7}{64}, -\frac{7}{512}, \ . \ . \ . \ . \ .$

94. Периодичнитѣ дроби: 0·(341), 0·(27), 5·(0792); 0·1(68) и 3·2(027) да се обърнатъ въ прости дроби.

95. Коя безконечна геометрична прогресия има: 1) $a_1=6$ и $S=7$, 2) $q=\frac{2}{5}$ и $S=5$?

Въ долната таблица кои да сж три отъ величинитѣ: a_1, q, n, a_1 и S да се зематъ за дадени и да се изчислятъ останалитѣ двѣ,

№	a_1	q	n	a_n	S
96.	1	7	8	823543	960800
97.	64	5	10	125000000	156249984
98	5000	$\frac{3}{5}$	9	83·9808	12374·0288
99.	100000	$-\frac{3}{5}$	8	—2799·36	61450·24
100.	266	1·5	11	0·75	$2\frac{17635}{78632}$
101.	19683	4	7	$\frac{4096}{5461}$	1
102.	$-\frac{1}{5461}$	$-1\frac{1}{2}$	9	$307\frac{35}{64}$	$189\frac{21}{64}$
103.	12	$\frac{4}{5}$	7	—0·24576	—3·70446
104.	$-\frac{15}{16}$	—2	12	22528	15015
105.	—11	$\frac{315}{319}$	21	19·4241	464·11
106.	25	1·2936	26	1291·76	5684·37
107.	1·071	$\frac{3}{14}$	∞	0	28
108.	22	$-\frac{2}{3}$	∞	0	$7\frac{4}{5}$
109.	13	$\frac{1}{2}$	∞	0	26

109. $a_1+1456=a_n$, $q=3, n=7$; $a_1=?$ a_n?

110. $a_4=135$, $a_7=3645$; $a_1=?$ $q=?$ S_{10} *) $=?$

Да се изчислятъ първия членъ и показателя на прогресията, ако сж дадени:

111. $a_{11}=5120$, $p_5=3200000$.

112. $a_4 . a_7=\frac{1}{3}$; $a_{12} : a_8=\frac{1}{81}$.

113. $a_5-a_6=\frac{80}{81}$, $a_9-a_{10}=\frac{1280}{6561}$.

---

*) Съ S_n ще означаваме сумата на първитѣ п членове.

114. $a_{15} = \frac{1}{512}$, $p_{10} = 32$.

115. $a_1 + a_8 = 4376$, $a_1 . a_8 = 8748$.

116. $a_4 + 24 = a_6$; $a_4 . a_6 = 256$.

117. $a_1 . a_2 . a_3 . a_4 = 729$, $a_2 + a_3 = 12$.

118. $a_1 + a_4 = 196$, $a_2 + a_3 = 84$.

119. $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 156$, $a_1^2 + a_4^2 - (a_2^2 + a_3^2) = 14976$.

120. Единъ баща задѣлилъ за новородената си дѫщеря една ст. въ отдѣлна каса; на втория ѝ рожденъ день той пусналъ 2 ст. въ сѫщата каса; на третия ѝ рожденъ день — 4 ст. и т. н. продължавалъ да отдѣля за дѫщеря си всѣка слѣдваща година на рождения ѝ день два пѫти повече пари, отколкото прѣзъ прѣдидущата година. Каква сума ще има дѫщерята на 25-а си годишна възрасть (сумитѣ не се олихвяватъ)?

121. Единъ картоиграчъ заложилъ въ първата игра 4 ст. и загубилъ; въ втората игра заложилъ 15 ст. и т. н., всѣки слѣдващъ пѫть залагалъ 3 пѫти повече пари и спечелилъ за пръвъ пѫть едва въ осмата игра. Колко е заложилъ той въ тая игра и каква сума изобщо е спечелилъ, ако касата е плащала на печелившия 4 пѫти по-голѣма сума отъ заложената?

122. Между 5 лица трѣбва да се раздѣли сумата 211 лв. така, че всѣко слѣдваще лице да получи $1^1/_2$ пѫти повече отъ прѣдидущето му лице. По колко лева ще получи всѣки?

123. Населението въ града А възлиза 37000 души и се увеличава годишно съ $2^0/_0$; колко население ще има този градъ слѣдъ 20 години?

124. Единъ новопостѫпившъ туристъ, за да се упражни въ ходение, рѣшилъ въ първия день да измине само 5 км. пѫть, а всѣки слѣдващъ день да изминава съ $^1/_5$ повече отъ пѫтя, изминатъ въ прѣдидущия день, до когато почне да изминава повече отъ 30 км. на день. Колко дни трѣбва да се упражнява? Колко км. пѫть ще измине въ послѣдния день и колко прѣзъ всичкитѣ дни на упражненията си?

125. Едно буре съдържа $30(a)$ литри спиртъ. Ако източимъ $2(b)$ л. спиртъ и налѣемъ вмѣсто него $2(b)$ л. вода, а слѣдъ като се размѣси добрѣ, да източимъ пакъ $2(b)$ л. спиртъ и го замѣстимъ съ вода и т. н., то колко литри чистъ спиртъ ще има въ бурето, слѣдъ като се повтори горната манипулация 15 пѫти?

126. Споредъ физиката срѣдната барометрична височина на нѣкое мѣсто намалява по геометрична прогресия, когато височината на мѣстото надъ морското равнище расте по аритметична прогресия. Отъ друга страна, опитътъ показва, че барометърътъ спада отъ 760 на 759 мм., ако се възкачимъ на 10·5 м. височина надъ морското равнище Каква е барометричната височина въ мѣсто, което се намира 550 м. надъ морското равнище?

127. Колко високо надъ морското равнище е мѣсто, въ което срѣдната барометрична височина възлиза на 750 мм.? (Гл. задача 126).

128. Споредъ астрономията, неподвижнитѣ звѣзди се разпрѣдѣлятъ по величина на класове, отъ които всѣки слѣдващъ класъ съдържа приблизително три пѫти повече звѣзди, отколкото прѣдидущия му класъ. Ако първиятъ класъ съдържа 19 звѣзди отъ първа величина, то колко звѣзди сѫ видими съ просто око, като се знае, че звѣздитѣ отъ шеста величина (шестий класъ) сѫ още видими съ просто око? Колко сѫ звѣздитѣ въ 15-ия класъ, които сѫ още видими съ най-голѣми телескопи и колко сѫ звѣздитѣ въ всичкитѣ 15 класове?

129. Ако съединимъ послѣдователно срѣдитѣ на странитѣ на даденъ паралелограмъ съ прави, ще получимъ новъ паралелограмъ. Ако направимъ сѫщото съ срѣдитѣ на получения новъ паралелограмъ и т. н. до безконечность, то какво е отношението между сумата отъ лицата на получаванитѣ по горния начинъ паралелограми и дадения паралелограмъ?

130. Дадена е окрѫжность съ радиусъ r и описани сѫ окрѫжности съотвѣтно съ радиуси: $\frac{r}{2}, \frac{r}{4}, \frac{r}{8}, \ldots$ и т. н. до безконечность, концентрични на дадената. Да се опрѣдѣлятъ сумитѣ отъ обиколкитѣ на тия окрѫжности.

131. Въ дадена окрѫжность съ радиусъ r е вписанъ квадратъ, въ който е вписана окрѫжность; въ тая окрѫжность е вписанъ квадратъ и т. н. Да се опрѣдѣли сумата отъ лицата на крѫговетѣ и оная отъ лицата на квадратитѣ.

ГЛАВА V.

Сложни лихви.

Опрѣдѣления.

§ 55. Ако лихвата се притуря къмъ капитала въ края на всѣка година, за да се олихвява и тя прѣзъ слѣдващата година, то казватъ, че лихвата е сложна, и че олихвваниятъ капиталъ е даденъ подъ сложна лихва.

Дадения подъ сложна лихва капиталъ ще означаваме съ K_0 и ще го наричаме първоначаленъ капиталъ или главница; размѣра му въ края на $n^{а}$ година ще означаваме съ K_n и ще го наричаме нарастналъ капиталъ. Процента ще бѣлѣжимъ съ p и годинитѣ съ n.

Основно равенство на сложната лихва.

§ 56. Нарастналиятъ капиталъ K_1 въ края на първата година е равенъ на първоначалния капиталъ, събранъ съ лихвата му за 1 година; сир.

Гл. 1ая — $1+\frac{p}{100}=q$

[illegible] 1 л. — $q+\frac{p.q}{100}=q(1+\frac{p}{100})=qq=q^2$

n-ая 1 — q^n

$K_n=K_0q^n$

$$K_1=K_0+\frac{pK_0}{100}=K_0(1+\frac{p}{100})=K_0q, \text{ дѣто } q=1+\frac{p}{100}.$$

Сѫщо:

$$K_2=K_1+\frac{pK_1}{100}=K_1(1+\frac{p}{100})=K_0q.q=K_0q^2,$$

$$K_3=K_2+\frac{pK_2}{100}=K_2(1+\frac{p}{100})=K_0q^2.q=K_0q^3;$$

и т. н.

Отъ тѣзи равенства заключаваме, че **нарастналиятъ капиталъ въ края на нѣкоя година е равенъ на първоначалния капиталъ умноженъ съ q, степенувано на числото на изтеклитѣ години.** Споредъ това.

$K_{10}=K_0q^{10}$; $K_{20}=K_0q^{20}$ и т. н.

Изобщо,

$$K_n=K_0q^n.$$

Множительтъ $q=1+\frac{p}{100}$ се нарича **лихвенъ показатель** и степенитѣ му за p отъ 2 до 9 и за n отъ 1 до 60 сѫ дадени въ таблицитѣ на Д-ръ Студничка на стр. 151—155.

Примѣри.

1. На каква сума ще нарастнатъ 40000 лева въ 12 години, ако сѫ дадени по 4·5% сложна лихва?

Рѣшение. Тукъ $K_{12}=40000$, $p=4·5$, $n=12$. Слѣдов.,

$$K_{12}=40000\left[1+\frac{4.5}{100}\right]^{12}=40000\ .\ 1·045^{12};$$

$logK_{12}=4·83146$, отдѣто $K_{12}=67835·7$.

2. На каква сума ще нарастнатъ за 5 години 500 лева, ако сѫ дадени по 5% сложна лихва?

Рѣшение. Тукъ $K_0=500$, $n=5$, $p=5$. Слѣдов,

$K_5=500.\ 1·05^5=500.1·2762816=638·1408=638·14$ лева.

Множительтъ $1·05^5=1·2762816$ е прѣписанъ отъ таблицитѣ (стр. 151).

Какво значение има K_n при $K_0=1$ и $n=1$?

§ 57. Отъ равенството

$$K_n=K_0q^n,$$

което съдържа 4-тѣ величини K_n, K_0, n, p може се опрѣдѣли всѣка отъ тѣзи величини, ако се знаятъ другитѣ три.

I. Опрѣдѣляне на първоначалния капиталъ.

$$K_0=\frac{K_n}{q^n}.$$

Примѣръ. Кой капиталъ, даденъ подъ сложна лихва по 5%, е нарастналъ въ 10 години на 12640 лева?

Рѣшение. Тукъ $K_{10}=12640$, $n=10$, $p=5$. Слѣдов.,

$$K_0=\frac{12640}{1·05^{10}};$$

$$logK_0=3·88986;$$

$$K_0=7760 \text{ лева.}$$

Сѫщата задача се рѣшава и съ помощьта на таблицитѣ (стр. 155—159), дѣто е дадена числената величина на $\frac{1}{q^n}=q^{-n}$ за n отъ 1 до 60 и за p отъ 2 до 9. Така,

$$K_0=\frac{K_n}{q^n}=K_n\,q^{-n}=12640.0·613913;$$

$$logK_0=3·88986;$$

$$K_0=7760 \text{ лева.}$$

Множительтъ q^{-1} се нарича **изравнитель** (дисконтенъ показатель).

II. Опрѣдѣляне числото на годинитѣ.

$$q^n=\frac{K_n}{K_0},$$

$$n=\frac{logK_n-logK_0}{logq}.$$

Примѣри.

1. Въ колко години капитальтъ 40000 лева, даденъ съ сложна лихва по 4·5%, нараства на 67835·7 лева?

Рѣшение. Тукъ $K_n=67835·7$, $K_0=40,000$, $p=4·5$. Слѣдов.,

$$n=\frac{log67835·7 - log40,000}{log1·045}=\frac{0·22940}{0·01912}=12 \text{ г. (по-точно: } 11·998 \text{ год.).}$$

Отъ равенството $q^n = \frac{K_n}{K_0}$ заключаваме, че при опрѣдѣлянето числото на тодинитѣ не е нужно да бждатъ дадени K_n и K_0; достатъчно е, да се знае само отношението $\frac{K_n}{K_0}$.

2. Въ колко години капиталътъ K_0, даденъ съ сложна лихва по $p^0/_0$, ще се увеличи r пжти?

Рѣшение. Ако това стане слѣдъ n години, то

$$K_n = K_0 q^n = rK_0. \text{ Слѣдов.; } K_0 q^n = rK_0, \text{ отдѣто}$$

$$q^n = r \text{ и } n = \frac{logr}{logq}.$$

Ако $r=2$ и $p=5^0/_0$, то $n = \frac{0{\cdot}30103}{0\ 02119} =$ прибл 14 год.

III. Опрѣдѣляне на процента.

За да опрѣдѣлимъ p, нуждно е да опрѣдѣлимъ по-напрѣдъ q;

$$q^n = \frac{K_n}{K_0}.$$

$$nlogq = logK_n - logK_0,$$

$$logq = \frac{logK_n - logK_0}{n}.$$

Примѣръ. При какъвъ процентъ капиталътъ 10,000 лева, даденъ подъ сложна лихва, ще нарасте въ 15 години на 20360 лева?

Рѣшение. Тукъ $K_0 = 10{,}000$, $K_{15} = 20360$, $n = 15$. Слѣдов.,

$$logq = \frac{log20360 - log\,10000}{15} = \frac{0\ 30878}{15} = 0{\cdot}02058;$$

$$q = 1{\cdot}049.$$

Слѣдъ това:

$$1 + \frac{p}{100} = 1{\cdot}049,$$

$$\frac{p}{100} = 0{\cdot}049,$$

$$p = 4{\cdot}9^0/_0.$$

§ 58. Ако лихвата се притуря къмъ капитала не въ края на всѣка година, а въ края на нѣкаква си постоянна часть отъ годината, напр., слѣдъ всѣки 6 мѣсеци (2 годишни части), 4 мѣсеци (3 годишни части), 3 мѣсеци (4 годишни части) и т. н., то въ

равенството $K_n = K_0 \left|1 + \frac{p}{100}\right|^n$ трѣбва да замѣстилъ n съ произведението на n и числото на годишнитѣ части, а p — съ p, дѣлено съ числото на тия части. Така, ако лихвата се притуря слѣдъ всѣки 6, 4, 3, 1 мѣсеци, ще имаме, съответно:

$$K_{2n} = K_0 \left|1 + \frac{p:2}{100}\right|^{2n}; \quad K_{3n} = K_0 \left|1 + \frac{p:3}{100}\right|^{3n}; \quad K_{4n} = K_0 \left|1 + \frac{p:4}{100}\right|^{4n};$$

$$K_{12n} = \left|1 + \frac{p:12}{100}\right|^{12n}.$$

Примѣръ. Въ каква сума ще нарастне капиталътъ 4000 лева въ 15 години, ако е даденъ съ сложна лихва по $4^0/_0$ и ако лихвата се капитализира всѣки 6 мѣсеци?

Рѣшение.

$$K_{30} = 4000 \left(1 + \frac{4:2}{100}\right)^{2.15} = 4000.1{\cdot}02^{30} = 7245{\cdot}50 \text{ лева.}$$

§ 59. Равенството

$$K_n = K_0 q^n$$

е намѣрено при условие: n да е цѣло число. Ако n е смѣсено число, напр. $n = m + \frac{f}{g}$, дѣто m е цѣло число години и $\frac{f}{g}$ — нѣкаква си часть отъ годината, изчисляваме най-напрѣдъ K_m и слѣдъ това намираме простата лихва на K_m за слѣдващата $\frac{f}{g}$ часть отъ годината, която притуряме къмъ K_m.

$$K_n = K_0 q^m + \frac{(K_0 q^m) p. \frac{f}{g}}{100} = K_0 q^m \left(1 + \frac{pf}{100g}\right) = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^m \left(1 + \frac{pf}{100g}\right).$$

Опрѣдѣлянето на K_n и K_0 отъ послѣдното равенство не прѣдставлява затруднения. Опрѣдѣлянето на p, като ни привожда къмъ уравнение отъ n+1 степень, излиза отъ кржга на елементарната алгебра. Опрѣдѣлянето на врѣмето, макаръ въ тоя случай да имаме работа съ двѣ неизвѣстни, е възможно. Така,

$$logK_n = logK_0 + m log\left(1 + \frac{p}{100}\right) + log\left(1 + \frac{pf}{10.g}\right);$$

$$m = \frac{logK_n - logK_0}{log\left(1 + \frac{p}{100}\right)} - \frac{log\left(1 + \frac{pf}{100g}\right)}{log\left(1 + \frac{p}{100}\right)} \text{ и, ако } \frac{logK_n - logK_0}{log\left(1 + \frac{p}{100}\right)} = Q + \frac{R}{log\left(1 + \frac{p}{100}\right)},$$

то

$$m = Q + \frac{R}{log\left(1 + \frac{p}{100}\right)} - \frac{log\left(1 + \frac{pf}{100g}\right)}{log\left(1 + \frac{p}{100}\right)}.$$

Понеже m и Q, по прѣдположение, сж цѣли числа, а

$$\frac{R}{\log\left(1+\frac{p}{100}\right)} \text{ и } \frac{\log\left(1+\frac{pf}{100g}\right)}{\log\left(1+\frac{p}{100}\right)} \text{ сж дробни } \left(1+\frac{pf}{100g}<1+\frac{p}{100}\right),$$

то послѣдното равенство е възможно само при

$$m=Q \text{ и } \frac{R}{\log\left(1+\frac{p}{100}\right)}=\frac{\log\left(1+\frac{pf}{100g}\right)}{\log\left(1+\frac{p}{100}\right)}, \text{ отдѣто } R=\log\left(1+\frac{pf}{100g}\right).$$

Слѣдов., цѣлата часть на частното $\frac{\log K_n - \log K_0}{\log\left(1+\frac{p}{100}\right)}$ ни дава числото на пълнитѣ години, а остатъкътъ — логаритма на $1+\frac{pf}{100g}$, отдѣто лесно намираме $\frac{f}{g}$.

Примѣръ. Въ колко години и дни ще се утрои капиталъ, който е даденъ съ сложна лихва по $4{\cdot}5\%$?

Рѣшение.

$n=\frac{\log r}{\log q}$ (§ 57, II. 2). Слѣдов., $n=\frac{\log 3}{\log 1{\cdot}045}=\frac{0{\cdot}47712}{0{\cdot}01912}=$

$=24+$ост. $0{\cdot}01824$;

$\log\left(1+\frac{pf}{100g}\right)=0{\cdot}01824$;

$1+\frac{pf}{100g}=1{\cdot}0429$;

$\frac{pf}{100g}=0{\cdot}0429$;

$\frac{f}{g}=0{\cdot}858$.

Слѣдъ това, ако f означава дни, то $g=360$ дни и
$f=0{\cdot}858\times360=308{\cdot}8$ дни и
$n=24$ год. и 308 дни.

Ако f означава мѣсеци, то $g=12$ м. и
$f=0{\cdot}858\times12=10{\cdot}296$ мѣсеци и
$n=24$ год., 10 мѣсеци и 8 дни.

§ 60. Слѣдъ опрѣдѣлянето на пълното число години, дробната часть може да се намѣри още, като замѣнимъ въ равенството

$$K_n=K_0q^m\left(1+\frac{pf}{100g}\right)$$

m съ цѣлото число години отъ врѣмето и търсимъ $\frac{f}{g}$. Така намираме

$$\log\left(1+\frac{pt}{100g}\right)=\log K_n-\log K_0-m\log q, \text{ отдѣто}$$

$\frac{f}{g}=a$ мѣсеци, ако f означава мѣсеци $(g=12)$ и

$\frac{f}{g}=b$ дни, ако f означава дни $(g=360)$.

Забѣл. Почти сжщиятъ резултатъ получаваме, ако работимъ само съ равенството $K_n=K_0q^n$, стига да считаме n за дробно число.

Срочни влогове.

§ 61. Ако въ края на всѣка година внасяме по a лева въ нѣкое банково учреждение, което плаща $p\%$ сложна лихва, то за n години ще се набере извѣстенъ капиталъ. Нека опрѣдѣлимъ величаната на тоя капиталъ.

Понеже първата вноска се олихвява $n-1$ год., втората $n-2$ год., третата $n-3$ год. и т. н., прѣдпослѣднята — 1 година и най-послѣдната — никакъ, то

$$\begin{aligned} K_n &=aq^{n-1}+aq^{n-2}+aq^{n-3}+\;.\;.\;.\;.\;+aq^2+aq+a \\ &=a(1+q+q^2+\;.\;.\;.\;.\;+q^{n-2}+q^{n-1}) \\ &=a\frac{q^n-1}{q-1}.\;.\;.\;.\;.\;(I). \end{aligned}$$

Примѣръ. Какъвъ капиталъ ще имаме слѣдъ 10 години, ако въ края на всѣка година внасяме за олихвяване съ 5% сложна лихва по 120 лева?

