БЪЛГАРСКОТО УЧАСТИЕ В МЕЖДУНАРОДНИЯ ДЕБЮТ НА *САНГАКУ*

Йордан Табов
Институт по математика и информатика, БАН
tabov@math.bas.bg

Резюме: *Красивите старинни паметници „сангаку" на японската математика и тяхното съдържание са обект на възхищение, изучаване и стимул за творческо търсене от страна на много геометри по целия свят. Те имат и голям дидактически потенциал за използване в обучението по математика. След като са били полузабравени в Япония до втората половина на XX в., двама геометри – Хидетоши Фукагава от Япония и Даниел Пидо от САЩ – предприемат опит да заинтересуват международната математическа колегия. Към техните усилия се присъединяват и български математици; експериментът със „задачата на броя" на българското списание „Математика и информатика" демонстрира и широкия интерес, който будят красивите задачи, и потенциала им за приложение в дидактиката на математиката. В тази статия е представен разказ за пътя, извървян от сангаку в България и въздействието му върху възхода на сангаку на световната математическа и дидактическа сцена.*

Ключови думи: *сангаку, Вазан, България, дидактика на математиката*

„Вероятно никой от безброй многото обичаи на народите по света не е така елегантен и красив, както обичаят за ***сангаку***, японската храмова геометрия" – пише известният математик и популяризатор на математиката Тони Ротман ([Rothman, 1998]; приложение 1) в списание Scientific American. Той добавя, че от 1639 г. до 1854 г. Япония е била в строга, наложена от самата нея (т.е. от нейните императори) изолация от останалия свят, и че при тези условия в нея е процъфтявала самобитна местна математика, продукт на която е ***сангаку***.

Какво е сангаку?

Съвсем кратък отговор на този въпрос е даван на последната корица на всички броеве на списание „Обучението по математика" за 1987 и 1988 г. Той гласи:

„През XVIII и XIX век в Япония на стените на храмовете са били окачвани дъски със записани на тях математически теореми – „САНГАКУ". Красиво начертаните и оцветени чертежи ги правят истински произведения на математическото изкуство. Но за математиците по-интересно и по-красиво е съдържанието на „САНГАКУ"."

Ето и описанието на „сангаку" и „Вазан" за читателите на същото списание [Табов, 1988]:

„За японската математика „Вазан” от периода на нейната самоизолация имаме информация главно благодарение на един старинен японски обичай. Било е прието по стените на храмовете да се окачват подарени дъски-картини с красиви изображения, най-често на кон. Отначало дъските са били обикновено с размери около 30x50 см, а по-късно се появяват и по-големи, до 90x180 см. Изменят се и изобразяваните обекти. По онова време в Япония е имало много частни училища и очевидно много надарени геометри, които при откриване на особено интересни теореми са пожелавали да благодарят на боговете (японската религия Шинто има много божества), окачвайки красиво оцветените им чертежи на стените на храмовете. Това е било и начин за оповестяване на математическите открития (тогава в Япония не е имало научни списания) с неявното предизвикателство „виж дали можеш да решиш това!”.

Тези окачвани в храмовете дъски с изобразени теореми се наричат „сангаку”. Съдържанието им в почти всички случаи е геометрично, а това може би е логично за страна като Япония, където култът към хармоничните форми има вековни традиции.

На математическите дъски „сангаку” обикновено е било написано името и социалното положение на автора (от тези надписи днес е ясно, че теореми са откривали представители на всички слоеве, от селяни до самураи). Рядко е имало доказателства.

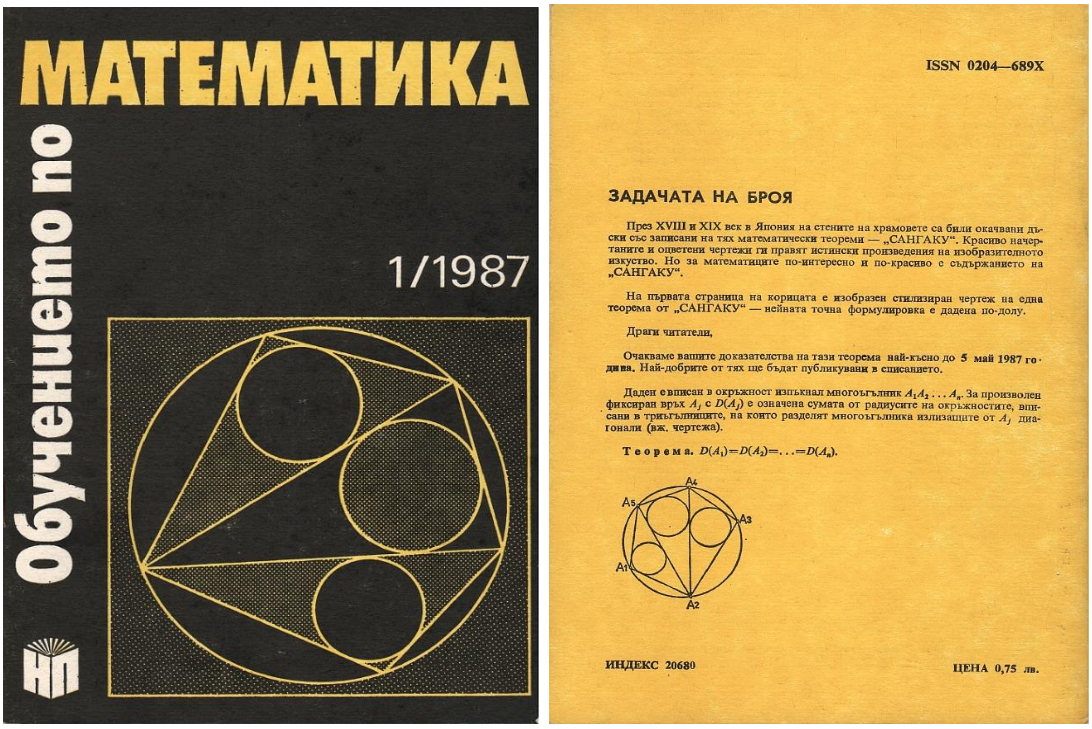
През изминалите столетия някои храмове са били разрушени; техните сангаку вече не съществуват, но част от теоремите са известни от стари книги. Около 900 храмови дъски с математически сюжети са оцелели до наши дни. Три от тях (от 1790, 1845 и 1863 г.) са били неочаквано открити през 1978 г. За дешифрирането им е бил поканен г-н Хидетоши Фукагава – по времето, когато са били създавани „сангаку” в Япония се е пишело на езика Канджи, който има китайски корени; днес той не се използва и хората, които го знаят, са много малко.”

Хидетоши Фукагава **(фиг. 1)** успява да привлече вниманието на няколко водещи за онова време геометри към „сангаку”. Той писал на Даниел Пидо – един от най-авторитетните геометри от втората половина на XX в. – и му представил събрания от него материал за сангаку. Пидо веднага е оценил потенциала му: той посъветвал Фукагава като първа стъпка да предложи няколко от теоремите като задачи в много популярното през 1980-те и 1990-те години канадско списание „Крукс Математикорум” с главен редактор Лео Сове. Ето как самият Пидо описва събитията в предговора към книгата Japanese Temple Geometry Problems San Gaku, увенчала съвместната му работа с Фукагава върху предложения от Фукагава материал:

Фиг. 1. Д-р Хидетоши Фукагава: изследовател на Сангаку, автор на известни статии и монографии, PhD на Института по математика и информатика на БАН.

„Аз познавах Лео като голям любител на геометрията. Тези задачи се появиха за пръв път през декември 1984 г. и привлякоха вниманието на международния кръг от читатели на Крукс. В резултат на това българско списание за математическо образование постави задачи сангаку на предната корица на последователни броеве … Йордан Табов занесъл няколко в Москва за публикуване в руски списания за математическо образование, голям интерес се появи в Испания … Централна и Южна Америка … Това са страните, където геометрията не беше практически изоставена, както стана в Съединените щати с появата на новата математика." ([Fukagawa&Pedoe, 1989]; по-дълъг откъс от предговора е представен в приложение 2)

След олимпиадата в 1981 г. във Вашингтон, където бях ръководител на отбора на България, започнах интензивна размяна с колеги на материали с „олимпиадна тематика", включващи списания и книги с трудни задачи; едно от най-важните списания, за което бях абониран в замяна на изпращаните от мен български и руски книги и списания, беше именно Крукс. Бях впечатлен от публикуваните там през 1984 и 1985 г. задачи „сангаку" и писах на Фукагава с молба да ми изпрати още; в отговор на молбата ми получих албум със снимки и пояснения, а по-късно и задачи от подготвяната от Фукагава съвместно с Пидо книга. 12 от тези задачи станаха „задача на броя" на 12 последователни книжки (за 1987 и 1988 г.) на нашето педагогическо списание „Обучението по математика", предназначено за учители. Всяка от тези задачи беше придружена от покана към читателите да изпратят в редакцията свои решения и от обещание, че най-интересните от тези решения ще бъдат публикувани на страниците на списанието. Реакцията на читателите определено беше положителна: решения изпращаха учители, ученици, университетски преподаватели. Както личи от цитираните по-горе думи на Пидо от предговора към съвместната им книга с Фукагава, интересът, проявен от българската математическа колегия към сангаку е бил важен стимул за работа, една демонстрация на потенциала, който има сангаку за стимулиране на интереса към геометрия и за приложения в математическото образование.