Рѣшение. Тукъ $a=120$, $p=5$ и $n=10$. Слѣдов.,

$$K_{10}=120.\frac{1{\cdot}05^{10}-1}{1{\cdot}05-1}=120.\frac{1{\cdot}05^{10}-1}{0{\cdot}05}.$$

Изчисляването се започва съ $1{\cdot}05^{10}=y$.

$$\log y=10\log 1{\cdot}05=0{\cdot}21190;$$
$$y=1{\cdot}6289.$$

Замѣстяме и логаритмуваме:

$$K_{10}=120.\frac{0{\cdot}6289}{0{\cdot}05};$$
$$\log K_{10}=3{\cdot}17879;$$
$$K_{10}=1509{\cdot}3.$$

§ 62. Ако внасянето на сумата a става не въ края на всѣка година, а въ началото, то слѣдъ n години ще имаме:

$$\begin{aligned} K_n &= aq^n + aq^{n-1} + aq^{n-2} + \;.\;.\; + aq^2 + aq \\ &= aq(1 + q + q^2 + \;.\;.\;.\;.\; + q^{n-1}) \\ &= aq\frac{q^n - 1}{q-1} \;.\;.\;.\;.\; \text{(II).} \end{aligned}$$

Равенството II (или I) съдържа величинитѣ: K_n, a, p и n. Като знаемъ три отъ тия величини, можемъ опрѣдѣли останалата. Опрѣдѣлянето на p ни привожда къмъ уравнение отъ степенъ по-висока отъ втора и за това е мѫчно рѣшимо. На равенството (II) даватъ още вида: $K_n = aQ_n$, дѣто $Q_n = q\frac{q^n - 1}{q-1}$. За числената величина на Q_n, който се нарича спеститель, има особни таблици (стр. 159—164); тѣ сѫ изчислени за p отъ 2 до 9 и за n отъ 1 до 60.

§ 63. Величината на капитала, m години слѣдъ послѣдната (n^a) вноска, се опрѣдѣля отъ равенствата:

$$K_{n+m} = K_n\, q^m = \frac{aq\,(q^n - 1)}{q-1} .\, q^m \text{ и}$$

$$K_{n+m} = K_n\, q^m = \frac{q^n - 1}{q-1} .\, q^m.$$

§ 64. Ако освѣнъ ежегоднитѣ вноски има и първоначаленъ капиталъ K_0, то капиталътъ слѣдъ n години се опрѣдѣля отъ равенствата

$$K_n = K_0 q^n + a\frac{q^n - 1}{q-1} \text{ и}$$

$$K_n = K_0 q_n + aq\frac{q^n - 1}{q-1},$$

защото K_0 за n години нараства въ $K_0 q^n$, а пъкъ внасяната ежегодно сума отъ a лева въ сѫщото врѣме ще образува капиталитѣ $a\frac{q^n - 1}{q - 1}$ и $aq\frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Примѣръ. Даденъ е капиталътъ 1500 лева съ сложна лихва по 5% и въ края на всѣка година се притурятъ къмъ него по 200 лева. На каква сума ще нарастне капиталътъ за 8 години?

Рѣшение. Тукъ $K_0 = 1500$, $p = 5$, $n = 8$, $a = 200$. Слѣдов.,

$$K_{10} = 1500 \;.\; 1{\cdot}05^8 + 200 \;.\; \frac{1{\cdot}05^8 - 1}{1\;05 - 1}.$$

Намираме най-напрѣдъ $y = 1{\cdot}05^8 = 1{\cdot}5471$,
слѣдъ което

$$K_{10} = \underbrace{1500 \;.\; 1{\cdot}05^8}_{z} + \underbrace{200 \;.\; \frac{0{\cdot}5471}{0{\cdot}05}}_{t}.$$

Изчисляваме по отдѣлно събираемитѣ и ги събираме.

$$log z = 3{\cdot}36561\;; \qquad log t = 2{\cdot}34013\;;$$
$$z = 2320{\cdot}6. \qquad t = 2188{\cdot}4.$$
$$K_{10} = 2320{\cdot}6 + 2188{\cdot}4 = 4509.$$

Срочни изплащания.

§ 65. Ако отъ капитала K_0, даденъ съ сложна лихва по $p^0/_0$, се взиматъ въ края на всѣка година, въ продължение на n години, по a лева, то въ края на n^{ma} година ще остане

$$D_n = K_0 q^n - a\frac{q^n - 1}{q-1},$$

защото K_0 за n години нараства въ $K_0 q^n$, а пъкъ взиманитѣ ежегодно суми биха образували капиталъ $= a\frac{q^n - 1}{q-1}$.

Примѣръ. Капиталътъ 1500 лева е даденъ съ сложна лихва по $5^0/_0$ и въ края на всѣка година се взиматъ отъ него и лихвитѣ му по 200 лева. Каква сума ще остане слѣдъ 8 години?

Рѣшение.

$$D_n = K_0 q^n - a\frac{q^n - 1}{q-1},$$

$$D_8 = 1500.1{\cdot}05^8 - 200\frac{1{\cdot}05^8 - 1}{1{\cdot}05 - 1},$$

$$D_8 = 2320{\cdot}6 - 2188{\cdot}4 = 132{\cdot}2 \text{ лева.}$$

§ 66. Ако сумата a се взима въ началото на всѣка година, то

$$D_n = K_0 q^n - aq\frac{q^n - 1}{q-1}.$$

I. **Рента**.

§ 67. При $D_n = 0$, сумата a, която се взима въ началото, или въ края на годината, се нарича рента. Слѣдов., рентата е годишенъ доходъ, който анулира внесения наведнажъ капиталъ K_0 съ лихвитѣ му за n години. При задачитѣ за рентата се търси K_0, сир. сумата, която трѣбва да се внесе въ нѣкое банково учреждение, за да се добие право върху рентата a.

Отъ равенствата:

$$o = K_0 q^n - a\frac{q^n - 1}{q-1} \text{ и } o = K_0 q^n - aq\frac{q^n - 1}{q-1} \text{ намираме:}$$

$$\begin{array}{l|l} K_0q^n=a\dfrac{q^n-1}{q-1}, & K_0q^n=aq\dfrac{q^n-1}{q-1}, \\[2ex] K_0=a\dfrac{q^n-1}{q^n(q-1)}=a.R_n & K_0=\dfrac{aq(q^n-1)}{q^n(q-1)}. \end{array}$$

Множительтъ R_n, който при $a=1$ е равенъ на K_0 сир., е капиталъ, който носи рента $=1$ се нарича рентенъ коефициентъ; числената му величина за p отъ 2 до 9 и за n отъ 1 до 60 е дадена въ особни таблици (167—171 стр.).

Примѣръ. Нѣкой си иска да се ползува 10 години наредъ въ края на всѣка година съ рента отъ 1000 лева; каква е сумата, която трѣбва да брои той срѣщу тази рента, като се смѣта лихва по $5^0/_0$?

Рѣшение.

1) $K_0=1000.\dfrac{1{\cdot}05^{10}-1}{1{\cdot}05^{10}(1{\cdot}05-1)},$

$K_0=1000.\dfrac{0{\cdot}6289}{1{\cdot}05^{10}.0{\cdot}05};$

$log K_0=3{\cdot}88761;$

$K_0=7723{\cdot}30.$

2) $K_0=a.R_n=1000.7{\cdot}721735=7721{\cdot}735.$

§ 68. Рентата, която започва да се получава m години слѣдъ внасянето на сумата K_0, се опрѣдѣля отъ равенството :

$$\begin{array}{l|l} 0=K_0q^{n+m}-a\dfrac{q^n-1}{q-1} & 0=K_0q^{n+m}-aq\dfrac{q^n-1}{q-1} \\ \text{отдѣто} & \text{отдѣто} \\ K_0=\dfrac{a(q^n-1)}{q^{n+m}(q-1)}. & K_0=\dfrac{a(q^n-1)}{q^{n+m-1}(q-1)}. \end{array}$$

§ 69. Рентата бива: врѣменна, вѣчна и пожизнена. Намѣреното по-горѣ равенство е за първия видъ рента. Вѣчната рента, сир. тази, която може да се продължи на вѣчни врѣмена, е равна на годишната лихва на вложения капиталъ. Това слѣдва отъ равенството :

$$K_0=a\frac{q^n-1}{q^n(q-1)}=a\frac{1-\frac{1}{q^n}}{q-1},$$

което при $n=\infty$ се обръща въ $K_0=\dfrac{a}{q-1}$, отдѣто

$$a=K_0q-K_0=l.$$

Пожизнената рента трае, докогато е живъ притежательтъ й ; тя е свързана съ вѣроятния животъ на човѣка и затова ще я земемъ при вѣроятноститѣ.

II. Амортизация.

§ 70. При заемитѣ, които сѫ сключени съ условие, да бѫдатъ погасени (амортизирани) въ продължение на n години, като се внася въ края на всѣка година по a лева, се търси сумата a; тази сума се опрѣдѣля отъ равенството:

$$0=K_0q^n-a\frac{q^n-1}{q-1}, \text{ отдѣто}$$

$$a=\frac{K_0q^n(q-1)}{q^n-1}=K_0.\frac{1}{R_n}=K_0U_n.$$

Множительтъ Un, който при $k=1$, е равенъ на a, сир., е сума, която погасява дългъ $=1$, се нарича амортизаторъ; числената му величина за p отъ 2 до 9 и за n отъ 1 до 60 е дадена въ таблици (стр. 171—174)

Примѣръ. Сключенъ е заемъ отъ 10 хиляди лева по $5^0/_0$, съ условие да бѫде изплатенъ за 12 години, като се внася въ края на всѣка година по една и сѫща сума a. Да се опрѣдѣли тая сума.

Рѣшение.

$$\begin{array}{l|l} 1)\ a=\dfrac{10000.1{\cdot}05^{12}(1{\cdot}05-1)}{1{\cdot}05^{12}-1}; & 2)\ a=K_0U_n, \\[2ex] a=\dfrac{10000.1{\cdot}05^{12}0{\cdot}05}{0{\cdot}7959} & a=10000.0{\cdot}112825 \\ log\, a=3{\cdot}05241; & =1128.25 \text{ лв.} \\ a=1128{\cdot}25 \text{ лв.} & \end{array}$$

§ 71. Ако въ равенството

$$a=\frac{K_0q^n(q-1)}{q^n-1}$$

замѣнимъ K_0 съ 100, ще намѣримъ сумата a, която погасява дългъ отъ 100 лева. Въ тоя случай a е сборъ отъ процента p на заема и процента u на погашението, сир.

$$a=p+u,$$

отдѣто $u=a-p=\dfrac{K_0q^n(q-1)}{q^n-1}-p=\dfrac{p}{q^n-1}.$

Отъ послѣдното равенство се опрѣдѣля n, сир. числото на годинитѣ, нуждни за погасяването на извѣстенъ дългъ:

$$n=\frac{log(u+p)-log u}{log q}.$$

Въ таблицитѣ отъ 175—176 стр. е дадена числената величина на u за n отъ 1—50 и $p=2\frac{1}{2}$, 3, 4, 5, а въ таблицитѣ 177—178 и числената величина на n за $u=0{\cdot}1$, $0{\cdot}2$.., 6; $p=2\frac{1}{2}$, $3.3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5.

Задачи и упражнения.

1. На каква сума ще нарастне капиталътъ 2000 лв. по 5% въ продължение на 10 години?

2. На каква сума ще нарастнатъ 4780 лв. по 4% въ 30 години?

3. На каква сума ще нарастнатъ 1054 лв. по 4½% въ 15 години?

4. Дървениятъ материялъ на една гора, ако се изсѣче сега, ще струва 5000 лв., а ако се изсѣче слѣдъ 29 години, ще струва 8000 лв. Кога е за прѣдпочитане да се изсѣче гората, ако ежегодното увеличение на дървения материялъ, както и олихвяването на сумата 5000 лв., е 3%?

5. Единъ градъ има 5400 жители, числото на които ежегодно се намалява съ ½%, колко жители ще има сдѣдъ 15 години?

6. На каква сума ще нарастне капиталътъ 8937 лв. по 3% (годишно) въ 7 години, ако лихвитѣ се прибавятъ къмъ капитала всѣки 6 мѣсеци?

7. На каква сума ще нарастнатъ 7183 лв. по 3¼% (годишно) въ 5½ години, ако лихвитѣ се притурятъ къмъ капитала всѣки 6 мѣсеци?

8. На каква сума ще нарастнатъ 8300 лв. по 4·6% (годишно) въ 9½ години, ако лихвитѣ се прибавятъ къмъ капитала всѣки 3 мѣсеци?

9. На каква сума ще нарастнатъ 5000 лв. по 6% (годишно) въ 5 години, ако лихвитѣ се прибавятъ къмъ капитала: 1) всѣка година, 2) всѣка половина година, 3) всѣки 4 мѣсеци, 4) всѣки 3 мѣсеци и 5) всѣки мѣсецъ?

10. Извѣстенъ капиталъ, даденъ по 5% съ лихва, е нарастналъ въ 11 години на сума 15000 лв. Колко е билъ първоначалниятъ капиталъ?

11. Кой капигалъ въ 20 години по 3¾% ще нарастне на 45600 лв.?

12. Кой капиталъ въ 17½ години по 4% (годишно) ще нарастне на 1000 лв., ако лихвигѣ се прибавятъ къмъ капитала всѣки 6 мѣсеци?

13. Каква стойность има сега единъ капиталъ, който въ 5 години по 4½% нараства на сума 30500 лв.?

14. Нѣкой трѣбвало слѣдъ извѣстно врѣме да изплати сумата 12000 лв., но той се улеснилъ двѣ години прѣди срока и искалъ да се наплати. Каква сума трѣбва да плати, като се смѣта 3½% (годишно), ако лихвитѣ се прибавятъ къмъ капитала 1) всѣка година и 2) всѣки 6 мѣсеци?

15. Каква отстжпка би очаквало извѣстно лице, ако изплати дълга си отъ 100 лв. 10 години прѣди срока, като се смѣта по 5% лихва?

16. За единъ чифликъ *A* прѣдлага 220000 лв. въ брой, *B* — 310000 лв., платими слѣдъ 4 години (безъ лихва), *C* — 308000 лв., платими половината слѣдъ 3, а втората половина слѣдъ 6 години (безъ лихва). Кой отъ тримата купувачи прѣдлага най-голѣма цѣна, ако се смѣта по 5% лихва и колко лева повече отъ другитѣ двама?

17. Въ единъ градъ се пада годишно, срѣдно на 40 души, единъ случай на раждане, а на 60 души — единъ смъртенъ случай; въ 22 години населението се е увеличило съ 3000 души; колко население е ималъ първоначално тоя градъ, ако въ течение на това врѣме никакво изселвание не е станало?

18. Нѣкой иска да внесе въ банката такъвъ капиталъ, че да може слѣдъ 20 години да посрѣща нуждитѣ си, за които му трѣбвало 1800 лв. годишно, само отъ лихвитѣ му. Въ тия 20 години лихвата е била условена по 4%, а слѣдъ това врѣме по 5% годишно. Каква сума трѣбва да внесе той сега?

19. Едно лице внесло извѣстенъ капиталъ въ банката по 3½%; слѣдъ 7 години внесло капиталъ, равенъ на първия, а слѣдъ още 6 години, при ликвидация на смѣтката си, получило всичко 3965·95 лв. Колко голѣмъ е първиятъ капиталъ?

20. Единъ капиталъ, като стоялъ подъ лихва най-напрѣдъ 8 години по 3½% и слѣдъ това 6 години по 4%, е нарастналъ на сума 4665·35 лв. Колко голѣмъ е билъ първоначално капиталътъ?

21. Кой капиталъ въ 15 години по 3½% нараства на сжщата сума, на каквато нараства капиталътъ 7600 лв. въ 11 години по 4%?

22. Разликата между два капитала сега е 1000 лв. По-голѣмиятъ капиталъ е даденъ по 4%, а по-малкиятъ по 4½% подъ лихва. Слѣдъ 20 години първиятъ капиталъ ще бжде два пжти повече отъ втория. Какви сж биле първоначално капиталитѣ?

23. Сумата на два кнпитала е 11000. Единътъ каиталъ е даденъ подъ лихва по 3½% и се олихвява годишно, а вториятъ капиталъ — по 4% (годишно) и се олихвява всѣки 6 мѣсеци. Слѣдъ 16 години двата капитала ще възлизатъ на обща сума 19976·76 лв. Колко голѣмъ е всѣки отъ капиталитѣ?

24. По колко процента трѣбва да дадемъ 650 лв., за да имаме 960·35 лв. въ 8 години?

25. По колко процента трѣбва да се дадатъ 1800 лв., за да нарастнатъ въ 5 години на 2250 лв., ако лихвитѣ се прибавятъ къмъ капитала: 1) годишно, 2) всѣки 6 мѣсеци, 3) всѣки 4 мѣсеци, 4) всѣки 3 мѣсеци, 5) всѣки 2 мѣсеци и 6) ежемѣсечно?

26. Една полица за 3750 лв., съ падежъ 15-й юний 1910 г., е изплатена на 1-й августъ 1908 год. съ 403 лв. отстжпъ. Какъвъ годишенъ процентъ е смѣтано?

27. Единъ търговецъ заелъ на свой познатъ 550 лв., срѣщу полица за 900 лв., платима слѣдъ 4 години. Какъвъ процентъ е смѣтано?

28. По колко процента трѣбва да се даде извѣстенъ капиталъ за да може въ 24 години да се утрои, ако лихвитѣ се прибавятъ къмъ капитала 1) годишно и 2) полугодишно?

29. Едно лице дало подъ лихва 930 лв. по 3½%, а второ лице — 720 лв. Слѣдъ 18 години двамата имали равни суми. По колко процента е билъ даденъ вториятъ капиталъ?

30. Населението на единъ градъ е възлизало въ 1890 год. на 34188 души, въ 1895 год. на 36982 души, въ 1910 год. на 39356

души и въ 1905 год на 44398 души. Съ какъвъ процентъ се е увеличавало населението прѣзъ горнитѣ интервали отъ 4 години? Съ какъвъ процентъ срѣдно се е увеличавало населението прѣзъ 15-тѣхъ години?

31. Въ колко години 5000 лв. ще нарастнатъ на 20115·50 лв., ако се смѣта лихвата по $5\frac{1}{2}\%$ и, ако лихвитѣ се прибавятъ къмъ капитала: 1) годишно, 2 полугодишно и 3) всѣки 2 мѣсеци?

32. Нѣкой изплатилъ полица за 3725 лв. съ 3283·15 лв. въ брой: ако е смѣтано по $4\cdot3\%$ лихва, слѣдъ колко врѣме е щѣлъ да настжпи падежътъ на тая полица?

33. Въ колко години ще се удвои извѣстенъ капиталъ, даденъ 1) по 4%, 2) по 5%?*)

34. Въ колко години извѣстенъ капиталъ ще се увеличи 5 пжти, ако е даденъ по 6% (годишно) и ако лихвитѣ се прибавятъ къмъ капитала всѣки 6 мѣсеци?

35. Колко врѣме прѣди срока е изплатенъ дългъ отъ 480 лв., ако е направенъ 38·35 лв. отстжпъ, като е смѣтано по $4\frac{1}{4}\%$ лихва?

36. Слѣдъ колко години 5402·25 лв. по $3\cdot7\%$, ще нарастнатъ на такава сума, на каквато нарастватъ 4367 лв. по $5\frac{3}{4}\%$ за 9 години?

37. Едно лице вложило 4207·73 лв. по $5\frac{1}{2}\%$, а друго лице — 4320 лв. по 3%. Слѣдъ колко години първото лице ще има два пжти по голѣмъ капиталъ отъ второто?

38. Единъ благодѣтель завѣщалъ на тѣхната община 22000 лв., съ услоаие да стои тази сума подъ лихва толкова врѣме, че годишната ѝ лихва да е достатъчна за 4 стипендии отъ 900 лв. годишно. Колко години сж нуждни за цѣльта, ако се смѣта лихвата по 4%?

39. Единъ капиталъ отъ 30000 лв. е билъ подъ лихва всичко 15 години, най-напрѣдъ по 5%, а послѣ по 4% и нарастналъ прѣзъ това врѣме на 58326·92 лв. Колко врѣме капиталътъ е дѣйствувалъ по 5% и колко по 4%?

40. Нѣкой трѣбва да изплати дългъ отъ 16000 лв. на три срока, именно, 4000 лева слѣдъ 3 години, 7000 лв. слѣдъ 5 години и 5000 лв. слѣдъ 8 години. Кога може той да изплати цѣлия си дългъ съ 10000 лв., като се смѣта лихва по $4\frac{1}{2}\%$?

41. Къмъ сумата 7849 лв., дадена подъ лихва по 4%, се прибавя въ началото на всѣка година по 429·90 лв. На какъвъ капиталъ ще нарастне тая сума въ 20 години?

42. Каква сума ще остане отъ капитала 12700 лв., даденъ по $3\frac{1}{2}\%$ подъ лихва, слѣдъ 8 години, ако въ началото на всѣка година се взиматъ по 764·80 лв.?

43. За изплащането на дългъ отъ 15000 лева се внасятъ въ края на всѣка година по 1402 лв. за лихва и амортизация. На каква сума ще възлиза този дългъ слѣдъ 16 години, ако се смѣта лихва по $1\frac{1}{5}\%$?

---

*) Ако се раздѣли числото 70 съ годишния процентъ, получава се приблизително числото на годинитѣ.

44. Населението на единъ градъ съ 13000 жители се увеличава срѣдно, годишно, съ $1\frac{3}{6}\%$. Колко ще бжде населението слѣдъ 25 години, ако се изселватъ годишно по 180 души?

45. Нѣкой оставя на шестьтѣ си дѣца наслѣдство отъ 60000 лв., дадени подъ лихва по $4\frac{1}{2}\%$. Всѣки 3 мѣсеци се в119матъ по 700 лева, нуждни за възпитанието на дѣцата. Слѣдъ 9 години трѣбва да се раздѣли останалото наслѣдство по равно между дѣцата. Колко ще получи всѣко дѣте, ако лихвитѣ се прибавятъ къмъ капитала сжщо всѣки 3 мѣсеци?

46. Капиталътъ 6000 лв. е даденъ по 6% лихва, съ условие лихвитѣ да се прибавятъ къмъ капитала всѣки 6 мѣсеци; освѣнъ това, въ края на всѣки двѣ години се прибавятъ къмъ капитала 1500 лв. На каква сума ще нарастне този капиталъ слѣдъ 1) 10 год., 2) 11 г.?

47. Даденъ е подъ лихва капиталътъ 8750 лв. по $4\frac{1}{2}\%$ и лихвитѣ се прибавятъ къмъ капитала всѣки 6 мѣсеци. Освѣнъ това всѣки 3 мѣсеци се прибавятъ къмъ капитала 750 лв. На каква сума ще нарастне този капиталъ слѣдъ 7 години?

48. Нѣкой далъ капитала си подъ лихва по 4% съ условие лихвитѣ да се прибавятъ къмъ капитала всѣки 6 мѣсеци. Като взималъ всѣки 6 мѣсеци 2500 лв, въ 18 години той е унищожилъ всичкия си капиталъ съ лихвитѣ му. Колко е билъ първоначалниятъ капиталъ

49. Отъ извѣстенъ капиталъ, даденъ съ лихва по $4\frac{1}{2}\%$, ако и да се е взимало въ края на всѣка година по 420 лв., все пакъ слѣдъ 18 години той се е удвоилъ. Колко голѣмъ е билъ този капиталъ?

50. Нѣкой далъ 6400 лв. подъ лихва по $4\cdot7\%$. По колко лева трѣбва да прибавя на края на всѣка година, за да има слѣдъ 14 години 24000 лева?

51. Нѣкой си далъ 4000 лв. по $4\cdot2\%$ лихва. По колко лева може да зима въ начало на всѣка година, за да има слѣдъ 20 години 5000 лева?

52. Каква сума трѣбва да се изплаща годишно за лихва и погешение на $3\frac{1}{4}$ процентенъ заемъ отъ 8000000 лв., за да се изплати въ 25 години?

53. Една държава плаща 14000000 лв. годишно само за лихви на своитѣ дългове. Колко повече трѣбва да плаща, за да може да погаси дълговетѣ си въ 50 години, като се смѣта по $3\frac{1}{2}\%$ лихва?

54. Една община е взела 40000 лв. отъ нѣкой банкеръ, като му отстжпила за ползуване общинската си гора, която давала чистъ годишенъ доходъ 3000 лв. Слѣдъ 30 години, освѣнъ гората, колко лева ще трѣбва дз иска общината отъ банкера?

55. Една община склжчила трипроцентенъ заемъ отъ 600000 л. за 6 години. Каква сума трѣбва да плаща годишно за лихви и погашение, ако лихвата се изплаща въ началото на всѣки 6 мѣсеци, а погашението — въ краа на годината?

56. Единъ петопроцентенъ заемъ трѣбвало да се изплати, като се внася годишно за лихва и погашение сума, равна на $^3/_4\,^0/_0$ отъ сключения заемъ. Колко години сж нуждни за цѣльта?

57. Единъ чиновникъ спестявалъ годишно отъ заплатата си 430 лева и ги внасялъ въ банка, която плащала $4\frac{1}{2}\,^0/_0$ лихва; каква сума ще има слѣдъ 18 години?

58. По колко трѣбва да се внася въ началото на всѣка година по $4^0/_0$ въ продължение на 24 години, за да се набере сумата отъ 36450 лева?

59. Нѣкой внася въ края на всѣка година 700 лева по $3\frac{1}{4}\,^0/_0$ лихва; въ колко години ще му се набере сума отъ 19725 лв.?

60. Единъ търговецъ внасялъ въ началото на всѣка година 100 лв. по $5^0/_0$ и лихвитѣ се прибавяли къмъ капитала всѣка година. Вмѣсто това, по колко лева трѣбва да внася той въ началото на всѣко тримѣсечие, пакъ по $5^0/_0$, ако лихвитѣ се прибавятъ къмъ капитала всѣко тримѣсечие?

61. Едно 25-годишно лице, като се осигурило за въ случай на смърть за 9000 лв., срѣщу годишна премия отъ 115 лв., платима въ началото на всѣка година, умрѣло на 70-годишна възрасть. Каква печалба или загуба има осигурителното дружество отъ това, като се смѣта по $2\frac{1}{2}\,^0/_0$ лихва?

62. Кой капиталъ дава годишна рэнта 1250 лв., платима въ началото на годината, въ продължение на 21 година, като се смѣта лихва по $3{\cdot}9^0/_0$?

63. Кой капиталъ дава рента 600 лв, платнма въ края на всѣки 6 мѣсеци, въ продължение на $9\frac{1}{2}$ години, като се смѣта лихва по $5\frac{1}{2}\,^0/_0$ годишно и олихвяването става сжщо всѣки 6 мѣсеци?

64. Едно лице иска да осигури за слѣдъ 8 години рента, за жена си и дъщеря си, платима въ края на всѣка година и то така: двѣтѣ да получаватъ годишна рента 1350 лв. въ продължение на 10 години, а слѣдъ това жена му сама да получава 600 лв. въ продължение на 25 години. Каквв сума трѣбва да внесе сега, ако се смѣта лихва по $4^0/_0$?

65. Нѣкой има да получава годишна рента 850 лева, платима въ началото на всѣка година, въ продължение на 30 години. Вмѣсто тая рента, той иска да получи двѣ равни суми и то едната въ брой, а другата слѣдъ 3 години. Колко голѣми ще сж тия суми, ако се смѣта лихва по $4\frac{0}{0}$?

66. Каква рента, платима въ края на годината, въ продължение на 26 години, ще даде капиталътъ 4200 лв., като се смѣта по $3{\cdot}8\frac{0}{0}$ лихва?

67. Нѣкой иска да внесе извѣстенъ капиталъ за да получава рента, платима въ началото на годината, въ продължение на 12 год. Като смѣта лихвата по $4\frac{0}{0}$ и по $3\frac{0}{0}$ намира, че въ първия случай рентата е съ 91·37 лв. по-голѣма отъ оная въ втория случай. Колко голѣмъ е оня капиталъ и на каква сума възлиза 3-процентната рента?

68. Колко години ще трае рентата 1939·32 лв., платима йъ края на годината, ако за тая цѣль сж внесени 26000 лв., като се смѣта лихва по $4{\cdot}8\frac{0}{0}$?

69. Колко години трѣбва да стои подъ лихва капиталъ 12000 лева, та слѣдъ това да се получава рента 1616·48 лева, платима въ началото на годината, въ продължение на 20 години, ако се смѣта лихва по $4\frac{1}{2}\frac{0}{0}$?

70. Нѣкой има да получава рента отъ 500 лв., платима въ края на годината, въ продължение на 20 години; но той иска да я замѣнн съ друга рента отъ 600 лв., платима въ началото на годината. Колко години ще продължава послѣдната рента, ако се смѣта лихва по $3\frac{1}{6}\frac{0}{0}$?

71. Нѣкой има да получава отъ днесъ рента 400 лв., платима въ началото на годината, въ продължение на 20 години. Колко години трѣбва той още да чака, за да почне да получава рента 1600 лева, платима въ края на годината, въ продължение на 5 години, ако се смѣта по $3\frac{1}{2}\frac{0}{0}$ лихва?

72. Колко трѣбва да внасяме въ началото на годината, въ продължение на 21 год., та слѣдъ това да можемъ да получаваме рента 900 лв., платима въ края на годината и въ продължение на 16 години, като смѣтаме $4^0/_0$ лихва?

73. Нѣкой внасялъ въ началото на годината 458·80 лв. въ продължение на 26 год. и слѣдъ това почналъ да получава 1800 лв. рента, платима въ края на годината. Колко години е продължавала тая рента, ако се смѣта $3\frac{3}{4}\,^0/_0$ лихва?

69. Колко години трябва да стои подъ лихва капиталъ 12000 лева, та следъ това да се получава рента 1616·48 лева, платима въ началото на годината, въ продължение на 20 години, ако се смѣта лихва по 4½%?

70. Нѣкой има да получава рента отъ 500 лв., платима въ края на годината, въ продължение на 20 години, но той иска да я замѣни съ друга рента отъ 600 лв., платима въ началото на годината. Колко години ще продължава последната рента, ако се смѣта лихва по 3½%?

71. Нѣкой има да получава отъ днесъ рента 400 лв., платима въ началото на годината, въ продължение на 20 години. Колко години трябва още да чака, за да почне да получава рента 1600 лева, платима въ края на годината, въ продължение на 6 години, ако се смѣта по 3½% лихва?

72. Колко трябва да внасяме въ началото на годината, въ продължение на 21 год., та следъ това да можемъ да получаваме рента 300 лв., платима въ края на годината и въ продължение на 16 години, като смѣтаме 4% лихва?

73. Нѣкой внасялъ въ началото на годината 458·80 лв. въ продължение на 20 год. и следъ това почналъ да получава 1800 лв. рента, платима въ края на годината. Колко години е продължавала тая рента, ако се смѣта 3½% лихва?

Книга II.

Теория на съединенията и приложенията ѝ.

ГЛАВА VIII.

Съединения.

I.

Съединения безъ повтаряне.

Опрѣдѣления.

§ 72. Отъ опрѣдѣлено число величини могатъ се образува групи, въ които да влизатъ или всичкитѣ дадени величини, или пъкъ само нѣкои отъ тѣхъ. Всѣка група се нарича **съединение**. Величинитѣ, които образуватъ съединението, се наричатъ негови **елементи** и се бѣлѣжатъ съ буквитѣ a, b, c, . . ., или съ цифритѣ 1, 2, 3 . . ., или пъкъ съ a_1, a_2, a_3 . . . . и т. н. Съединенията, които сж съставени отъ два, отъ три, отъ четири и т. н, елементи, сж отъ II, III, IV и т. н. класъ. Образуването на групитѣ може да стане по различни начини, според това има и различни видове съединения, главно три: **вариации**, **пермутации** и **комбинации**.

Вариации (нареждания).

§ 73. Вариациитѣ сж съединения, въ които не влизатъ всички дадени елементи и слѣдов., иматъ класове. **Вариациитѣ отъ извѣстенъ класъ се различаватъ една отъ друга или по мѣстото на елементитѣ, или пъкъ по самитѣ елементи.**

а) Съставяне на вариациитѣ.

Ако сж дадени елементитѣ a, b, c, d и въ такъвъ редъ, както сж написани, то

1. ab, ac, ad
ba, bc, bd
ca, cb, cd
da, db, dc

сж вариациитѣ имъ отъ II класъ, които получаваме, като **при всѣки даденъ елементъ приписваме отдѣсно, едно слѣдъ друго, всѣки отъ останалитѣ дадени елементи;**

2. *abc*, *abd*, *acb*, *acd*, *adb*, *adc*,
bac, *bad*, *bca*, *bcd*, *bda*, *bdc*,
cab, *cad*, *cba*, *cbd*. *cda*, *cdb*,
dab, *dac*, *dba*, *dbc*, *dca*, *dcb*

сж вариациитѣ имъ отъ III класъ, които получаваме, като при всѣка вариация отъ II класъ приписваме отдѣсно едно слѣдъ друго всѣки отъ даденитѣ елементи, що не влизатъ въ нея.

По сжщия начинъ се съставятъ вариациитѣ отъ различнитѣ класове и на n дадени елементи; при това ако m е нумерътъ на класа, то винаги $m\,{}^{\geq 1}_{< n}$.

б) Число на вариациитѣ.

Ако означимъ числото на вариациитѣ отъ II, III, IV, ... $m^{\text{ти}}$ класъ съ $V_n{}^2$, $V_n{}^3$, $V_n{}^4$, . . , $V_n{}^m$, то

1. $V_n{}^2 = n(n-1)$, защото отъ единъ елементъ се получаватъ $n-1$ вариации отъ II класъ, а отъ n елементи — n пжти повече (§ 73, *a*).

2. $V_n{}^3 = V_n{}^2.(n-2) = n(n-1)(n-2)$, защото отъ една вариация отъ II класъ се получаватъ $n-1$ вариации отъ III класъ, а отъ $V_n{}^2$ вариации — $V_n{}^2$ пжти повече (§ 73, *б*).

3. $V_n{}^4 = V_n{}^3(n-3) = n(n-1)(n-2)(n-3)$, защото отъ една вариация отъ III класъ се получаватъ $n-3$ вариации отъ IV класъ, а отъ $V_n{}^3$ вариации — $V_n{}^3$ пжти повече и т. н.

Изобщо,

$$V_n{}^m = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots (n-m+2)(n-m+1).$$

Заб. Съ символътъ $V_n{}^1$, който нѣма смисъль, ще означаваме числото на даденитѣ елементи, сир. $V_n{}^1 = n$.

Примѣри.

1. Колко двуцифрени, трицифрени и четирицифрени числа могатъ се състави отъ цифритѣ 1, 2, 3, 4, 5, така, че всѣка отъ цифритѣ да влиза въ извѣстно число само единъ пжть?

Рѣшение.

$$V_5{}^2 = 5.4 = 20;\ V_5{}^3 = 5.4.3 = 60;\ V_5{}^4 = 5.4.3.2 = 120.$$

Напиши тѣзи числа!

2. Отъ буквитѣ *а*, *е*, *и*, *о*, колко двубуквени, трибуквени и четирибуквени слога могатъ се състави така, че въ слоговетѣ всѣка отъ буквитѣ да влиза само единъ пжть?

Рѣшение.

$$V_5{}^2 = 20;\ V_5{}^3 = 60;\ V_5{}^4 = 120.$$

Напиши тѣзи слогове!

3. Колко думи могатъ се състави отъ n съгласни и m гласни букви така, че въ всѣка дума да влизатъ 2 съгласни и една гласна, която да лежи между съгласнитѣ?

Отг. $V_n{}^2.\ m$.

Пермутации (размѣствания).

§ 74. Пермутациитѣ сж съединения, въ които влизатъ всичкитѣ дадени елементи и, слѣдов., нѣматъ класове; различаватъ се една отъ друга само по мѣстото на елементитѣ въ тѣхъ.

а) Съставяне на пермутациитѣ.

1. Ако *ab* сж 2 дадени елементи, то *ab* и *ba* сж пермутациитѣ имъ.

2. Ако *a*, *b*, *c* сж три дадени елементи, то

abc *bac* *cab*
acb *bca* *cba*

сж пермутациитѣ имъ.

Къмъ елемента а приписваме отдѣсно послѣдователно пермутациитѣ на елементитѣ b и c; сжщото правимъ и съ елементитѣ b и c, къмъ които приписваме съотвѣтно пермутациитѣ иа а и c (къмъ b) и на а и b (къмъ c).

3. Ако *a*, *b*, *c*, *d* сж 4 дадени елементи, то

abcd	*bacd*	*cabd*	*dabc*
abdc	*badc*	*cadb*	*dacb*
acbd	*bcad*	*cbad*	*dbac*
acdb	*bcda*	*cbda*	*dbca*
adbc	*bdac*	*cdab*	*dcab*
adcb	*bdca*	*cdba*	*dcba*

сж пермутациитѣ имъ.

Къмъ елемента а приписваме послѣдователно пермутациитѣ на останалитѣ три елементи; сжщото правимъ и съ всѣки отъ другитѣ елементи (b, c, d), къмъ които приписваме послѣдователно пермутациитѣ на останалитѣ елементи.

По сжщия начинъ се съставляватъ и пермутациитѣ на n дадени елементи.

За първа пермутация се взима тази, въ която елементитѣ слѣдватъ реда, по който сж дадени. При това пермутациитѣ се групиратъ така, че въ първата група влизатъ тѣзи отъ тѣхъ, що започватъ съ първия даденъ елементъ, въ втората — съ втория, въ третата — съ третия и т. н.

б) Число на пермутациитѣ.

Ако числото на пермутациитѣ иа 2, 3, 4, . . n елементи означимъ съотвѣтно съ P_2, P_3, P_4,.... P_n и символътъ P_1, който нѣма смисълъ, земемъ = 1, то, отъ начина на съставянето на пермутациитѣ, слѣдва, че $P_n = nP_{n-1}$,

$$P_{n-1}=(n-1)P_{n-2},$$
$$P_{n-2}=(n-2)P_{n-3},$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$P_4=4P_3,$$
$$P_3=3P_2,$$
$$P_2=2P_1,$$

отдѣто

$$P_n . P_{n-1} . P_{n-2} \ldots . P_4 . P_3 . P_2 = n.P_{n-1}.(n-1).P_{n-2}.(n-2) P_{n-2} \ldots \ldots$$
$$\ldots 4.P_3.3.P_2.2.P_1$$

и най-послѣ

$$P_n = n(n-1)\,(n-2) \ldots \ldots 4.3.2.1$$
$$=1.2.3 \ldots \ldots (n-2)(n-1).\,n,$$

т. е., числото на пермутациитѣ на n елемента е равно на произведението на всичкитѣ цѣли числа отъ 1 до n включително.

Сжщото произведение се означава още съ n!, който символъ се чете: n факториалъ и прѣдставлява строго опрѣдѣлено число. Наименованието факториалъ е употрѣбено за пръвь пжть отъ Kramp (1808 г.).

§ 75. Пермутациитѣ се съставятъ и така: съставяме пермутациитѣ на първитѣ два елемента a и b: ab. ba и написваме третия елементъ c на три мѣста: на лѣво отъ a, межеу a и b и на дѣсно отъ b: сжщото правимъ и при ba:

cab, acb. abc; cba, bca, bac.

Слѣдъ това, написваме четвъртия елементъ d на 4 мѣста: на лѣво отъ c, между c и a, между a и b на дѣсно отъ b: сжщото правимъ и при другитѣ съединения:

dcab	dacb	dabc	dcba	dbca	dbac
cdab	adcb	adbc	cdba	bdca	bdac
cadb	acdb	abdc	cbda	bcda	badc
cabd	acbd	abcd	cbad	bcad	bacd.

Примѣри.

1. Колко пермутации могатъ се състави отъ цифритѣ 1, 2, 3, 4?

Отговоръ. $P_4=1.2.3.4=24$.

Напишете тѣзи числа!

2. Колко пермутации могатъ се състави отъ буквитѣ на думата Шуменъ?

Отговоръ. $P_5=5!=1.2.3.4.5=120$.

Напишете тѣзи, що започватъ съ *ш*?

3. Измежду пермутациитѣ на буквитѣ отъ „Рила“, кое мѣсто заема пермутацията „лира“?

Рѣшение. Прѣдъ пермутацията „лира“ сж: 1) пермутациитѣ, що започватъ съ *р*; броятъ имъ е $3!=1.2.3=6$; 2) пермутациитѣ, що започватъ съ *и*; броятъ имъ е $3!=6$; 3) пермутациитѣ, що започватъ съ *лр*; броятъ имъ е $2!=1.2=2$. Слѣдов., „лира“ е 15-а пермутация. Дѣйствието се разполага така:

Съ *л* започватъ 3 !=6 перм.
„ *и* „ 3 !=6 „
„ *лр* „ 2 !=2 „
„ *лир(а)* „ 1 !=1 „
15.

Отг. 15-а пермутация.

4. Измежду пермутациитѣ на „Рила“ коя е 15-а пермутация? (Обратна задача).

Рѣшение.

Съ *р* започватъ 3 !=6 перм.
„ *и* „ 3 !=6 „
„ *лр* „ 3 !=2 „
„ *лир(а)* „ 1 !=1 „
15.

Отг. Лира.

Комбинации (съчетания).

§ 76. Комбинациитѣ сж съединения, въ които не влизатъ всички дадени елементи и, слѣдов., иматъ класове. Комбинациитѣ отъ извѣстенъ класъ се различаватъ една отъ друга поне съ единъ елементъ.

а) Съставяне на комбинациитѣ.

Ако сж дадени елементитѣ a, b, c, d, f и въ такъвъ редъ, както сж нnписани, то

1. *ab, ac, ad, af,*
bc, bd, bf,
cd, cf,
df

сж комбинациитѣ имъ отъ II класъ, които получаваме като къмъ всѣки даденъ елементъ приписваме отдѣсно едно слѣдъ друго всѣки отъ слѣдващитѣ подиръ него елементи.

2. *abc, abd, abf,*
acd, acf,
adf,
bcd, bcf,
bdf,
cdf

сж комбинациитѣ имъ отъ III класъ, които получаваме, като къмъ всѣка комбинация отъ II класъ приписваме отдѣсно едно слѣдъ друго всѣки отъ елементитѣ, що слѣдватъ подиръ последния й елементъ.