Фиг. 2. Предната и задната корици на брой 1 от 1987 г. на списание „Обучението по математика” с първата публикувана в България задача сангаку.

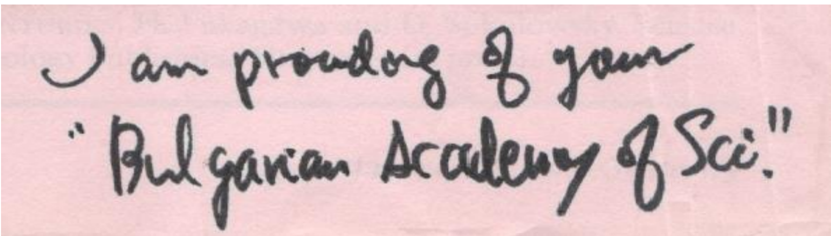
Фиг. 3. Илюстрация в предговора на книгата на Фукагава и Соколовски [Fukagawa&Sokolowski, 1994]: показани са корици на списание „Обучението по математика” (от 1988 г. названието му вече е „Обучението по математика и информатика”) и се споменава използването на Сангаку в работата с учителите по математика.

На „задачата на броя” във всеки брой на „Обучението по математика” за 1987 и 1988 г. са отделени предната и задната корица, където има съответно стилизиран чертеж на съответната задача и формулировката ѝ; това е показано на **фиг. 2** за брой 1 от 1997 г. Четири предни корици са показани в японското издание на книгата на Фукагава и Пидо (**фиг. 3**), за да илюстрират интереса към Сангаку в България.

Сред публикуваните в списанието решения трябва да бъдат отбелязани две, и двете за задачата на брой 2 от 1987 г: на Емил Карлов [Карлов, 1988] (тогава учител в МГ „Атанас Радев” в Ямбол), което според Фукагава е най-хубавото решение на това сангаку, което той е виждал; и на Валентина Николова-Джакова [Николова-Джакова, 1988] (тогава асистент във ФММ на СУ). Те са представени тук в Приложение 3.

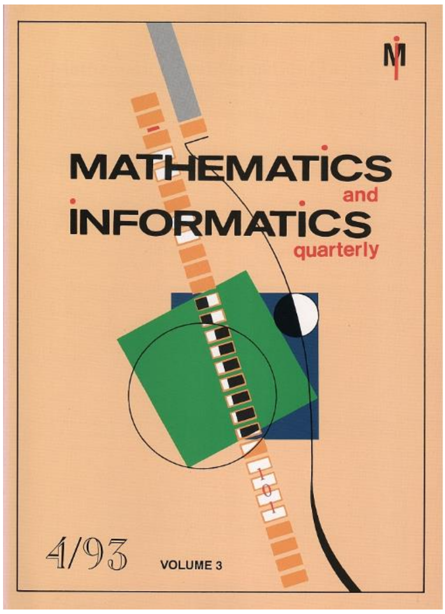
Вниманието на Пидо и Фукагава към популярността на Сангаку в България продължи; по препоръка на Пидо Фукагава започна докторантура в ИМИ на БАН, завършила успешно през 1994 г. със защита на дисертация на тема „Традиционна японска математика и нейното приложение в математическото образование” (научен ръководител Й. Табов). Чувствата си към съвместната работа с български математици Фукагава е изразил с приписката към изпратения ми от него екземпляр на цитираната по-горе статия в Scientific American – в справката за авторите той е представен като PhD in mathematics from the Bulgarian Academy of Science ([Rothman, 1998]; Приложение 4), а към това той е добавил, че се гордее с Българската академия на науките (**фиг. 4**).

В превеждането на дисертацията на Фукагава на български език, което тогава беше необходимо според действащите правила, взе активно участие Борислав Лазаров; така той можа да навлезе в красотата и възможностите на сангаку и по-късно допринесе за развитието на приложенията му на българска почва.



Фиг. 4. Добавка на Х. Фукагава към текста в [Rothman, 1998] – че се гордее с Българската академия на науките.