3. *abcd*, *abcf*, *abdf*, *acdf*, *bcdf* сж комбинациитѣ отъ IV класъ, които получаваме, като къмъ всѣка комбинация отъ III класъ приписваме отдѣсно всѣки отъ елементитѣ, що слѣдватъ подиръ послѣдния й елементъ.

По сжщия начинъ се съставляватъ и комбинациитѣ отъ различнитѣ класове на n дадени елементи. При това, ако m е нумерътъ на класа, то винаги $m{}^{\geq 1}_{<n}$.

б) Число на комбинациитѣ.

Числото на комбинациитѣ на n елементи отъ II, III, IV . . . $m^{\text{и}}$ класъ ще бѣлѣжимъ съотвѣтно съ $C_n{}^2$, $C_n{}^3$, $C_n{}^4$, . . . , $C_n{}^m$. Ако напишемъ всичкитѣ комбинации отъ $m^{\text{и}}$ класъ на даденитѣ n елементи и размѣстимъ слѣдъ това елементитѣ на всѣка отъ тѣхъ по всички възможни начини, то ще получимъ всичкитѣ вариации на n елементи отъ $m^{\text{и}}$ класъ. Понеже отъ една комбинация се получаватъ P_m вариации, а отъ $C_n{}^m$ комбинации — $P_m.\ C_n{}^m$ вариации, то

$$V_n{}^m = P_m.\ C_n{}^m, \text{ отдѣто}$$

$$C_n{}^m = \frac{V_n{}^m}{P_m}.$$

Примѣри.

1. Колко сж комбинациитѣ отъ IV класъ на 10 елементи?

$$\text{Отг. } C_{10}{}^4 = \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4} = 210.$$

2, Колко различни произведения могатъ се състави отъ 9 прости множители, ако ги съединяваме по 5?

$$\text{Отг. } C_9{}^5 = \frac{9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5} = 126.$$

Свойства на комбинациитѣ.

§ 77. 1. Понеже $C_n{}^m$, при $n>m$, е цѣло число, то $\frac{V_n{}^m}{P_m}$ е винаги цѣло число. Слъдов., произведеиието на m послѣдователно низходящи цѣли числа, първото отъ които е n, винаги се дѣли на произведението на първитѣ m натурални числа.

2. Отъ равенството за $C_n{}^m$ намираме:

$$C_n{}^m = \frac{V_n{}^m}{P_m} = \frac{V_n{}^m.P_{n-m}}{P_m.P_{n-m}} =$$

$$\frac{n(n-1)\ (n-2)\ .\ .\ .\ .\ (n-m+2)\ (n-m+1).\ 1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ (n-m)}{P_m.P_{n-m}} =$$

$$\frac{1.2.3\ .\ .\ .\ (n-m)\ (n-m+1)\ (n-m+2)\ .\ .\ .\ .\ (n-2)\ (n-1)n}{P_m.P_{n-m}} =$$

$$= \frac{P_n}{P_m P_{n-m}}.$$

3. Ако въ равенството $C_n{}^m = \frac{P_n}{P_m.P_{n-m}}$ замѣнимъ m съ $n-m$, ще намѣримъ

$$C_n{}^{n-m} = \frac{P_n}{P_{n-m}.P_{n-(n-m)}} = \frac{P_n}{P_{n-m}.P_m};$$

слѣдов.,

$$C_n{}^m = C_n{}^{n-m}, \text{ сир.}$$

числото на комбинациитѣ отъ n елементи отъ $m^{\text{и}}$ класъ е равно на числото на комбинациитѣ на n елементи отъ $(n-m)^{\text{и}}$ класъ. Така,

$$C_5{}^4 = C_5{}^{5-4} = C_5{}^1 = 5.$$

Сжщиятъ резултатъ добиваме и така още. Ако отъ даденитѣ n елементи отдѣлимъ m елементи за да съставимъ комбинация отъ $m^{\text{и}}$ класъ, то и останалитѣ n—m елементи, ще да съставятъ комбинация отъ $(n-m)^{\text{и}}$ класъ така, щото на всѣка комбинация отъ $m^{\text{и}}$ класъ съотвѣтствува една комбинация отъ $(n-m)^{\text{и}}$ класъ и споредъ това $C_n{}^m = C_n{}^{n-m}$. Така,

$$C_{10}{}^7 = C_{10}{}^3 = \frac{10.9.8}{1.2.3} = 120;\ C_6{}^5 = C_6{}^1 = 6 \text{ и т. н.}$$

Съ това свойство си служимъ, когато $m > \frac{n}{2}$; то се употрѣбява често.

4. При $m=0$, $m=1$ и $m=n$ символътъ $C_n{}^m$ изгубва смисълъ; но, за удобство при изчисленията, ще считаме: $C_n{}^1 = n$, $C_n{}^0 = 1$ и $C_n{}^n = 1$.

Ако $m=n$, то $C_n^n = C_n^{n-n} = C_n{}^0$. Отъ друга страна

$$C_n^n = \frac{n(n-1)(n-2).\ .\ .\ .\ 3.2.1}{1.2.3.\ .\ .\ .\ (n-2)(n-1)n} = 1;$$

слѣдов., $C_n{}^0 = C_n{}^n = 1$.

Сжщо и символътъ $0\,!$ нѣма смисълъ, но считаме $0\,! = 1$.

$$\text{Понеже } C_n^n = \frac{P_n}{P_n.P_{n-n}} = \frac{P_n}{P_n\,P_0} = \frac{1}{P_0} = \frac{1}{0!}$$

и $C_n{}^n = 1$, то

$\frac{1}{0\,!} = 1$, отдѣто $0! = 1$. Слѣдов., $C_n{}^n = C_n{}^0 = 1 = 0\,!$

$$5.\ C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1},$$

защото

$$C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1} = \frac{(n-1)\ (n-2)\ldots(n-m+2)\,(n-m+1)\,(n-m)}{1\,.\,2\,.\,3.\ \ldots\ (m--1)m} +$$

$$\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m+2)(n-m+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\ \ldots\ (m-1)} =$$

$$\frac{(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-m+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ \ldots\ (m-1)}\left[\frac{n-m}{m}+1\right] =$$

$$\frac{n(n-1)\ (n-2)\ \ldots\ (n-m+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ \ldots\ m} = C_n^m.$$

$$6.\ C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-2}^{m-1} + C_{n-3}^{m-1} + \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ ,$$

защото

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1},$$
$$C_{n-1}^m = C_{n-2}^m + C_{n-2}^{m-1},$$
$$C_{n-2}^m = C_{n-3}^m + C_{n-3}^{m-1},$$
$$C_{n-3}^m = C_{n-4}^m + C_{n-4}^{m-1},$$
$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .,$$

отдѣто

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-2}^{m-1} + C_{n-3}^{m-1} + C_{n-4}^{m-1} + \ .\ .\ .\ .\ .$$

II.

Съединения съ повтаряне.

Опрѣдѣления.

§ 78. Съединения, въ които нѣкои отъ елементитѣ могатъ да влизатъ повече отъ единъ пѫть, се наричатъ съединения съ повтаряне. Има три вида съединения съ повтаряне: вариации, пермутации и комбинации.

Вариации.

§ 79. Вариациитѣ съ повтаряне сѫ съединения, при които единъ и сѫщъ елементъ може да влиза въ дадено съединение толкова пѫти, колкото е нумерътъ на класа, който пъкъ нумеръ може да бѫде и по-голѣмъ отъ числото на различнитѣ дадени елементи.

а) Съставяне на вариациитѣ съ повтаряне.

Ако сѫ дадени елементитѣ *a*, *b*, *c* и въ такъвъ редъ, както сѫ написани, то

$$1.\ \begin{array}{lll} aa, & ab, & ac, \\ ba, & bb, & bc, \\ ca, & cb, & cc, \end{array}$$

сѫ вариациитѣ имъ отъ II класъ, които получаваме, както къмъ всѣки елементъ приписваме отдѣсно едно слѣдъ друго всѣки отъ даденитѣ елементи;

$$2.\ \begin{array}{lll|lll|lll} aaa, & aab, & aac & baa, & bab, & bac & caa, & cab, & cac \\ aba, & abb, & abc & bba, & bbb, & bbc & cba, & cbb, & cbc \\ aca, & acb, & acc & bca, & bcb, & bcc & cca, & ccb, & ccc \end{array}$$

сѫ вариациитѣ имъ отъ III класъ, които получаваме, като къмъ всѣка вариация отъ II класъ приписваме отдѣсно едно слѣдъ друго всѣки отъ даданитѣ елементи;

$$3.\ \begin{array}{l|l|l} aaaa & aaba & .\ .\ .\ .\ .\ ccca \\ aaab & aabb & .\ .\ .\ .\ .\ cccb \\ aaac & aabc & .\ .\ .\ .\ .\ cccc \end{array}$$

сѫ вариациитѣ имъ отъ IV класъ.

По сѫщия начинъ се съставятъ и вариациитѣ съ повтаряне на n елементи отъ $m^{\text{и}}$ класъ, дѣто $m>1$ и $m \underset{>}{\overset{<}{=}} n$.

б) Число на вариациитѣ съ повтаряне.

Ако означимъ числото на вариациитѣ съ повтаряне на n елементи отъ II, III, IV, . . . , $m^{\text{и}}$ класъ съ VV_n^2, VV_n^3, VV_n^4, . . . , VV_n^m, то

1. $VV_n{}^2=n.n=n^2$, защото отъ единъ елементъ се получаватъ n вариации отъ $\text{II}^{\text{и}}$ класъ, а отъ n елементи—n пѫти повече;

2. $VV_n^3=VV_n^2.\ n=n^2.n=n^3$, защото отъ една вариация отъ II класъ се получаватъ n вариации отъ III класъ, а отъ VV_n^2 вариации—VV_n^2 пѫти повече;

3. $VV_n^4=VV_n^3.\ n=n^3\,.\,n=n^4$

и т. н.

Изобщо, $VV_n^m=n^m$.

Примѣри.

1. Отъ цифритѣ 1, 2, 3, 4 колко двуцифрени, трицифрени, четирицифрени и т. н. n—цифрени числа могатъ се състави?

Отг. $VV_4^2=16; VV_4^3=4^3=64$; $VV_4^4=4^4=256$; $VV_4^n=4^n$.

Напишете двуцифренитѣ и трицифренитѣ числа!

Пермутации.

§ 80. Пермутациитѣ сѫ съ повтаряне, когато помежду даденитѣ елементи има еднакви. Така, ако a, a, b, c сѫ даденитѣ елементи, то $aabc$ е пермутация съ повтаряне.

а) Съставяне на пермутациитѣ съ повтаряне.

Съставятъ се както и пермутациитѣ безъ повтаряне. Така на елементитѣ b, a, c, a пермутациитѣ сѫ:

baca
baac
bcaa

abca
abac
acba
acab
aabc
aacb

cbaa
caba
caab

б) Число на пермутациитѣ съ повтаряне.

Числото на пермутациитѣ съ повтаряне на n елементи ще означаваме съ PP_n.

1. Числото на пермутациитѣ на n елементи, отъ които α сѫ равни на a.

Написваме пермутациитѣ на даденитѣ n елементи и въ всѣка една отъ тѣхъ замѣняваме равнитѣ елементи съ различни, които и размѣстваме по всички възможни начини; получаваме пермутации на n елементи безъ повтаряне. Понеже отъ една пермутация съ повтаряне се получава P_α пермутации безъ повтаряне, то

$$P_n = PP_n \,.\, P\alpha \quad \text{отдѣто}$$

$$PP_n = \frac{P_n}{P_\alpha}.$$

2. Число на пермутациитѣ на n елементи отъ които α сѫ равни на a и β—равни на b.

Намираме числото на пермутациитѣ при прѣдположение, че имаме само α елементи$=a$; това число се опрѣдѣля отъ равенствво

$$PP_n \,.\, P_\alpha = P_n \,.$$

Но въ така съставенитѣ пермутации има още β елементи$=b$; ако сега и тѣзи елементи замѣнимъ съ различни и направимъ всички възможни прѣмѣствания, то ще получимъ пермутации безъ равни елементи, на които числото се опрѣдѣля отъ равенството

$$(PP_n \,.\, P_\alpha) \,.\, P_\beta = P_n \,, \quad \text{отдѣто}$$

$$PP_n = \frac{P_n}{P_\alpha \,.\, P_\beta}.$$

3. Число на пермутациитѣ на n елементи, отъ които α сѫ равни на a, β — на b. γ — на c, δ — на d и т. н.

Това число се опрѣдѣля отъ равенството

$$[\{(PP_n\, P\alpha).\, P\beta\}.\, P\gamma].\, P\delta \;\cdot\;\cdot\;\cdot = P_n \,, \quad \text{отдѣто}$$

$$PP_n = \frac{P_n}{P\alpha.\, P_\beta.\, P_\gamma.\, P_\delta}.$$

Примѣри.

1. Колко пермутации могатъ се състави отъ буквитѣ на думата „канара“?

Отг. $PP_6 = \frac{P_6}{P_3} = \frac{1.2.3.4.5.6}{1.2.3} = 120.$

2. Колко пермутации могатъ се състави отъ буквитѣ на думата „гаргара“?

Отг. $PP_7 = \frac{P_7}{P_3.P_2.P_2} = \frac{1.2.3.4.5.6.7}{1.2.3.1.2.1.2} = 210.$

Колко отъ тѣзи пермутации започватъ: 1) съ $г$, 2) съ a, 3) съ p?

3. Напиши пермутациитѣ на „Варна“! Коя отъ тѣзн пермутации е нарва? Коя е 54^{a} пермутация?

4. Колко петоцифрени числа могатъ се състави отъ цифритѣ на числото 11200?

Рѣшения. 1. Съ 1 започватъ: $\frac{4!}{2!} = 12$ числа; съ 2 започватъ: $\frac{4!}{2!2!} = \frac{24}{4} = 6$ числа; слѣдов., всичкитѣ петоцифрени числа сѫ $12 + 6 = 18$.

Числата, които започватъ съ нула. не сѫ петоцифрени числа.

2. Всичкитѣ пермутации сѫ $\frac{5!}{2!2!} = 30$. Пермутации съ нула въ началото (тѣ се изхвърлятъ) има: $\frac{4!}{2!} = 12$; слѣдов., числото на пермутациитѣ, които започватъ съ 1 и 2, е равно на $30 - 12 = 18$.

Комбинации.

§ 81. Комбинациитѣ съ повтаряне сѫ съединения, при които единъ и сѫщъ елементъ може да влиза въ дадено съединение толкова пѫти, колкото е нумерътъ на класа, който пъкъ нумеръ може да бѫде и по-голѣмъ отъ числото на различнитѣ дадени елементи.

а) Съставяне на комбинациитѣ съ повтаряне.

Ако сѫ дадени елементитѣ a_1, a_2, a_3, a_4, и въ такъвъ редъ, както сѫ написани, то

1.$a_1a_1, a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4$
a_2a_2, a_2a_3, a_2a_4
a_3a_3, a_3a_4
a_4a_4

сж комбинациитѣ имъ отъ II класъ, които получаваме, като къмъ всѣки елементъ приписваме отдѣсно едно слѣдъ друго самия него и слѣдващитѣ подиръ него елементи.

2. $a_1a_1a_1, a_1a_1a_2, a_1a_1a_3, a_1a_1a_4$
$a_1a_2a_2, a_1a_2a_3, a_1a_2a_4$
$a_1a_3a_3, a_1a_3a_4$
$a_1a_4a_4$
$a_2a_2a_2, a_2a_2a_3, a_2a_2a_4$
$a_2a_3a_3, a_2a_3a_4$
$a_2a_4a_4$
$a_3a_3a_3, a_3a_3a_4$
$a_3a_4a_4$
$a_4a_4a_4$

сж комбинациитѣ имъ отъ III класъ, които получаваме като кък всѣка комбинация отъ III клаасъ приписваме едно слѣдъ друго послѣдния й елементъ и слѣдващитѣ подиръ него елементи;

3. $a_1a_1a_1a_1, a_1a_1a_1a_2, a_1a_1a_1a_3, a_1a_1a_1a_4$
$a_1a_1a_2a_2, a_1a_1a_2a_3, a_1a_1a_2a_4$
. . . .
$a_1a_1a_4a_4$
. . .
$a_4a_4a_4a_4$

сж комбинациитѣ имъ отъ IV класъ.

По сжщия начинъ се съставятъ и комбинациитѣ съ повтаряне на n елементи отъ m^n класъ, дѣто $m>1$ и $m \gtreqless n$.

б) Число на комбинациитѣ съ повтаряне.

Отъ горнитѣ комбинации съ повтаряне ще получиимъ комбинации безъ повтаряне по слѣдния начинъ.

1. Отъ II класъ. Въ всѣка комбинация съ повтаряне ще увеличимъ индекса на втория елементъ съ единица:

$a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4, a_1a_5$
a_2a_3, a_2a_4, a_2a_5
a_3a_4, a_2a_5
$a_4a_5;$

това сж комбинации безъ повтаряне на елементитѣ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и затова $CC_4^2 = G_5^2$.

2. отъ III класъ. Въ всѣка комбинация съ повтаряне ще увеличимъ индекситѣ на втория елементъ съ 1 и на третия съ 2:

$a_1a_2a_3\ a_1a_2a_4\ a_1a_2a_5\ a_1a_2a_6$
$a_1a_3a_4\ a_1a_3a_5\ a_1a_3a_6$
. . . .
$a_4a_5a_6;$

това сж комбинациитѣ безъ повтаряне на елементитѣ; $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ и затова $CC_4^3 = C_5^3$.

3. Отъ IV класъ. Въ всѣка комбинация съ повтаряне ще увеличимъ индекситѣ на втория елементъ съ 1, на третия съ 2 и на четвъртия съ 3;

$a_1a_2a_3a_4, a_1a_2a_3a_5, a_1a_2a_3a_6, a_1a_2a_3a_7$
$a_1a_2a_4a_5, a_1a_2a_4a_6, a_1a_2a_4a_7$
. : . . . .
$a_4a_5a_6a_7;$

това сж комбинации безъ повтаряне отъ елементитѣ; $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ и затова и $CC_4^4 = C_7^4$.

Изобщо, ако при комбинациитѣ съ повтаряне отъ $m^и$ класъ на елементитѣ: $a_1, a_2, a_3 \ldots . a_n$ увеличимъ индекситѣ на втория елементъ съ 1, на третия съ 2, . . . на $m^{ия}$ съ $m-1$, ще получимъ комбинации безъ повтаряне отъ $m^и$ класъ на $n+m-1$ елементи; затова

$$CC_n^m = C_{m+m-1}^n = \frac{(n+m-1)(n+m-2)\ldots(n+m-1-m+1)}{1.2.3\ldots m}$$

$$= \frac{(n+m-1)(n+m-2)\ldots(n+1)n}{1.2.3\ldots m} = \frac{n(n+1)(n+2).(n+m-1)}{1.2.3\ldots m}.$$

Примѣръ. Колко сж комбинациитѣ съ повтаряне на 6 елементи отъ II, III, IV и V класове?

Отг. 1) $CC_6^2 = \frac{6.7}{1.2} = 21$; 2) $CC_6^3 = \frac{6.7.8}{1.2\ 3} = 56$;

3) $CC_6^4 = \frac{6.7.8.9}{1.2\ 3.4} = 126$; 4) $CC_6^5 = \frac{6.7.8.9.10}{1.2.3.4.5} = 252$.

Начала отъ комбинаториката срѣщаме още прѣзъ 16-й вѣкъ при Bucley, Cardano и др, Първото по-голѣмо съчинение върху комбинаториката е написано отъ Pascal въ 1650 год.; въ него комбинациитѣ сж разгледани въ свръзка съ фигурнитѣ числа. Книгата на Leibnitz (de arte cómbinatoria, 1666 г) не съдържа нѣщо ново; въ нея има приложения на пермутациитѣ и комбинациитѣ. Сегашното състояние на комбинаториката се намира напълно у Iacob Bernoulli (ars conjectandi, op. posth. 1713 г). Тукъ срѣщаме за пръвъ пжть думата пермутация, вмѣсто която Wallis употрѣбява алтернация, а Leibnitz — вариация. У Leibnitz думата комплексъ означава комбинация. Думата вариация е добила днешното си значение въ края на 18-й вѣкъ. Така нарѣчениятъ лексикографиченъ начинъ за образуване на пермутациитѣ е даденъ отъ Gallenkamp

(Elemente der Matematik, 1850, § 110). Изражението $\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}$ е въведено отъ Frenicle (Abrégé des comp. 1676 год.) и отъ Wallis (combin. 1685 г.). Замѣната на произведението 1.2.3. . . . (n—1). n съ n! намираме въ аритметиката на Kramp (1808 г). Символътъ n! Kramp нарича n-факултетъ (1799 г); названието n-факториелъ (n!) се дължи на Arbogast.

Задачи и упражнения.

1. Колко и кои пермутации на елементитѣ a, b, c, d, e започватъ съ: 1) abc, 2) db, 3) c?

2. Дадени сж елементитѣ 1,2,3,4,5,6. Въ колко пермутации елементитѣ 3,4 и 5 оставатъ заедно, 1) безъ да имъ се измѣни реда и 2) ако може да имъ се измѣни реда?

3. По колко начина могатъ се размѣни множителитѣ на произведенията:

1) ab^3 2) a^5q^2c 3) $a^{n-1}b$

4) $a^{n-4}b^3c$ 5) $a^{n-x}b^2c^3$ 6) $a^{m-n}b^3c^{n-2}$?

4. Ако сж дадени елементитѣ a,a,b,b,c,c,c, колко пермутации започватъ съ a, колко съ x и колко съ $cabb$?

5. Коя е 1) 50-а пермутация отъ $abcde$, 2) 200-а отъ 123456?

6. Коя пермутация по реда си е 1) пермутацията $cadfbe$ отъ $abcdef$, 2) пермутацията 456321 отъ 163452?

7. По колко разни начина могатъ насѣда 6 ученици на единъ училищенъ столъ, ако между тѣхъ има двама братя, които искатъ да бждатъ всѣкога единъ до другъ?

8. По колко разни начина могатъ насѣда 8 ученика на училищния столъ, но така, че между двама отъ тѣхъ да има всѣкога други трима?

9. Коя пермутация по реда си е: 1) висла отъ слива, 2) стол отъ лост, 3) блато отъ табло, 4) кюмур отъ юмрук?

10. Напишете 1) 43-а пермутация отъ икчан, 2) 254-а — отъ кучени, 3) 314-а — отъ ицертон!

11. Колко трицифрени и колко четирицифрени числа можемъ написа съ 9-тѣхъ цифри (безъ нулата) 1) безъ да се повтаря нѣкоя цифра и 2) ако се повтарятъ цифритѣ?

12. Какви ще сж резултатитѣ на прѣдпослѣдната задача, ако причислимъ и 0 къмъ горнитѣ цифри?

13. Дадени сж елементитѣ a,b,c,d,e,f,g,h; колко вариации безъ повтаряне отъ 5-ий класъ започватъ 1) съ af, 2) съ adg и 3) съ $begh$?

14. Кои и колко 4 цифрени числа могатъ се написа съ цифритѣ 5 и 7?

15. Отъ величинитѣ: a_1, d, n, a_n и S, които се срѣщатъ при аритметичнитѣ прогресии, всѣкога сж дадени три, а се диритъ останалитѣ двѣ; колко видове задачи сж възможни?

16. Колко комбинации безъ повтаряне отъ 4-и класъ на елементитѣ $abcdefghik$ започватъ съ: 1) a, 2) c, 3) bc, 4) ad, 5) bde?

17. Колко 4-цифрени числа могатъ се написа съ 9-тѣхъ цифри (нулата не се чете), но така, че по-голѣма цифра да не стои прѣдъ по-малка?

18. Колко комбинации съ повтаряне отъ 5-ий класъ на елементитѣ: a,b,c,d,f,g, започватъ съ 1) a, 2) bc, 3) dd?

19. По колко начина могатъ се размѣси 7 бои отъ разни цвѣтове 1) по двѣ, 2) по три, като се взематъ всѣкога по равни части?

20. На единъ банкетъ, дѣто присжтствували 20 души, при напиването тостъ всѣки трѣбвало да трака чашата си съ чашитѣ на другитѣ; колко тракания ставатъ при единъ тостъ?

21. Нѣкой ималъ 5 лампи, отъ които всѣка вечеръ запалвалъ двѣ, но не сжщитѣ. Слѣдъ колко дни ще запали сжщитѣ двѣ лампи?

22. Колко прави могатъ се прокара между 10 точки, отъ които никои три не лежатъ на една права?

23. Колко диагонала има единъ n—жгълникъ?

24. Въ колко точки се прѣсичатъ 15 (n) прави въ общо положение? Какъвъ е резултатътъ, ако между тия прави има 8 (m), успоредни по между си (никоя отъ успореднитѣ не минава прѣзъ нѣкоя прѣсѣчна точка на неуспореднитѣ)?

25. Въ колко точки се прѣсичатъ 25 (n) прави, между които нѣма успоредни, но 8 (m) прави минаватъ прѣзъ една точка? Какъвъ е резултатътъ, ако между горнитѣ прави има 6 въ общо положение, 11 (p)—успоредни и 8 (m) минаватъ прѣзъ една точка?

26. Колко равнини могатъ се прокара прѣзъ 10 (n) точки въ пространството, ако никои три нележатъ на една права и никои 4 на една равнина?

27. Колко ранини могатъ се прокара прѣзъ 23 точки, отъ които 5 лежатъ на една права, а 7 отъ останалитѣ лежатъ на една равнина (никои 3 отъ тия 7 не лежатъ на една права)?

28. По колко начина могатъ се изтегли 3 карти изъ едно тесте отъ 32 карти за игране?

29. По колко начина могатъ се разпрѣдѣли 1) 12 топки въ двѣ урни и то въ едната 5, а въ другата 7 и 2) 22 топки въ 3 урни и то въ първата 5, въ втората 6 и въ третата 11?

30. Въ една урна има 8 черни и 7 червени топки; колко сж възможнитѣ случаи, че като извадимъ 5 топки, между тѣхъ ше има: 1) само черни, или само червени, 2) 4 черни и 1 червена, 3) 3 черни и 2 червени, 4) 2 черни и 3 червени, 5) 1 черна и 4 червени?

31. По колко начина може да се разложи произведение отъ 12 първоначални множители 1) на 6 произведения отъ по 2 множители, 2) на 4 произведения отъ по 3 множители, 3) на 3 произведения отъ по 4 множители и 4) на 2 произведения отъ по 6 множители?

32. При всѣка отъ Аполоновитѣ задачи за допиране сж дадени три елемнити. Колко такива задачи има, когато за елементи се взиматъ 1) въ равнината: точка, права и окржжность, 2) въ пространството: точка, равнина и сфера?

33. Колко камъни има играта домино, ако всѣки камъкъ съдържа двѣ отъ числата: 0,1,2,...6?

34. Колко различни трицвѣтни знамена могатъ се направи отъ 9 разноцвѣтни платове (бѣлъ, черъ и 7-тѣхъ цвѣтове на спектра)?

35. Ако хвърляме съ 2, 3, или 4 зара, по колко различни начини могатъ да паднатъ заровеТѣ? Какъвъ е резултатътъ, ако изключимъ начинитѣ, при които всички зарове показватъ едно и сѫщо число точки?

36. Буквитѣ употрѣбявани при Морзова телеграфъ, сѫ вариации съ повтаряне отъ 1-ий до 4-ий класъ включително на елементитѣ . и — . Колко закове сѫ възможни?

37. По колко начина могатъ се извади изъ едно тесте отъ 52 карти за игра 3 карти, между които да има 1) двѣ 2) поне двѣ отъ еднакъвъ цвѣтъ?

38. Колко различни дѣлители има произведението $a^3b^2c^5d$, дѣто a,b,c,d сѫ първоначални числа?

39. На колко дадени елементи числото на комбинациитѣ безъ повтаряне отъ 2-ий класъ е 55?

40. Колко елементи даватъ 1680 вариации безъ повтаряне отъ 4-ий класъ?

ГЛАВА IX.

Фигурни числа.

I.

Аритметиченъ ⊿-къ.

§ 82 Ако въ числото C_n^m замѣнимъ m съ 0, 1, 2, 3, ... n, ще получимъ числения редъ:

$$C_n{}^0,\ C_n{}^1,\ C_n{}^2, \ldots\ldots C_n{}^{n-2},\ C_n{}^{n-1},\ C_n{}^n \ldots (I).$$

Понеже $C_n{}^m = C_n{}^{n-m}$ (§ 77, 3), то числата на този редъ иматъ свойството, че еднакво отдалеченитѣ отъ крайщата му, сѫ равни помежду си.

Отъ реда (I), чрѣзъ послѣдователно замѣстване на n съ 1,2,3,... и т. н. получаваме редоветѣ:

C^1_0, C^1_1, C^0_2, C^1_2, C^2_2, C^0_3, C^1_3, C^2_3, C^3_3, C^0_4, C^1_4, C^2_4, C^3_4, C^4_4, и т. н.,

или което е все едно, редоветѣ:

1, 1; 1, 2, 1; 1, 3, 3, 1; 1, 4, 6, 4, 1; и т. н. (II).

Таблицата:

1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
. .	.	.	.	.	.	.	;

съставена отъ числата на редоветѣ (II) се нарича аритметиченъ ⊿-къ или ⊿-къ на Паскалъ. Въ тази таблица числата, що сѫ едно до друго, образуватъ редъ, а тѣзи що сѫ едно подъ друго, — колона. Първата колона, съставена само отъ единици и отдѣлена отъ другитѣ чрѣзъ черта, не се смѣта между колонитѣ: първа колона е тази, що е на първо мѣсто на дѣсно отъ чертата.

Паскалъ е роденъ въ Клермонъ (Франция) въ 1628 год. и е умрѣлъ въ Парижъ въ 1662 год.: направилъ е много за геометрията, алгебрата и механиката; заедно съ Fermat е създатель на теорията на вѣроятноститѣ; съчинението му за аритметичния трижгълникъ е напечатано въ 1653 година.

II.

Фигурни числа.

§ 83. Числата, които съставятъ аритметичния ⊿-къ, се наричатъ фигурри числа и сѫ отъ разни степени: числата отъ първата колона (броено отъ чертата на дѣсно) се наричатъ фигурни числа отъ I-а степень; тия отъ II-а колона—фигурни числа отъ II-а степень, отъ третата колона—фигурни числа отъ III-а степень и т. н. Наричатъ се тѣзи числа фигурни, защото прѣдставляватъ числото на сфери (на точки), отъ които може да се образува: 1) редъ, прѣдставляющъ реда на натуралнитѣ числа: така сѫ наредени, напр., сферитѣ въ страната не всѣки пластъ отъ трижгълната грамада; 2) равностраненъ ⊿-къ: такъвъ е сферичния пластъ на всѣка ⊿-на грамада; 3) пирамида: такава е сферичната трижгълна грамада. По тази причина и фигурнитѣ числа се наричатъ: линейни (отъ I-а степень), трижгълни (отъ II а степень) и трижгълно-пирамидни (отъ III-а степень).

Задачи.

2. *Кое е m^o фигурно число отъ $n^н$ редъ?*

Това число е $C_n{}^m$. Така, 3-о фигурно число отъ 4-ия редъ е $C^3_4 = C^1_4 = 4$; четвъртото фигурно число отъ 5-ия редъ е $C^4_5 = C^1_5 = 5$ и т. н. Тукъ m показва степеньта на фигурното число, а n—реда, въ който се намира това число.

3. ***Кое е m^o фигурно число отъ n^a степень?*** Нека намѣримъ въ кой редъ е това число. Понеже началото на всѣка колона е едно мѣсто по-надолу отъ онова на прѣдидущата, то n-а колона ще започва $n-1$ мѣста по-надолу отъ началото на първата колона. Слѣдов., m-о фигурно число отъ n-а степень е въ $m+n-1$ редъ и отъ тукъ m-о фигурно число отъ n-та степень е n-о фигурно число отъ $m+n$ 1 редъ и, спордъ 1-а задача, то е

$$C^n_{m+n-1}=CC^n_m=\frac{m(m+1).\ .\ .\ .(m+n-1)}{1.2.3.\ .\ .\ .\ .\ .(n-1).n}.$$

Примѣри.

1. Кое е 5^o фигурно число отъ $6^{ия}$ редъ?

Отг. $C^5_6=C^1_6=6.$

2. Кое второто фигурно число отъ 5^a степень.

Отг. $CC^5_2=\dfrac{2.3.4.5.6}{1.2.3.4.5}=6.$

Свойства.

§ 84. I-о. ***Всѣко фигурно число е сума отъ фигурното число, що е надъ него и фигурното число, що е на лѣво отъ послѣдното число.*** Така, четвъртото фигурно число, отъ петия редъ (5) е равно на 4-о фигурно число отъ 4-ия редъ (1) и третото фигурно число отъ 4-ия редъ (4): $C^4_5=C^4_4+C^3_4$.

Доказателство на това свойство се заключава въ теоремата $C^m_n=C^m_{n-1}+C^{m-1}_{n-1}$.

Това свойство на фигурнитѣ числа спомага, за да се напишатъ числата на кой и да е редъ отъ аритметичния Δ-къ, ако се знаятъ само числата на най-близкия му прѣдидущъ редъ. Така, числата на 5-ия редъ, получени отъ онѣзи на 4-ия редъ, сж: 1; 1+4; 4+6; 6+4; 4+1; 1.

II-о. ***Сумата на първитѣ m фигурни числа отъ n^a степень е равна на m^o фигурно число отъ $n+1$ степень.*** Така, сумата на първитѣ петь фигурни числа отъ II-а степень е равна на 5-о фигурно число отъ III-а степень:

$$1+3+6+10+15=35.$$

Доказателството на това свойство се заключава въ теоремата:

$$C^m_n=C^{m-1}_{n-1}+C^{m-1}_{n-2}+C^{m-1}_{n-3}+\ .\ .\ .$$

Тукъ:

$$C^2_2+C^2_3+C^2_4+C^2_5+C^2_6=C^3_7,$$

или

$$1+3+6+10+15=35.$$

Примѣри.

1. Колко е сумата на първитѣ десеть фигурни числа отъ III-а степень?

Рѣшение. Търсената сума е равна на 10-то фигурно число отъ 4-а степень:

$$CC^4_{10}=\frac{10.11.12.13}{1.2.3.4}=715.$$

2. Намѣри сумата на фигурнитѣ числа отъ II-а степень отъ V-о до X-о, включително.

Рѣшение. Отъ сумата на първитѣ десеть фигурни числа отъ II-а степень, като извадимъ сумата на първитѣ четири фигурни числа отъ сжщата степень, ще намѣримъ търсената сума.

$$CC^3_{10}-CC^3_4=\frac{10.11.12}{1.2.3}-\frac{4.5.6}{1.2.3}=200.$$

3. Колко сж сферитѣ въ n-ия пластъ на трижгълната грамада?

Рѣшение. Търсеното число на сферитѣ е равно на n-о фигурно число отъ II-а степень; слѣдов., $CC^2_n=\dfrac{n(n+1)}{1.2}$.

Споредъ това: въ V-ия пластъ на трижгълната грамада има $CC^2_5=\dfrac{5\ .\ 6}{1\ .\ 2}=$ 15 сфери; въ X-ия пластъ $CC^2_{10}=\dfrac{10\ .\ 11}{1\ .\ 2}=55.$

4. Колко сфери съдържа трижгълна грамада съ 15 пласта?

Рѣшение. Сферитѣ въ разнитѣ пластове сж фигурни числа отъ II-а степень; слѣдов, тукъ се търси сумата на първитѣ 15 фигурни числа отъ II-а степень, а тази сума, както знаемъ, е равна на 15-о фигурно число отъ III-а степень; слѣдов.,

$$CC^3_{15}=\frac{15.16.17}{1.2.3}=680.$$

5. Колко сж сферитѣ въ трижгълна грамада съ n пласта?

Рѣшение. Търси се сумата на първитѣ n фигурни часла отъ II-а степень и ако тази суиа е S, то

$$S=CC^3_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}.$$

6. Колко сж сферитѣ въ прѣсечена трижгълна грамада, въ която страната на долната основа съдържа деветнадесеть сфери, а страната на горната основа тринадесеть сфери?

Рѣшение. Търси се сумата на фигурнитѣ числа отъ 13-о до 19-о, включително, слѣдов.:

$$S=CC^3_{19}-CC^3_{12}=\frac{19.20.21}{1.2.3}-\frac{12.13.14}{1.2.3}=1330-364=966.$$

Съ фигурнитѣ числа сѫ се занимавали Никомахъ въ аритметиката си и Теонъ въ книгата си. „Нѣща полезни при четенето на Платона. У тѣхъ първоначалнитѣ числа сѫ нарѣчени линейни; разлагаемитѣ на два прости множители (6=2×3)—плоски (трижгълни, полигонни) и разлагаемитѣ на три прости множители (30=2×3×5) — тѣлесни (пирамидни) числа. Както Никомахъ, така и Теонъ сѫ изложили въ книгитѣ си учението на Питагорейцитѣ за числата.

Никомахъ е еврейнъ отъ Герасъ; принадлѣжи на II-а Александрийска школа; родилъ се 50 г. слѣдъ Р. Хр. и умрѣлъ около годината 100. Неговата аритметика (по-добрѣ: латинската ѝ компиляция на Боеций) е била настолна книга за математицитѣ близу 1000 години. Книгата на Никомаха има чисто аритметично направление; геометрични доказателства на аритметичнитѣ теореми нѣма.

Теонъ, роденъ въ Смирна, е умрѣлъ около 150 год. слѣдъ Р. Хр.; принадлѣжи на II-а Александрийска школа.

Никомахъ и Теонъ сѫ учени отъ второстепенна важность.

Съ Фигурнитѣ числа сѫ се занимавали въ по-ново врѣме Maurolycus (1575 год.), Beuz (1621 год.) и Faulhaber. Прѣдставянето на фигурно число въ видъ на частно отъ произведения на слѣдващитѣ му фигурни числа е дадено пръвъ пѫть отъ Fermat (писмо до Roberval отъ 4 ноемврий 1636 год.) и послѣ отъ Pascal (Traité des ordres numériques).

Задачи и упражнения.

1) Кое е 4-о фигурно число 1) отъ петия, 2) отъ деветия и 3) отъ двадесетия редъ?

2. Кое е 1) петото, 2) осмото и 2) петнадесетото фигурно число отъ 16-ия редъ?

3. Кое е петото фигурно число 1) отъ шеста, 2) отъ десета и 3) отъ дванадесета степень?

4. Кое е 1) третото, 2) седмото и 3) десетото фигурно число отъ шеста степень?

5. Да се прѣдстави 1) третото, 2) петото и 3) десетото фигурно число, като сума отъ други двѣ фигурни числа.

6. Да се намѣри сумата на първитѣ 15 фигурни числа отъ 1) 5-а, 2) 8-а, 3) 12-а степень?

7. Да се намѣри сумата на фигурнитѣ числа 1) отъ трета, 2) отъ осма и 3) отъ дванадесета степень отъ 5⁰ до 20⁰ включително.

8. Колко сфери съдържа 1) седмия, 2) деветия и 3) двадесетия пластъ на дадена трижгълна пирамида?

9. Колко сфери съдържа една трижгълна грамада, която се състои 1) отъ 7, 2) отъ 12 и 3) отъ 20 пласта?

10. Колко сѫ сферитѣ въ прѣсечена трижгълна грамада, на която страната на долната основа съдържа 7, 12, 18, 22, 30 сфери, а страната на горната основа съдържа съотвѣтно 4, 8, 14, 16 и 25 сфери?

ГЛАВА X.

Биномна теорема.

I.

Произведение на биноми съ равни първи членове.

§ 85. Чрѣзъ умножение намираме:

1. $(x+a)(x+b)=x^2+x(a+b)+ab$;

2. $(x+a)(x+b((x+c)=x^3+x^2(a+b+c)+x(ab+ac+bc)+abc$;

3. $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4+x^3(a+b+c+d)+x^2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)+x(abc+abd+acd+bcd)+abcd$

и т. н.

Изобщо, ако приемемъ горния законъ, по който слѣдватъ членоветѣ въ дѣснитѣ страни на горнитѣ равенства, за вѣренъ и при n такива биноми, то

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+k)=x^n+S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}+\ldots\ldots+S_{n-1}x+S_n\ldots\ldots \text{(I)},$$

дѣто S_1 е сумата на вторитѣ членове, S_2 — сумата на комбинациитѣ отъ II класъ на вторитѣ членове и т. н., S_{n-1} — сумата на комбинациитѣ отъ $n—1$ класъ на вторитѣ членове и S_n — произведението на вторитѣ членове. (Тукъ комбинациитѣ сѫ произведения).

Като приехме за вѣренъ закона, по който се съставя произведението на n биноми съ равни първи членове, лесно можемъ доказа, че сѫщиятъ законъ остава въ сила и за съставяне произведение отъ $n+1$ такива биноми. Така, като умножимъ двѣтѣ страни на равенството (I) съ бинома $x+l$ намираме:

$$(x+a)(x+a)(x+c)\ldots(x+k)(x+l)=x^{n+1}+x^n(S_1+l)+\\+x^{n-1}(S_2+S_1l)+x^{n-2}(S_3+S_2l)\ldots+x(S_n+S_{n-1}l)+S_nl\ldots\text{(II)},$$

дѣто S_1+l е пакъ сумата на вторитѣ членове; S_2+S_1l е сума отъ S_2, сир. отъ комбинациитѣ отъ II класъ на вторитѣ членове на първитѣ n биноми и S_1l, сир. отъ произведението на вторитѣ членове $a, b, c\ldots, k$ съ l; слѣдов., S_2+S_1l е пакъ сума отъ комбинациитѣ отъ II класъ на вторитѣ членове на всичкитѣ $n+1$ биноми и т. н.; $S_n+S_{n-1}l$ е сѫщо сума на комбинациитѣ отъ n-ия класъ на всичкитѣ втори $n+1$ членове и най-послѣ S_nl е произведението на всички втори членове. Съ това законътъ е доказанъ за произволно число биноми.

Произведението на биномитѣ

$$(x—a\ (x—b)\ (x—c)\ldots(x—k)$$

се съставя по сѫщия начинъ. Въ този случай

$$(x—a)\ (x—b)\ldots(x—k=[x+(—a)]\ [x+(—b)]\ldots[x+(—k)]=\\=x^n—S_1x^{n—1}+S_2x^{n—2}\ldots\pm S_n.$$

По сжщия начинъ се съставя и произведението

$$(x+a)\ (x-b)\ (x-c)\ (c+d)\ .\ .\ .\ (x\pm k).$$

Примѣри.

1. Да се изчисли произведението

$$P=(x+1)(x+2)x+3)(x+4).$$

Рѣшение. $P=(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=x^4+S_1x^3+S_2x^2+S_3x+S_4$;

$$S_1=1+2+3+4=10;$$
$$S_2=1.2+1.3+1.4+2.3+2.4+3.4=35;$$
$$S_3=1.2.3+1.2.4+1.3.4+2.3.4=50;$$
$$S_4=1.2.3.4=24.$$

Слѣдов.,

$$P=x^4+10x^3+35x^2+50x+24.$$

2. Да се изчисли произведението

$$P=(x+3)(x-4)(x+2)(x-5)(x+6).$$

Рѣшение. $P=x^5+S_1x^4+S_2x^3+S_3x^2+S_4x+S_5$;

$$S_1=2+3-4-5+6=2,$$
$$S_2=(2.3)+(2.-4)+(2.-5)+(2.6)+(3.-4)+(3.-5)+$$
$$+(3.6)+(-4.-5,+(-4.6)+(-5.6)=-43:$$
$$S_3=(2.3.-4)+(2.3.-5)+(2.3.6.)+(2.-4.-5)+(2.-4.6)$$
$$+(2.-5.6)+(3.-4.-5)+(3.-4.6)+(3.-5.6)+(-4.-5.6)=68;$$
$$S_4=(2.3.-4.-5)+(2.3.-4.6)+(2.3.-5.6)+(2.-4.-5.6)$$
$$+(3.-4.-5.6=396.$$
$$S_5=2.3.-4.-5.6=720.$$

Слѣдов.,

$$P=x^5+2x^4-43x^3+68x^2+396x+720.$$

2. Да се опрѣдѣли сбора на коефициентитѣ въ развитието на произведението

$$P=(1+2x)(1+3x)(1+5x).$$

Рѣшение.

$$P=1+S_1+S_2+S_3;$$
$$S_1=2x+3x+5x=10x;$$
$$S=2x.3x+2x.5x+3x.5x=31x^2;$$
$$S_3=2x.3x.5x=30x^3.$$

Слѣдов.,

$$P=1+10x+31x^2+30x^3$$

и търсената сума отъ коефициентитѣ е

$$1+10+31+30=72.$$

II.

Нютоновъ биномъ.

§ 86. При $a=b=c=\ .\ .\ .\ =k$, равенството

$$(x+a)(x+b)\ .\ .\ .\ (x+k)=x^n+S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}....+S_{n-1}x+S_n$$

взима вида

$$(x+a)(x+a)\ .\ .\ .\ (x+a)=x^n+(a+a+\ .\ .\ .+a)x^{n-1}+(a^2+a^2+a^2+a^2+....+a^2)x^{n-2}+\dots+(a^{n-1}+a^{n-1}+...+a^{n-1})x+a.a.a...a,$$

отдѣто

$$(x+a)^n=x^n+C^1{}_n\,x^{n-1}a+C^2{}_n\,x^{n-2}a^2+...+C_n{}^{n-1}xa^{n-1}+a^n \text{ (I)}.$$

Сжщо:

$$(x-a)^n=[x+(-a)]^n=x^n-C^1{}_n\,x^{n-1}a+C^2{}_n\,x^{n-2}a^2-...\pm a^n \text{ (II)}.$$

Изобщо,

$$(x\pm a)^n=x^n\pm C^1{}_n\,x^{n-1}a+C^2{}_n\,x^{n-2}a^2\pm C^3{}_n\,x^{n-3}a^3+\ .\ .\ .\ \pm a^n \text{ (III)}.$$

Равенството III се нарича Нютоновъ биномъ.

Нютоновиятъ биномъ служи за намиране разнитѣ степени на даденъ биномъ.

Дѣсната страна на равенството III (или I и II) се нарича биномно развитие; коефициентитѣ 1, C_n^1, C_n^2, ... C_n^{n-1}, C_n^n–биномни коефициенти и m-ия чл.: $T_m=C_n^{m-1}x^{n-m+1}a^{m-1}$–общъ членъ.

а) Биномно развитие.

§ 87. Биномното развитие е многочленъ, нареденъ по низходящитѣ степени на първия членъ x на дадения биномъ и по възходящитѣ на втория членъ a на сжщия биномъ.

Въ всѣки членъ сумата отъ показателитѣ на a и x е равна на показателя n на бинома.

Въ всѣки членъ показательтъ на x е равенъ на разликата отъ индекситѣ на биномния коефициентъ на члена, а оня на a—на горния индексъ отъ сжщия коефициентъ.

Най-високиятъ показатель на x (въ първия членъ) е равенъ на показателя на бинома; сжщото е и съ най-високия показатель на x (въ послѣдния членъ).

Първиятъ членъ не съдържа a, а послѣдниятъ — x.

Развитието има $n+1$ членове, понеже x се съдържа въ n члена и въ единъ (въ послѣдния) не се съдържа.

б) Биномни коефициенти.

§ 88. Биномниятъ коефициентъ на първия членъ е $1=C^0{}_n$; сжщо и оня на послѣдния членъ е $1=C_n^n$.

Биномниятъ коефициентъ на $(m+1)$-ия членъ е C_n^m, дѣто долниятъ индексъ е показатель на бинома, а горниятъ е съ единица по-малъкъ отъ нумера на члена.

Споредъ това, коефициентитѣ на 10, 15, 20, $S^{\text{-ия}}$ членове на степеньта $(x+a)^n$ сж:

$$C_n^9,\ C_n^{14},\ C_n^{19},\ C_n^{s-1},$$

а самитѣ членове:

$$T_{10}=C_n{}^9x^{n-9}a^9;\ T_{15}=C_n{}^{14}x^{n-14}a^{14};\ T_{20}=C_n^{19}x^{n-19}a^{19};$$

$$T_s=C_n{}^{s-1}x^{n-s+1}a^{s-1}.$$

Примѣри.

$$1.\ (x+a)^4=x^4+C_4^1x^3a+C_4^2x^2a^2+C_4^3xa^3+a^4$$
$$=x^4+4x^3a+6x^2a^2+4xa^3+a^4.$$

$$2.\ (x-a)^5=x^5-C_5^1x^4a+C_5^2x^3a^2-C_5^3x^2a^3+C_5^4xa^4-a^5$$
$$=x^5-5x^4a+10x^3a^2-10x^2a^3+5xa^4-a^5.$$

Свойства.

1. Биномниятъ коефициентъ на $(m+1)^{\text{-ия}}$ членъ отъ началото на развитието е C_n^m; биномниятъ коефициентъ на $(m+1)^{\text{-ия}}$ членъ отъ края на развитието е C_n^{n-m}; слѣдов.

Членоветѣ на развитието, които сж еднакво отдалечени отъ краищата му, иматъ равни биномни коефициенти (§ 77,3).

2. ***Коефициентитѣ на развитието се увеличаватъ отъ началото до срѣдата, а слѣдъ това се намаляватъ.***

Доказ. Като сравнимъ биномнитѣ коефициенти на $m+1$ и на m членове, сир. C_n^m и C_n^{m-1}, намираме:

$$C_n^m=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+2)(n-m+1)}{1.2.3.\ldots(m-1)m}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+2)}{1.2.3.\ldots(m-1)}\cdot\frac{n-m+1}{m}$$

$$=C_n^{m-1}\cdot\frac{n-m+1}{m},$$

отдѣто заключаваме, че кеефициентътъ на кой и да е членъ отъ развитието се получава отъ коефициента на прѣдидущия му членъ, като се умножи този коефициентъ съ дробьта $\frac{n-m+1}{m}$. Отъ тукъ слѣдва, че, до дѣто $\frac{n-m+1}{m}>1$, биномнитѣ коефициенти се увеличаватъ, а щомъ $\frac{n-m+1}{m}<1$, тѣ се намаляватъ. Рѣшението на неравенствата $\frac{n-m+1}{m}>1$ и $\frac{n-m+1}{m}<1$, относително m, ни дава:

$$m<\frac{n+1}{2}\text{ и }m>\frac{n+1}{2}$$

Слѣдов., до дѣто m е по-малко отъ половината на числото на членоветѣ, биномнитѣ коефициенти се увеличаватъ, а щомъ m надмине това число — започватъ да се намаляватъ.

Слѣдствия. I. Ако показательтъ на бинома е нечетно число, биномнитѣ кофициенти съставятъ двѣ симетрични половини. (Въ срѣдата на развитнето има два равни биномни кофициенги).

Примѣръ.

$$(x+a)^7=x^7+7x^6a+21x^5a^2+35x^4a^3+35x^3a^4+21x^2a^5+7xa^6+a^7.$$

Имаме:

1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.

II. Ако показательтъ на бинома е четно число биномнитѣ кофициенти сж симетрично разположени спрѣмо биномния коефциентъ на срѣдния членъ. (Въ срѣдата на развитието има единъ най-голѣмъ биноменъ кофициентъ).

Примѣръ.

$$(x+a)^6=x^6+6x^5a+15x^4a^2+20x^3a^3+15x^2a^4+6xa^5+a^6.$$

Имаме:

1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.

3. ***Всѣки биноменъ коефициентъ отъ развитието е равенъ на биномния коефициентъ отъ прѣдидущия си членъ, ако го има, умноженъ съ показателя на x въ този членъ и дѣленъ съ нумера на сжщия членъ.*** Това слѣдва отъ равенството:

$$C_n^m=C_n^{m-1}\cdot\frac{n-m+1}{m},$$

дѣто C_n^m е коефициентътъ на $m+1$ членъ; $C_n{}^{m-1}$ — коефициентътъ на $m^{\text{ия}}$ членъ; $n-m+1$ — показатель на x въ $m^{\text{ия}}$ членъ и m нумера на $m^{\text{ия}}$ членъ. Какъ се получава кой да е членъ на развитието отъ прѣдидущия си, ако го има, се види отъ слѣдното.

$$T_{m+1}=C_n{}^mx^{n-m}a^m=C_n{}^{m-1}\cdot\frac{n-m+1}{m}x^{n+m+1}a^{m-1}\cdot\frac{a}{x}$$

$$=C_n{}^{m-1}x^{n-m+1}a^{m-1}\cdot\frac{n-m+1}{m}\cdot\frac{a}{x}$$

$$=T_m\cdot\frac{n-m+1}{m}\cdot\frac{a}{x}.$$

Примѣри.

$$(x+a)^6=x^6+6x^5a+15x^4a^2+20x^3a^3+15x^2a^4+6xa^5+a^6.$$

Коефициентътъ на първия членъ е единица,

„ „ втория „ „ равенъ на показателя на бинома,

„ „ третия „ „ „ „ $\frac{5.6}{2}=15$,

„ „ четвъртия „ „ „ $\frac{4.15}{3}=20$

и т. н.

4. ***Сумата отъ биномнитѣ коефициенти на развитието е равна на 2, степенувано на n, сир. на показателя на бинома.*** Това слѣдва отъ равенството:

$$(x+a)^n=x^n+C_n^1x^{n-1}a+C_n^2x^{n-2}a^2+\ldots\ldots+C_n^{n-1}xa^{n-1}+a^n,$$

което при $x=a=1$ дава

$$2^n=1+C_n^1+C_n^2+C_n^3+\ldots\ldots+C_n^{n-1}+1.$$

5. ***Сумата отъ биномнитѣ коефициенти отъ четнитѣ мѣста на ризвитието е=на сумата отъ биномкитѣ коефициенти на нечетнитѣ мѣста.*** Това слѣдва отъ равенството:

$$(x-a)^n=x^n-C_n^1x^{n-1}a+C_n^2x^{n-2}a^2-C_n^3x^{n-3}a^3+\ldots\ldots,$$

което при $x=a=1$ дава

$$0=1-C_n{}^1+C_n{}^2-C_n{}^3+\ldots\ldots,$$

отдѣто $C_n{}^1+C_n{}^3+C_n{}^5+\ldots=1+C_n{}^2+C_n{}^4+C_n{}^6+\ldots$

Понеже двѣтѣ суми въ двѣтѣ страни на послѣдното равенство даватъ сума 2^n, то всѣка отъ тѣхъ е равна на $\frac{2^n}{2}=2^{n-1}$.

Паскалевъ (аритметиченъ) △-къ.

Отъ биномнитѣ коефициенти на $(x+a)$, $(x+a)^2$, $(x+a)^3$. . , $(x+a)^n$, може да се състави таблицата.

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
. . . , ...

Отъ тази таблица, която се нарича Паскалевъ △-къ и, за която говорихме другадѣ (§ 82), най-добрѣ се вижда симетрията на биномнитѣ коефициенти [числата на $n^{ия}$ редъ сж биномни коефициенти отъ развитието на $(x+a)^n$].

в) Общъ членъ на развитието.

§ 89. Членътъ $T_m=C_n^{m-1}x^{n-m+1}a^{m-1}$ се нарича **общъ членъ на развитието**, защото при $m=1, 2, 3, 4, \ldots . n, n+1$ ни дава 1-и, 2-и, 3-и, . . . n-и. $(n+1)$-и членове на това развитие. Така, при $m=1$, получаваме $T_1=C_n^0x^{n-1+1}a^0=x^n$,

„ $m=2$, „ $T_2=C_n^1x^{n-2+1}a^1=C_n{}^1x^{n-1}a$,

„ $m=3$, „ $T_3=C_n^2x^{n-2}a^2$

и т. н.

Задачи.

1. Въ развитието на бинома

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{3a^2}{x}\right)^{10},$$

кой членъ не съдържа x?

Рѣшение. Ако този членъ е m-ия членъ, то

$$T_m=C_{10}^{m-1}\left(\frac{x}{a}\right)^{11-m}\!\!,\left(\frac{3a^2}{x}\right)^{m-1}=C_{10}^{m-1}.\,3^{m-1}.\,a^{3m-13}.\,x^{12-3m},$$

отдѣто $x^{12-2m}=x^0$; $12-2m=0$ и $m=6$.

Слѣдов., търсениятъ членъ е шестия членъ на развитието.

2. Да се намѣри оня членъ отъ развитието на

$$\left(a\sqrt{x}+\frac{b}{\sqrt{x}}\right)^y,$$

който съдържа $\sqrt{x}$, ако сборътъ отъ биномнитѣ коефициенти на втория и третия членове е $=15$.

Рѣшение. Намираме първо y и послѣ търсения членъ.

1) $C_y^1+C_y^2=15$; $y+\frac{y(y-1)}{2}=15$; $y=(y_1)=5$.

2) $T_m=C_5^{m-1}(a\sqrt{x})^{6-m}.\left(\frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{m-1}=C_5^{m-2}\ a^{6-m}b^{m-1}(\sqrt{x})^{7-2m}$,

отдѣто

$(\sqrt{x})^{7-2m}=(\sqrt{x})^1$; $7-2m=1$ и $m=3$.

Слѣдов., търсениятъ членъ е третия членъ на развитието.

III.

Степенуване на многочленъ.

§ 90. Степенуването на многочлени се привожда къмъ степенуване на биноми. Така,

$$(a+b+c)^n=[a+(b+c)]^n=a^n+C^1{}_n\,a^{n-1}(b+c)+C^2{}_n\,a^{n-2}(b+c)^2+$$
$$+C^3{}_n\,a^{n-2}\,(b+c)^3+\ldots\ldots+(b+c)^n,$$

Примѣръ,

$$(a+b+c)^3=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3$$
$$=a^3+3a^2b+3a^2c+3a(b^2+2bc+c^2)+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$$
$$=a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$$

Степенуването на полинома $a+b+c+\;.\;.\;.\;.+k$ на n може да се извърши и направо чрѣзъ n послѣдователни умножения. Извършенитѣ умножения ни даватъ всички възможни вариации съ повторение отъ n-ия класъ на елементитѣ $a, b, c, \ldots k$. Ако слѣдъ това направимъ привеждане, сир. съединимъ въ единъ членъ всичкитѣ членове, които съдържатъ едни и сжщи фактори (само че пермутирани), ще получимъ всичкитѣ възможни комбинации съ повторение на елементитѣ $a, b, c, \ldots, k$ отъ n-ия класъ; всѣка комбинация се умножава съ числото на пермутациитѣ. Отъ тукъ: членоветѣ отъ развитието на степеньта $(a+b+c+\;.\;.\;.\;k)^n$ ще сж отъ вида

$$\frac{n\,!}{\alpha!\beta!\gamma!..}a^{\alpha}\;b^{\beta}\;c^{\gamma}\;.\;.\;.\;.\;,$$

дѣто на $\alpha, \beta, \gamma, \ldots.$ трѣбва да даваме всички цѣли значения отъ реда 0, 1, 2, 3, 4 . . . , n, но тъй, че $\alpha+\beta+\gamma+\;.\;.\;.\;.=n$.

Отъ казаното до тукъ слѣдва още, че развитието на $(a+b+c+\;.\;.+k)^n$ съдържа CC^n_m членове, дѣто m означава броя на членоветѣ на полинома Споредъ това, развитията на $(a+b+c)^2$, на $(a+b+c+d)^3$, на $(a+b+c+d+e)^5$ съдържатъ:

$$CC^2_3=\frac{3.4}{1.2}=6\,;\;CC^3_4=\frac{4.5.6}{1.2.3}=20\,;\;CC^5_5=\frac{5.6.7.8.9}{1.2.3.4.5}=126 \text{ членове.}$$

Въ книгата на Nicola Tartaglia (1500—1557 г.) „Trattato de numeri e misuri“ между другото е дадено и развитието на биномъ за цѣлъ, положителенъ показатель. Законътъ за образуването на биномнитѣ коефициенти на развитието е изложенъ у Viéte (1540—1602) въ книгата му „in artem analiticam Isagoge“ (1591 г.). За бързото намиране на биномнитѣ коефициенти, Паскалъ е съставилъ аритметичния △-къ (1653 г). Подобна таблица се намира и въ аритметиката на Stifel, напечатана въ Нюренбергъ въ 1544 г. Биномната теорема и биномнитѣ коефициенти за произволенъ реаленъ показатель сж дадени за пръвъ пжть отъ Нютона (1676 г.), по която причина теоремата носи още и названието Нютоновъ биномъ.

Задачи и упражнения.

1. Да се развиятъ произведенията:

1) $(x+1)\;(x+3)\;(x+5)$. 2) $(x+3y)\;(x+5y)\;(x+10y)$.
3) $(x-1)\;(x-2)\;(x-3)$. 4) $(x-6)\;(x-3)\;(x-1)$.
5) $(x+4)\,(x-5)\;(x-6)\;(x+7)$. 6) $(x+3)^2(x+4)^2$.

2. Да се папишатъ 3-ия и 5-ия членове отъ развитието на произведението:

$$(x+1)\;(x-2)\;(x+3)\;(x-4)\;(x+5)\;(x-6).$$

3. Кои сж коефициентитѣ на наредено уравнение, което има корени:

1) 3,—4, 5,—2? 2) 1,—1, 2,—3, 4?

4. Да се развиятъ степенитѣ:

1) $(a+b)^5$. 2) $(x+y)^6$. 3) $(1\pm x)^7$.
4) $(3a+2b)^7$. 5) $(2x-\frac{1}{2}y)^4$. 6) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^5$.

5. Напишете биномнитѣ коефициенти на членоветѣ, които съдържатъ: 1) $a^{10}b^6$, 2) a^6b^{10}, 3) a^9b^7, 4) a^7b^9, 5) a^8b^8 отъ развитието на степеньта $(a+b)^{16}$!

6. Седмиятъ биноменъ коефициентъ въ развитието на степеньта $(a+b)^{18}$ е 31824; да се изчислятъ 8-ия, 9-ия и 10 ия биномни коефициенти.

7. Напишете срѣдния членъ отъ развитието на 1) $(a+b)^8$, 2) $(x+y)^{10}$ и 3) $(a+b)^n$, дѣто n е четно число!

8. Напишете двата срѣдни члена отъ развитието на 1) $(x+a)^5$, 2) $(a+b)^9$, 3) $(x+y)^n$, дѣто n е нечетно число!

9. Кой членъ въ развитието на степеньта $\left(x^7+\frac{1}{x^7}\right)^n$ не съдържа x, като се знае, че третиятъ биноменъ коефициентъ е равенъ на 45?

10. Да се развиятъ степенитѣ:

1) $(x^2+1)^5$. 2) $(1-x^3)^6$. 3) $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)^4$.
4) $(3a^2b-4ab^2)^6$. 5) $\left(\frac{2x}{3y^2}-\frac{3y}{4x^9}\right)^5$. 6) $\left(\frac{x^2y^3}{z^4}+\frac{z^3}{xy}\right)^6$.

11. Да се изчислятъ изразенията:

1) $(2+\sqrt{5})^4+(2-\sqrt{5})^4$. 2) $(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^5-(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^5$.

12. Да се изчислятъ, споредъ биномното развитие, до 5 десетични мѣста, степенитѣ:

1) $\left(1+\frac{1}{10}\right)^6$. 2) $\left(1-\frac{1}{20}\right)^5$. 3) $(1{\cdot}03)^8$.
4) $\left(\frac{49}{50}\right)^9$ 5) $\left(\frac{99}{101}\right)^{10}$. 6) $\left(\frac{371}{375}\right)^{15}$.

13. Капиталъ отъ 1000 лв., даденъ по $5^0/_0$, въ каква сума ще нарастне слѣдъ 10 години? Да се развие степеньта $\left(1+\frac{5}{100}\right)^{10}$ и да се вематъ подъ внимание само първитѣ 6 члена.

14. Да се развиятъ степенитѣ:

1) $\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)^3$. 2) $\left(\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}-\sqrt[4]{b^3}\right)^4$.

ГЛАВА XI.

Вѣроятности.

Опрѣдѣления.

§ 91. Сбѫдването или несбѫдването на сѫбитията зависи отъ много причини. При нѣкои събитя тѣзи причини сѫ извѣстни, а при други—не. Вторитѣ събития сѫ случайни събития; такива сѫ: пожаритѣ, ражданията, смъртностьта, прѣстѫпленията, печалбитѣ и загубитѣ, повишаването и понижаването на цѣннитѣ книжа и др.

При случайнитѣ събития дѣйствуватъ два вида причини: постоянни и промѣнливи. Първитѣ дѣйствуватъ по познати и опрѣдѣлени начини, а вторитѣ — не. Така, на температурата на дадено мѣсто въ опрѣдѣленъ день и часъ прѣзъ годината влияятъ: 1) постоянни причини: слънчевата топлина, географическото положение и видътъ на повърхнината на мѣстото, 2) промѣнливи причини: посоката на вѣтъра, влажностьта, атмосферното налягане и др. На събитието — изваждане една бѣла топка съ едно бръкване въ една урна (непрозраченъ сѫдъ) съ 10 бѣли и 6 черни топки — влияятъ 1) постоянни причини: числото на топкитѣ отъ разнитѣ цвѣтове (10 бѣли и 6 черни), 2) промѣнливи причини: различното разположение на топкитѣ въ урната и начина на движението на рѫката. Поради промѣнливитѣ причини едно отъ събитията се сбѫдва ту по-рано, ту по-кѫсно отъ друго, а поради постояннитѣ — едно отъ събитията се сбѫдва повечко пѫти отъ друго или, както се казва, пò е вѣроятно отъ друго. Нѣкои комбинации отъ тѣзи причини ни привождатъ къмъ условия благоприятни за сбѫдването на случайното събитие, а други — не. Първитѣ комбинации ще ги наричаме благоприятни случаи на събитието, а вторитѣ—неблагоприятни. Всевъзможнитѣ комбинации на причинитѣ, които ни призождатъ и къмъ благоприятни и къмъ неблагоприятни условия за сбѫдване на събитието, ще нанаричаме всевъзможни (еднакво възможни) случаи за това събитие. Така, въ примѣра съ урната имаме: 10 благоприятни случаи, 6—неблагоприятни и 16 — всевъзможни за вадене бѣла топка и 6 благоприятни, 10 — неблагоприятни и 16 всевъзможни случаи за вадене черна топка.

§ 92. Ако въ една урна има 10 бѣли топки и само 6 черни. то по е за вѣрване (или както казватъ, по е вѣроятно), че извадената топка отъ урната още при първо опитване, ще е бѣла а не черна. Отъ тукъ: събитието е толкова по-вѣроятно, колкото повече сѫ благоприятнитѣ му случаи.

Ако ли въ урната имаше 8 черни топки, намѣсто 6, то шансътъ да се извади, още при първо опитване бѣла топка, щѣше да е по-малъкъ отъ оня при 6 черни топки, макаръ и числото на бѣлитѣ топки да е пакъ 10—тукъ влияе числото на всевъзможнитѣ случаи, които

въ първия случай сѫ 16, а въ втория—18. Отъ тукъ: при еднакво число благоприятни случаи събитието е толкова по-вѣроятно, колкото по-малко сѫ всевъзможнитѣ случаи.

§ 93. Математическа вѣроятность на едно случайно събитие се нарича отношението на числото на благоприятнитѣ му случаи къмъ числото на всевъзможнитѣ случаи.

Науката, която ни дава правила за опрѣдѣляне точната величина на вѣроятностьта на всѣко случайно събитие, се нарича теория на вѣроятностьта.

Проста вѣроятность.

§ 94. Видѣхме, че математическата вѣроятность на едно очаквано събитие е отношение на числото на благоприятнитѣ за сбѫдването му случаи къмъ числото на всичкитѣ възможни случаи; тази вѣроятность се нарича още проста вѣроятность. Ако благоприятнитѣ случаи на едно събитие сѫ a, всичкитѣ възможни случаи—b, то простата вѣроятность на това събитие е $\frac{a}{b}$. Понеже винаги $a<b$, то простата вѣроятность е всѣки пѫть правилна дробь и отъ тукъ: крайнитѣ значения на вѣроятностьта на едно събитие сѫ 0 и 1; въ първия случай $a=0$, сир. нѣма благоприятни случаи, а въ вторая $a=b$, сир, всичкитѣ случаи сѫ благоприятни. При вѣроятность 0 имаме невъзможность: събитието съвсѣмъ нѣма да се сбѫдне, а при вѣроятность 1 — сигурность: събитието непрѣменно ще се сбѫдне. Освѣнъ това, казваме още, че при вѣроятность $>\frac{1}{2}$ събитието е невѣроятно; при вѣроятность $>\frac{1}{2}$ събитието е вѣроятно и при вѣроятность $=\frac{1}{2}$ събитието е съмнително.

§ 95. Отношението на неблагоприятнитѣ случаи на едно събитие къмъ всичкитѣ възможни случаи се нарича обратна вѣроятность на събитието. Ако благоприятнитѣ случаи на събитието сѫ a и всички възможни случаи — b, то обратната вѣроятность на това събитие е $\frac{b-a}{b}$.

Понеже $\frac{a}{b}+\frac{b-a}{b}=1$, то сумата отъ простата и отъ обратната вѣроятность на едно събитие е равна на 1 и отъ тукъ: едната вѣроятность е равна на 1 безъ другата вѣроятность. Споредъ това, ако $\frac{5}{6}$ е простата вѣроятность на събитието, то $1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$ е обратната му вѣроятность.

Примѣри.

1. Въ една урна има 8 бѣли и 4 черни топки; съ каква вѣроятность може да се твърдй, че една извадена топка ще е 1) бѣла, 2) черна?

Рѣшение. $V_1=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$; $V_2=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$.

2. Изъ едно тесте отъ 52 карти за игра измъкваме една карта; съ каква вѣроятность може да се твърдй, че измъкнатата карта е 1) фигура, 2) купа?

Рѣшение. Фигуритѣ сж 12, а купитѣ 13; слѣдов..

$$V_1=\frac{12}{52}=\frac{2}{13};\ V_2=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}.$$

3. Съ каква вѣроятность може да се твърдй, че при хвърляне съ единъ заръ ще получимъ числото 6?

Рѣшение. Всичкитѣ възможни случаи сж 6, защото стѣнитѣ на зара сж 6; благоприятни случаи има само 1, защото число 6 има само на една стѣна; слѣдов.,

$$V=\frac{1}{6}.$$

4. Съ каква вѣроятность може да се твърдй, че при хвърляне съ два зара ще получимъ сумата 5?

Рѣшение. Всичкитѣ случаи сж $VV_6^2=36$; благоприятнитѣ случаи сж 4 (1, 4; 2, 3; 3, 2; 4, 1): слѣдов.

$$V_5=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}.$$

Тотална вѣроятность.

§ 96. Ако между b еднакво възможни случаи има a благоприятни случаи за събитието A, a_1 благоприятни случаи за събитието A_1, a_2 — за събитието A_2, ... , то вѣроятностьта, че ще се сбжднe или събитието A или събитието A_1 е $\frac{a+a_1}{b}$, защото числото на благоприятнитѣ случаи въ този случай е $a+a_1$; вѣроятностьта, че ще се сбжднe или събитието A, или събитието A_1, или събитието A_2 е $\frac{a+a_1+a_2}{b}$, защото въ този случай числото на благоприятнитѣ случаи на събитието е $a+a_1+a_2$ и т. н.

Вѣроятностьта за сбждването на едно кое да е отъ нѣколко независими едно отъ друго събития се нарича тотална вѣроятность. Понеже $\frac{a+a_1}{b}=\frac{a}{b}+\frac{a_1}{b}$; $\frac{a+a_1+a_2}{b}=\frac{a}{b}+\frac{a_1}{b}+\frac{a_2}{b}$ и т. н., то тоталната вѣроятность е равна на сумата отъ отдѣлнитѣ прости вѣроятности.

Отъ тукъ слѣдва, че ако нѣкое събитие ни привожда къмъ n отдѣлни събития, то тоталната вѣроятность за сбждването на кое да е отъ n-тѣ отдѣлни събития е равна на 1.

Примѣръ.

Въ единъ сждъ има 5 червени 4 сини и 3 жълти топки; съ каква вѣроятность може да се твърдй, че една извадена топка е 1) или червена или синя? 2) или червена, или синя, или жълта?

Рѣшение.

$$V_1=\frac{5}{12}+\frac{4}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4};$$

$$V_2=\frac{5}{12}+\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{12}{12}=1.$$

Сложна вѣроятность.

§ 98. Нека разгледаме двѣ събития A и A_1, които се сбждватъ или едноврѣменно, или едно слѣдъ друго и нека всичкитѣ възможни случаи при първото събитие да сж b и при второто b_1. Всѣки случай отъ първото събитие може да се комбинира съ всѣки случай отъ второто и затова, при съвмѣстното разглеждване на двѣтѣ събития, числото на всичкитѣ възможни случаи е равно на произведението bb_1. Ако числото на благоприятнитѣ случаи на първото събитие е a и на второто a_1, то всѣки благоприятенъ случай отъ първото събитие може да се комбинира съ всѣки благоприятенъ случай на второто; слѣдов., числото на случаитѣ, които благоприятствуватъ за сбждването на двѣтѣ събития A и A_1, е равно на произведението aa_1. Отъ тукъ слѣдва, че вѣроятностьта за едноврѣменното или послѣдователното сбждване на двѣтѣ събития A и A_1, е $\frac{aa_1}{bb_1}=\frac{a}{b}.\frac{a_1}{b_1}$, т. е, равна на произведението отъ проститѣ вѣроятности на отдѣлнитѣ събития. Сжщото е и за случая, когато събитията сж повече отъ 2. Слѣдов., Вѣроятностьта за едноврѣменното или послѣдователното сбждване на нѣколко независими помежду си събития, нарѣчена сложна вѣроятность, е равна на произведението отъ вѣроятноститѣ на отдѣлнитѣ събития.

Примѣръ.

Въ една урна има 5 бѣли и 6 черни топки, а въ друга 4 бѣли и 5 черни топки; съ каква вѣроятность може да се твърдй, че като извадимъ по една топка отъ всѣки сѫдъ, тѣ ще бѫдатъ 1) и двѣтѣ бѣли, 2) бѣла отъ първия и черна отъ втория сѫдъ, 3) черна отъ първия и бѣла отъ втория сѫдъ, 4) и двѣтѣ черни топки.

Рѣшение.

$$1)\ V_1=\frac{5}{11}\cdot\frac{4}{9}=\frac{20}{99}.$$

$$2)\ V_2=\frac{5}{11}\cdot\frac{5}{9}=\frac{25}{99}.$$

$$3)\ V_3=\frac{6}{11}\cdot\frac{4}{9}=\frac{24}{99}.$$

$$4)\ V_4=\frac{6}{11}\cdot\frac{5}{9}=\frac{30}{99}.$$

§ 98. Отъ опрѣдѣлението слѣдва, че ако вѣроятноститѣ на отдѣлнитѣ събития сѫ равни по между си, или пъкъ, което е все едно, събитията сѫ повторение на едно и сѫщо събитие, то вѣроятностьта на сложното събитие е степень отъ вѣроятностьта на отдѣлното събитие.

Примѣръ.

Съ каква вѣроятность може да се твърдй, че отъ една урна съ 4 бѣли и 3 черни топки ще изтеглимъ 3 пѫти по редъ бѣла топка, ако изтеглената топка се повръща въ сѫда?

Рѣшение. $V=\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{7}=\left(\frac{4}{7}\right)^3=\frac{64}{343}.$

§ 99. Ако отдѣлнитѣ събития сѫ повторение на едно и сѫщо събитие, простата вѣроятность на което е $\frac{a}{b}$, и, ако слѣдъ всѣко сбѫдване на събитието, числото на благоприятнитѣ и на всевъзможнитѣ случаи се намалява съ единица, то вѣроятностьта за сбѫдването на това събитие n пѫти по редъ е

$$V=\frac{a}{b}\cdot\frac{a-1}{b-1}\cdot\frac{a-2}{b-2}\cdot\ \cdot\ \cdot\ \frac{a-n+1}{b-n+1}.$$

Примѣръ.

Съ каква вѣроятность може да се твърдй, че отъ една урна съ 4 бѣли и 3 черни топки ще изтеглимъ 3 пѫти по редъ бѣла топка, ако изтеглената топка не се повръща въ сѫда?

Рѣшение. $V=\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{35}.$

§ 100. Ако едно събитие, на което простата вѣроятность е $\frac{a}{b}$, трѣбва да се повтори m пѫти заедно съ друго събитие, на което простата вѣроятность е $\frac{c}{d}$, което трѣбва да се повтори n пѫти, то

1) при постоянно число на случаитѣ и при редъ опрѣдѣленъ:

$$V=\left(\frac{a}{b}\right)^m\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^n;$$

2) при постоянно число на случаитѣ и при редъ неопрѣдѣленъ:

$$V=\frac{P_{m+n}}{P_m.P_n}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^m\cdot\left(\frac{c}{d}\right)^n;$$

3) при намаляване на случаитѣ (благоприятни и всевъзможни) съ 1 при всѣко сбѫдване на събитията и при редъ опрѣдѣленъ:

$$V=\frac{a}{b}\cdot\frac{a-1}{b-1}\cdot\frac{a-2}{b-2}\cdots\frac{a-m+1}{b-m+1}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{c-1}{d-1}\cdot\frac{c-2}{d-2}\cdots\frac{c-n+1}{d-n+1}.$$

4) При намаляване на случаитѣ и при редъ неопрѣдѣленъ:

$$V=\frac{P_{n+m}}{P_m.P_n}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a-1}{b-1}\cdots\frac{a-m+1}{b-m+1}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{c-1}{d-1}\cdots\frac{c-n+1}{d-n+1}.$$

Примѣръ.

Съ каква вѣроятность може да се твърдй, че отъ една урна съ 3 бѣли и 4 черни топки могатъ се изтегли 2 бѣли и 3 черни топки?

1) Ако случаитѣ не се намаляватъ и редътъ е опрѣдѣленъ:

$$V=\left(\frac{3}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^3.$$

$\frac{C_3^2\,C_4^3}{C_7^5}=\frac{3^2\cdot4^3}{7^4}\quad\frac{12^4}{7^7}\quad\frac{9.64}{7^7}\quad\frac{54}{49}$

2) Ако случаитѣ се намаляватъ и редътъ е опрѣдѣленъ:

$$V=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{35}.$$

3) Ако случаитѣ не се намаляватъ и редътъ не е опрѣдѣленъ

$$V=\frac{P_5}{P_2.P_3}\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^3.$$

4. Ако случаитѣ се намаляватъ и редътъ не е опрѣдѣленъ

$$V=\frac{P_5}{P_2.P_3}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}.$$

Основитѣ на науката за вѣроятноститѣ сѫ положени отъ Pascal и Fermat въ 1654 год. Първото пълно съчинение по тѣхъ е написано отъ Холандския метафизикъ Christian Huigens въ 1651 г. (De rationibus in ludo aleae). Писали сѫ още по вѣроятноститѣ: Leibnitz (1693), Montmort (1678—1719), Taylor (1685—1731), Jasqes Bernoulli (Ars conjectandi, 1713 г.), Moivre (Doctrine of chances, 1716 г.), d'Alembert (1718 г.), Condorcet (1743—1794, Application de l'Analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité de voiy). Laplace (Théorie analitique des probabilités, 1812 и L'Essai philisophique des probabilités, 1819) и др. Че сложната вѣроятность е произведение отъ проститѣ вѣроятности е установено най-напрѣдъ отъ Moivre.

ГЛАВА XII.

Пожизнени ренти.

I.

Таблици за смъртность.

§ 101. Числото на едноврѣменно роденитѣ лица, поради смъртность, ежегодно се намалява. Таблицитѣ, отъ които може да се види, какъ става това намаляване отъ година на година, се наричатъ таблици за смъртностьта. Такива таблици сѫ, напр., таблицитѣ на Déparcieux (гл. лог. таблици на Д-ръ Студничка стр. 154), споредъ които отъ 1286 нормални лица, родени едновременно, достигать

до 1 годишна възрасть — 1071 лица,
„ 2 „ „ — 1006 „ ,
„ 3 „ „ — 970 „ ,
. . . .
„ 93 „ „ — 2 „ ,
„ 94 „ „ — 1 „ ,
„ 95 „ „ — 0 „ .

§ 102. Съ таблицитѣ на смъртностьта си служимъ, когато се търси:

а) вѣроятностьта, че едно n годишно лице ще живѣе слѣдъ m години, или пъкъ че не ще живѣе.

б) Цѣлия вѣроятенъ животъ на едно n годишно лице, или пъкъ останалия му вѣроятенъ животъ.

а) 1. Вѣроятностьта, че едно n годишно лице ще живѣе слѣдъ m години, е отношение отъ числото на живущитѣ на възрасть $n+m$ години (V_{n+m}) лица къмъ числото на живущитѣ отъ възрасть n години (V_n), сир.

$$P=\frac{V_{n+m}}{V_n}.$$

Примѣръ.

Съ каква вѣроятность може да се твърди, че едно 50 годишно лице ще достигне до 60 годишна възрасть?

Рѣшение. Тукъ $n=50$ и $m=10$; слѣдов.,

$$P=\frac{V_{50+10}}{V_{50}}=\frac{V_{60}}{V_{50}}=\frac{463}{581}=0{\cdot}797.$$

2. Вѣроятностьта, че едно n годишно лице нѣма да живѣе слѣдъ m години, е обратна вѣроятность на тази, че ще то живѣе слѣдъ m години и затова

$$Q=1-\frac{V_{n+m}}{V_n}=\frac{V_n-V_{n+m}}{V_n}.$$

Примѣръ.

Съ каква вѣроятность може да се твърди, че едно 50 годишно лице нѣма да достигне до 60 годишна възрасть?

Рѣшение. Тукъ $n=50$, $m=10$; слѣдов.,

$$Q=\frac{V_{50}-V_{10}}{V_{50}}=\frac{581-463}{581}=\frac{118}{581}=0{\cdot}203.$$

б) 1. Цѣлиятъ вѣроятенъ животъ на едно n годишно лице е равенъ на числото на годинитѣ, които съотвѣтствуватъ на $\frac{V_n}{2}$, сир. на половина отъ числото на живущитѣ отъ възрастьта му въ таблицата на смъртностьта.

Примѣръ.

Колко е цѣлиятъ вѣроятенъ животъ на едно 20 годишно лице?

Рѣшение. На числото $\frac{V_{20}}{2}=\frac{814}{2}=407$ живущи лица въ таблицитѣ на смъртностьта съотвѣтствува възрасть 64 или 65 години; слѣдов., цѣлиятъ вѣроятенъ животъ на 20 годишното лице се заключава между 64 и 65 години.

2. Останалия вѣроятенъ животъ на едно n годишно лице е разлика между цѣлия му вѣроятенъ животъ и сегашната му възрасть (n).

Примѣръ.

Колко ще живѣе още едно 20 годишно лице?

Рѣшение. Цѣлиятъ му вѣроятенъ животъ е 64 (или 65) години; сега е на 20 години; слѣдов., ще живѣе още 64—20=44 (или 65—20=45) години.

Послѣдната задача се рѣшава и съ помощьта на равенството

$$y=59-\frac{3n}{4},$$

дѣто n е сегашната възрасть на лицето.

Примѣръ.

Колко ще живѣе още едно 20 годишно лице?

Рѣшение.

$$y=59-\frac{3.20}{4}=59-15=44 \text{ години.}$$

§ 103. Ако вѣроятностьта, че едно n-годишно лице ще живѣе слѣдъ m години, е равна на тая, че това лице ще умрѣ слѣдъ m години, т. е., ако

$$\frac{V_{n+m}}{V_n}=1-\frac{V_{n+m}}{V_n},$$

то $V_{n+m}=\frac{V_n}{2}$, дѣто n+m е цѣлиятъ, а m—останалиятъ вѣроятенъ животъ (§ 101, б).

Математическа надежда.

§ 104. Ако сбждването на едно случайно събитие е свързано съ нѣкава печалба, то произведенето на тази очаквана печалба и вѣроятностьта, за да се вземе тя, се нарича математическа надежда. Така, ако печалбата е a и вѣроятностьта v, то математическата надежда $M=a.v.$ Отъ опрѣдѣлението слѣдва, че математическата надежда е пропорционална съ вѣроятностьта.

Примѣри.

1. Едно n (50) годишно лице иска да осигури сумата k (1000) лева, платима слѣдо m (10) години, ако той бжде живъ; колко трѣбва да внесе това лице за тая осигуровка, ако се смѣта лихва по $5^0/_0$?

Рѣшение. Платимитѣ слѣдъ m години k лева въ момента на осигуровката иматъ стойность $\frac{k}{q^m}$ лв.; вѣроятностьта, че ще се плати послѣдната сума е $\frac{V_{n+m}}{V_n}$, слѣдов.,

$$M=\frac{k}{q^m}\cdot\frac{V_{n+m}}{V_n}=\frac{1000}{(1{\cdot}05)^{10}}\cdot\frac{V_{60}}{V_{59}}=\frac{1000{\cdot}463}{(1{\cdot}05)^{10}581}=489{\cdot}21 \text{ лв.}$$

2. Едно n (50) годишно лице иска да осигури k (000) лева, платими на семейството му слѣдъ m (10) години въ случай, че той тогава не е живъ; колко трѣбва да внесе това лице за тая си осигуровка, ако смѣта по $5^0/_0$?

Рѣшение.

$$\text{M}=\frac{k}{q^m}\left(1-\frac{V_{n+m}}{V_n}\right)=\frac{1000}{(1{\cdot}05)^{10}}\left(1-\frac{463}{781}\right)=$$

$$=\frac{1000.118}{(1{\cdot}05)^{10}581}=124{\cdot}68 \text{ лв.}$$

При басоветѣ вноскитѣ на играчитѣ сж пропорционални на вѣроятноститѣ имъ; ако вѣроятностьта на единъ отъ играчитѣ е V_1 и вносътъ му $-a_1$, а вѣроятностьта на другия играчъ е V_2 и вносътъ му $-a_2$, то

$$a_1 : a_2=V_1 : V_2,$$

отдѣто

$$a_1 . V_2=a_2 . V_1;$$

отъ послѣдното равенство заключаваме, че математическитѣ надежди на двамата играчи сж равни помежду си.

III.

Пожизнени ренти.

§ 105. Сумата, която се плаща на едно лице ежегодно до края на живота му, по прѣдварително сключенъ договоръ, се нарича пожизнена рента.

Пожизнени ренти има 3 вида:

1) ренти непосрѣдсвени, на които изплащането започва една година слѣдъ сключването на договора;

2) ренти закъснителни, на които изплащането започва нѣколко години слѣдъ сключването на договора и

3) ренти врѣменни, които се изплащатъ само въ продължение на нѣколко години, слѣдващи една година слѣдъ сключването на договора

---

§ 106. Ако K^1 е капиталътъ, съ който едно n годишно лице купува рента A (този капиталъ се внася напълно при подписването на договора) и K_1, K_2, K_3, . . . K_z — капиталитѣ, съ които купува съотвѣтно рентитѣ въ края на I-а, на II-а, на III-а, . . . , на z години (послѣдната таблична възрасть е $n+z$) и p — процентътъ, то (§ 104)

$$K_1=\frac{A}{q}\cdot\frac{V_{n+1}}{V_n},$$

$$K_2=\frac{A}{q^2}\cdot\frac{V_{n+2}}{V_n},$$

$$K_3=\frac{A}{q^3}\cdot\frac{V_{n+3}}{V_n},$$

$$K^4=\frac{A}{q^4}\cdot\frac{V_{n+4}}{V_n}$$

. . . . . .

$$K_z=\frac{A}{q^z}\cdot\frac{V_{n+z}}{V_n},$$

Слѣдов.,

$$K^1=K_1+K_2+K_3+\ldots+K_z=\frac{A}{V_n}\left[\frac{V_{n+1}}{q}+\frac{V_{n+2}}{q^2}+\frac{V_{n+3}}{q^3}+\ldots+\frac{V_{n+z}}{q^z}\right]$$

$=\frac{A}{V_n}.S_n=A.\frac{S_n}{V_n}$, дѣто S_n замѣнява сумата въ скобитѣ.

И така,

$$K^1 = A.\frac{S_n}{V_n}.$$

Множительтъ $\frac{S_n}{V_n}$, равенъ на капитала, който купува рента 1 лв. (защото $K' = \frac{S_n}{V_n}$ при $A=1$), за $p=4$ и $4^1/_2$ и за $n=20$ до 95 г., е изчисленъ въ логаритмичнитѣ таблици на стр. 155.

Примѣръ.

Съ каква сума едно 88 годишно лице може да осигури пожизнена годишна рента отъ двѣ хиляди лева, като се смѣта по $4^0/_0$ лихва?

Рѣшение.

$$K' = 2000 \, . \frac{S_{88}}{V_{88}} = 2000 . \frac{37 \cdot 63798}{22} = 2000 . 1 \cdot 7108 = 3421 \text{ лв.}$$

Закъснителни ренти.

§ 107. Ако K'' е капитальтъ (пълна математическа надѣжда), съ който едно n годишно лице купува рента A (този капиталъ се внася напълно при подписването на договора), която започва да се изплаща $m+1$ години слѣдъ сключването на договора и K_{m+1} K_{m+2}, K_{m+3}, ... K_{n+z} — сж капиталитѣ (отдѣлнитѣ математически надѣжди), съ които купува съотвѣтно рентитѣ въ края на $m+1, m+2, m+3, \ldots, m+z$ години (послѣдната таблична възрасть на Déparcieux е $n+m+z$) и p – процентътъ, то (§ 104)

$$K_{m+1} = \frac{A}{q^{m+1}} . \; \frac{V_{n+m+1}}{V_n},$$

$$K_{m+2} = \frac{A}{q^{m+2}} . \; \frac{V_{n+m+2}}{V_n},$$

$$K_{m+3} = \frac{A}{q^{m+3}} . \; \frac{V_{n+m+3}}{V_n},$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$K_{m+z} = \frac{A}{q^{m+z}} . \; \frac{V_{n+m+z}}{V_n}.$$

Слѣдов.

$$K'' = \frac{A}{q^m . V_n}\left[\frac{V_{n+m+1}}{q} + \frac{V_{n+m+2}}{q^2} + \ldots + \frac{V_{n+m+z}}{q^z}\right]$$

и $K'' = \frac{A}{V_n \cdot q^m} . S_{n+m}$, дѣто S_{n+m} замѣнява сумата въ скобитѣ.

Примѣръ.

Съ какъвъ капиталъ едно 50 годишно лице може да си осигури пожизнена рента отъ двѣ хиляди лева, изплащането на която да почне, когато лицето стане на 60 годишна възрасть, ако се смѣта лихва по $4 \cdot 5^0/_0$?

Рѣшение. Тукъ $A = 2000$, $q^n = (1 \cdot 045)^{10} = 1 \cdot 552969$,

$$V_n = V_{50} = 581 ; \; S_{n+m} = S_{60} = 4327 \cdot 433.$$

Слѣдов.,

$$K'' = \frac{2000 . 4327 \cdot 333}{1 \cdot 552969 . 581} = 9592 \cdot 36 \text{ лв.}$$

Временни ренти.

§ 108. Ако K''' е капиталътъ, съ който едно n годишно лице купува рента A (този капиталъ се внася напълно при подписването на договора), която да продължава само m години, то, очевидно,

$$K''' = K' - K'' = A.\frac{S_n}{V_n} - \frac{A}{q^m . V_n} \cdot S_{n+m}$$

$$= \frac{A}{V_n}\left(S_n - \frac{S_{n+m}}{q^m}\right).$$

Примѣръ.

Едно 50 годишно лице иска да си осигури въ продължение на 10 години годишна рента отъ 1200 лева. Каква сума трѣбва да брои това лице за тази рента, ако се смѣта по $4^0/_0$ лихва?

Рѣшение.

$$K''' = \frac{1200}{V_{50}}\left(S_{50} - \frac{S_{60}}{(1 \cdot 04)^{10}}\right) = 8755 \cdot 84 \text{ лв.}$$

Тази рента се различава отъ обикновената рента по това, че е въ зависимость отъ вѣроятния животъ на осигуреното лице.

Първото осигуряване на животъ датира отъ 18-й Юний 1582 г. Първитѣ таблици за смъртность сж издадени отъ Jan de Vitts (1671 г.) и Edmound Halleys (1693 г.), Английското осигурително дружество „Society of assurance for widows and ortphans von stansfeld", основано първо въ 1690 г., нѣма смисъльта на днешнитѣ осигурителни дружества. Отъ многото таблици за смъртность въ употрѣбление сж:

1) Таблицитѣ на 20 тѣ английски осигурителни дружества (1862—63);
2) Таблицитѣ на 23-тѣ германски осигурителни дружества;
3) Опитната американска таблица (1868) и
4) Френскитѣ таблици A. F. и R. F., съставени въ най-ново врѣме.

Употрѣбенитѣ при задачитѣ на нашия учебникъ таблици сж на Dèparcieux, поправени отъ Florencourt въ 1881 г. Таблицитѣ на Déparcieux иматъ въ сегашно врѣме само исторически характеръ.

Задачи и Упражнения.

1, За една лотария сж издадени 100 билети, между които само 1 печели. Колко голѣма е вѣтоятностьта да спечели едно лице, което е купило 5 билети?

2. Въ една урна има 6 черни, 8 бѣли и 10 червени топки. Колко голѣма е вѣроятностьта при първо опитване да извадимъ една 1) червена, 2) зелена, 3) или червена, или бѣла, 4) или черна, или бѣла, или червена топка.

3. Колко голѣма е вѣроятностьта при първо хвърляне на 1 заръ да се получатъ 1) 5, 2) четно число, 3) или 4, или 6 точки?

4. Колко голѣма е вѣроятностьта изъ едно тесте отъ 52 карти за игра при първо опитване да извадимъ 1) двѣ карти отъ червенъ цвѣтъ, 2) 1 отъ червенъ и 1 отъ черъ цвѣтъ, 3) двѣ купи карти, 4) 1 купа и 1 каро, 5) 1 асо и едно момче. 6) 1 фигура и 1 бройка,*) 7) двѣ бройки, 8) двѣ карти отъ единъ и сжщи цвѣтъ. 9) двѣ карти отъ различенъ цвѣтъ, 10) 1 асо и елно момче отъ единъ и сжщи цвѣтъ, 11) двѣ фигури отъ единъ цвѣтъ, 12) двѣ фигури отъ различенъ цвѣтъ. 13) двѣ карти, които да се различаватъ само по цвѣта си, 13) или двѣ моми, или 1 асо и 1 фигура, 15) или двѣ фигури, или двѣ бройки, 16) двѣ карти, отъ които поне едната да е фигура?

5. Ако въ една лотария на всѣки 100 лоза печелвтъ 15; колко голѣма е вѣроятностьта да спечели единъ извѣстенъ лозъ?

6. Въ една урна има 10 черни, 8 бѣли и 6 червени топки. Колко голѣма е вѣроятностьта при първо опитване да извадимъ 1) 3 черни, 2) 3 бѣли, 3) 3 отъ единъ цвѣтъ, 4) 2 черни и една бѣла, 5) 3 отъ разни цвѣтове, 6) 3 топки, отъ които поне 2 отъ единъ цвѣтъ, 7) 2 отъ еднакъвъ и 1 отъ другъ цвѣтъ, 8) 3, които да не сж отъ бѣлъ цвѣтъ и 9) три топки, между които поне една да е бѣла?

7. Въ една урна има 8 черни, 5 бѣли и 6 червени топки. Ако съ първо бръкване извадимъ 6 топки, колко голѣма е вѣраятностьта, че между тѣхъ има 1) 3 черни, 2 бѣли и 1 червена, 2) половината черни, а другата половина червени, 3) двѣ отъ еднакъвъ цвѣтъ?

8. Въ една лотария на всѣки 100 лоза печелятъ 70. Нѣкое лице е купило 5 лоза. Колко голѣма е вѣроятностьта, че 1) всичкитѣ 5 лоза печелятъ, 2) никой отъ тия 5 лоза не печели, 3) поне единъ отъ тия 5 лоза печели, 4) само единъ печели, 5) само 3 печелятъ, 6) поне 3 печелятъ?

9. Колко голѣма е вѣроятностьта при първо хвърляне на 4 зара да получимъ 1) равни числа, 2) 4 разни числа, 3) само 2 равни числа, 4) поне 2 равни числа, 5) поне 3 разни числа, 6) поне 3 четни числа 8) 4 числа, сумата на които да е повече отъ 5, но по малка отъ 10, 6) 4 числа, сумата на които да е повече отъ 20?

10. Въ една урна има *n* топки; колко голѣма е вѣроятностьта че при първо опитване ще извадимъ 1) четно, 2) нечетно число топки? Отг. 1) $\frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}$, 2) $\frac{2^{n-1}}{2^n-1}$.

---

*) За фигура ще считаме: попъ, мома и момче, а за бройка — всички карти съ очи отъ 1—10 (включително и асо).

11. Въ една урна има 7 черни и 5 бѣли топки, а въ друга — 10 черни и 6 бѣли. Ако извадимъ отъ всѣка урна по една топка, колко голѣма е вѣроятностьта, че 1) двѣтѣ топки сж черни, 2) двѣтѣ топки сж бѣли, 3) изъ първата урна е черна, изъ втората - бѣла и 4) изъ първата урна е бѣла, изъ втората — черна топка?

12. Нѣкой иска съ хвърляне на 2 зара да получи първиятъ пжть 5, а вториятъ пжть 7 точки. Колко голѣма е вѣроятностьта?

13 Колко голѣма е вѣроятностьта съ хвърляне на два зара да получимъ първиятъ пжть най-много 4, а вториятъ пжть повече отъ 9 точки?

14. Колко голѣма е вѣроятностьта съ 3 послѣдователни хвърляния на 2 зара да получимъ 7, 9 и 10 точки, ако 1) редътъ е опрѣдѣленъ и 2) редътъ е неопрѣдѣленъ?

15. Искаме да хвърлимъ съ 2 зара 3 пжти наредъ или 2 равни числа, или повече отъ 8 точки. Колко голѣма е вѣроятностьта?

16. Нѣкой иска съ 2 зара да хвърли първиятъ пжть 7, вториятъ пжть 7 и третиятъ пжть 9 точки. Колко голѣма е вѣроятностьта, че 1) тритѣ хвърления сж сполучливи, 2) тритѣ хвърления не сж сполучливи, 3) само първото хвърляне е сполучливо, 4) само първото хвърляне е несполучливо, 5) само едно кое да е хвърляне е сполучливо, 6) само едно кое да е хвърляне е несполучливо, 7) поне едно хвърляне е сполучливо?

17. Нѣкой съ хвърляне на 2 зара иска първиятъ пжть и, ако не сполучи, вториятъ пжть, да получи 9 точки Колко голѣма е вѣроятностьта?

18. Нѣкой чрѣзъ хвърляне ца 2 зара иска или първиятъ пжть, или ако този пжть не сполучи, то вториятъ, или ако и този пжть не сполучи, то третиятъ пжть да получи 9 точки. Колко голѣма е вѣроятностьта?

19. Нѣкой чрѣзъ хвърляне на два зара иска да хвърли първиятъ пжть 3, послѣ 4 и третиятъ пжть 6. Колко голѣма е вѣроятностьта, че първото хвърляне е сполучливо, или ако не, то второто е сполучливо, или ако и това не, то третото хвърляне е сполучливо?

20. Отъ 20 билети на една лотария съ 5 печалби, A има 2, B — 3, C — 5 билети. Колко голѣма е вѣроятностьта, че 1) тримата (поне съ по 1 билетъ) ще печелятъ, 2) само A и B ще печелятъ, а C ще изгуби, 3) двамата ще печелятъ другиятъ ще губи, 4) единътъ ще печели, двамата ще губятъ, 5) поне единътъ отъ тѣхъ ще печели?

21. Отъ 3 урни едната съдържа 6 бѣли, 4 червени, 5 черни, втората — 3 бѣли, 7 червени, 2 черни, третата — 4 бѣли, 2 червени и 3 черни топки. Ако се извади случайно изъ коя да е урна една топка, то колко голѣма е вѣроятностьта, че тя ще е 1) бѣла 2) червена, 3) черна топка?

22. Ако при сжщитѣ условия, както въ послѣдната задача, се извадятъ 2 топки изъ коя да е урна, колко голѣма е вѣроятностьта, че извадените топки сж 1) 2 бѣли, 2) 2 червени, 3) 2 черни, 4) 2 отъ еднакъвъ цвѣтъ, 5) 1 бѣла и 1 червена, 6) 2 отъ различенъ цвѣтъ?

23. Какви ще сж резултатитѣ въ послѣдната задача, ако случайно извадимъ изъ всѣка отъ урнитѣ по 1 топка?

24. Изъ едно тесте отъ 32 карти нѣкой иска да изтегли 3 пжти по 1 карта, всичко 3 карти, между които да има 2 фигури и 1 бройка. Колко голѣма е вѣроятностьта, че 1) тритѣ тегления сж сполучливи, 2) всички тегления сж несполучливи, 3) само 2 тегления сж сполучливи, 4) поне едно теглене е сполучливо, 5) тритѣ тегления сж сполучливи по редъ: фигура, бройка и фигура? (Изтегленитѣ първиятъ и вториятъ пжть карти не се повръщато назадъ).

25. Изъ едно тесте отъ 32 карти се иска да се изтеглятъ 7 пжти по редъ: 2 фигури, 1 асо, 1 десетора и три бройки по-малки огъ десетора. Колко голѣма е вѣроятностьта за сполука, ако редътъ наваденитѣ карти е произволенъ и извадената веднажъ карта не се повръща назадъ?

26. Една лотария има всичко 20,000 лоза, отъ които 500 печелятъ при 1-о теглене, 1000 — при 2-ро, 2500 — при 3-о, 4500 — при 4-о; колко голѣма е вѣроятностьта, че извѣстенъ лозъ ще печели при послѣдното теглене?

27. Изъ едно тесте огъ 52 карти се изтегля 10 пжти по редъ едиа карта. Колко голѣма е вѣроятностьта да се изтегли 1) 4 пжти спати, 3 пжти пика, 2 пжти каро и 1 пжть купа (редътъ е неопрѣдѣленъ); 2) изобщо, 4 отъ единъ цвѣтъ, 3 отъ втори цвѣтъ, 2 отъ трети цвѣтъ и 1 отъ четвъртия цвѣтъ (редътъ е пакъ произволенъ)? Извадената карта се повръща всѣкога назадъ.

28. Какви сж резултатитѣ въ зад. 17, ако извадената карта не се повръща назадъ?

29. Колко голѣма е вѣроятностьта. че изъ една урна, която съдържа 7 черни п 6 червени топки, ще се извади по-скоро черна, отколкото бѣла топка?

30. Колко голѣма е вѣроятностьта, че чрѣзъ хвърляне на два зара ше се получатъ по-скоро 2 равни числа, отколкото 2 числа сумата на които е 5?

31. Нѣкой си иска да извади изъ едно тесте отъ 32 карти 2 карти отъ червенъ цвѣтъ, другъ — 1 отъ червенъ цвѣтъ и 1 отъ черъ цвѣтъ и трети — 1 фигура и 1 бройка. Колко голѣма е вѣроятностьта, че първиятъ ще сполучи по-скоро отъ другитѣ двама? За кого отъ тѣхъ вѣроятностьта да сполучи най-скоро е най-голѣма? (Двѣтѣ извадени карти се повръщатъ всѣкога назадъ, нрѣди да тегли слѣдващиятъ).

32. Нѣкой си иска при първо хвърляне на зара, да получи 15. Въ случай на сполука печели 2·70 лв. Каква сума би трѣбвало да заложи той?

33. А се облага съ В, че изъ едно тесте отъ 52 карти при 1-во теглене ще извади 1 карта купа или каро и при 2-ро — 1 пика или спати и като повърне изваденитѣ 2 карти назадъ, ще повтори сжщото. Б залага 2 лева; колко би трѣбвало да заложи А?

34. Срѣщу 10 ст. вносъ. печели 40 ст. този, който сполучи съ едно хвърляне на 3 зара да получи по-малко отъ 6, или повече отъ 14. Колко би трѣбвало въ сжщность да бжде вносътъ?

35. Изъ една урна, която съдържа 10 бѣли, 7 червени и 6 черни топки, А иска съ едно бъркване да извади три топки: бѣла, червена и черна; напротивъ В иска (като се човърнатъ тритѣ извадени топки) пакъ съ едно бъркване да извади 3 бѣли и 1 черна топка. Ако А сполучи, ще получи 1 лв. отъ В; ако не сполучи, ше даде 60 ст. на В. Какъ би трѣбвало да гласятъ условията за В?

36. Отъ 90 нумера на една томбола А има 4 нумера. Съ едно бъркване случайно се изваждатъ 5 нумера. Ако между изваденитѣ 5 нумера се случи единъ отъ нумерата на А, той печели 18 лв.; ако се случатъ 2 — печели 60 лева; 3 — печели 180 лева; 4 — печели 450 лв. Колко лева би трѣбвало да внесе А за горнитѣ 4 нумера?

37. При една азартна игра срѣщу вносъ отъ 20 ст. може да се спечели една отъ печалбитѣ: 2 лв., 1 лв., 50 ст., 30 ст., ако еъ едно хвърляне на три зара се получи съотвѣтно сумата: 3 или 18, 4 или 17, 5 или 16, 14 или 15. Каква печалба срѣдно може да очаква на всѣки 100 игри притежательтъ на тая игра?

38. Каква сума трѣбва да внесе едно 50 годишно лице за да си осигури пожизнена годишна рента отъ 2400 лв., отъ която да почне да се ползува веднага слѣдъ подписването на договора, ако се смѣта по $4^0/_0$ лихва?

39. Каква сума трѣбва да внесе сега едно 30 годишно лице, за да си осигури пожизнена годишна рента отъ 360 лв., отъ която да почне да се ползува слѣдъ 20 години, като се смѣта лихва по $4^1/_2{}^0/_0$?

40. Каква сума трѣбва да внесе едно лице, което иска да осигури годишна рента отъ 3000 лв. за 10 годишния си синъ, когото мисли да изпрати да учи въ странство, щомъ изпълни 20 годишна възрасть, като прѣдполага, че той ше може да свърши наукитѣ си въ продължение на 9 години?