От 1991 г. със съдействието на Института по математика и информатика (ИМИ) на БАН сингапурското издателство Science Culture and Technology започна издаването на международно списание “Mathematics and Informatics Quarterly” (MIQ); основната дейност от редактирането до 2000 г. се извършваше в ИМИ. На корицата си MIQ има постоянно изображение, централно място в което заема стилизиран чертеж на спомената по-горе задача на брой 2/1987 на „Обучението по математика” (**фиг. 5**). Още в първия и втория брой на MIQ има преводи на статиите на Карлов [Карлов, 1988] и Николова-Джакова [Николова-Джакова, 1988] с доказателства на теоремата. Във втория и третия му брой са публикувани статии от друг талантлив японски геометър – Хироши Окумура – за теореми сангаку, съответно със заглавия „Окръжности в равнобедрен триъгълник” и „Вариации на отношението 1:4”. Връзките на Хироши Окумура със списание MIQ и по-специално с българските членове на редколегията еволюираха до докторантура на Окумура в Института по математика и информатика на БАН и през 1999 г. завършиха с докторска степен (дисертация на тема „Математическото изучаване на Васан-геометрията и нейното приложение”) за японския геометър. За негов научен консултант беше привлечен Сава Гроздев от Института по механика на БАН, който оттогава е свързан със сангаку. Окумура беше последван от трети японски математик, оценил постиженията и нивото на българската школа в изследването и прилагането на сангаку в образованието: Масаюки Ватанабе защити (отново в ИМИ) в 2011 г. дисертация на тема „Една възможност за изучаване на съвременна геометрия чрез арбелос и Васан”; негов научен ръководител беше Сава Гроздев.



Фиг. 5. Корицата на международното списание “Mathematics and Informatics Quarterly”. В първия и втория брой на списанието има преводи на статиите на Карлов [Карлов, 1988] и Николова-Джакова [Николова-Джакова, 1988] с доказателства на теоремата от задачата на брой 2/1987 на „Обучението по математика”.

През 2005 г. в Токио беше организирана голяма изложба, посветена на сангаку; за нея е издаден специален красив албум с много на брой цветни илюстрации. Автор на предговора е Хидетоши Фугакава. В албума са приведени и няколко мнения на чуждестранни (неяпонски) специалисти за сангаку. Мнението на Й. Табов (на английски и японски) е представено на **фиг. 6**. Ето и преводът му на български:

„За пръв път попаднах на теореми сангаку преди 20 години в публикация на д-р Хидетоши Фукагава в канадското списание „Крукс". Оттогава съм любител на това красиво японско изобретение.

Какво са теоремите сангаку? Дали са само произведение на математическа фантатаия, или са само красиви картинки, творения на изкуството? За мен те съчетават математиката и изкуството в една хармония, която е едновременно и японска и интернационална. Те са голям японски принос в световната култура.

От 1986 г. българското списание за учители „Обучението по математика и информатика" публикуваше във всеки брой избрана теорема сангаку с покана към учителите да предложат решения. Красотата на теоремите привлече вниманието им с предизвикателство, което ги мотивира да работят върху геометричните идеи и да подобряват знанията си по математика."

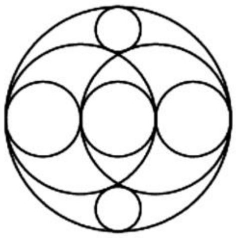
I first met Sangaku theorems 20 years ago in a publication by Dr. Hidetoshi Fukagawa in the Canadian Journal "Crux". Since then I am a lover of this beautiful Japanese invention.
What are the Sangaku Theorems? Are they just products of mathematical fantasy, or just beautiful pictures, creations of the art? For me they combine both maths and art in a harmony, so Japanese and in the same time so international. They are a great Japanese contribution to the world culture.
Since 1986 the Bulgarian journal for school teachers "The Education in Mathematics and Informatics" publishes in every issue a selected Sangaku theorem with invitation to the teachers to submit proofs. The beauty of the theorems attracts their attention and challenges them, motivating them to work on geometrical ideas and to improve their knowledge of mathematics.

算額というものに初めて出会ったのは20年前のカナダの数学雑誌 Crux に掲載された深川英俊博士の寄稿文です。それ以来私はこの美しい日本文化が大好きになりました。算額ってなに?これは数学の産物にすぎないのであろうか。それとも芸術作品であろうか。私にとってそれは数学と芸術の融合作品です。非常に日本的であると同時に非常に国際的でもあります。1986年からブルガリアの教師のための数学雑誌の表紙に読者への課題として算額の問題を毎号掲載しています。問題の美しさが読者の興味を引きやる気を起こさせ、図形問題に取り組み、数学知識を広げたいと思わせるのです。

Фиг. 6. Мнение на Й. Табов (на английски и японски) за сангаку

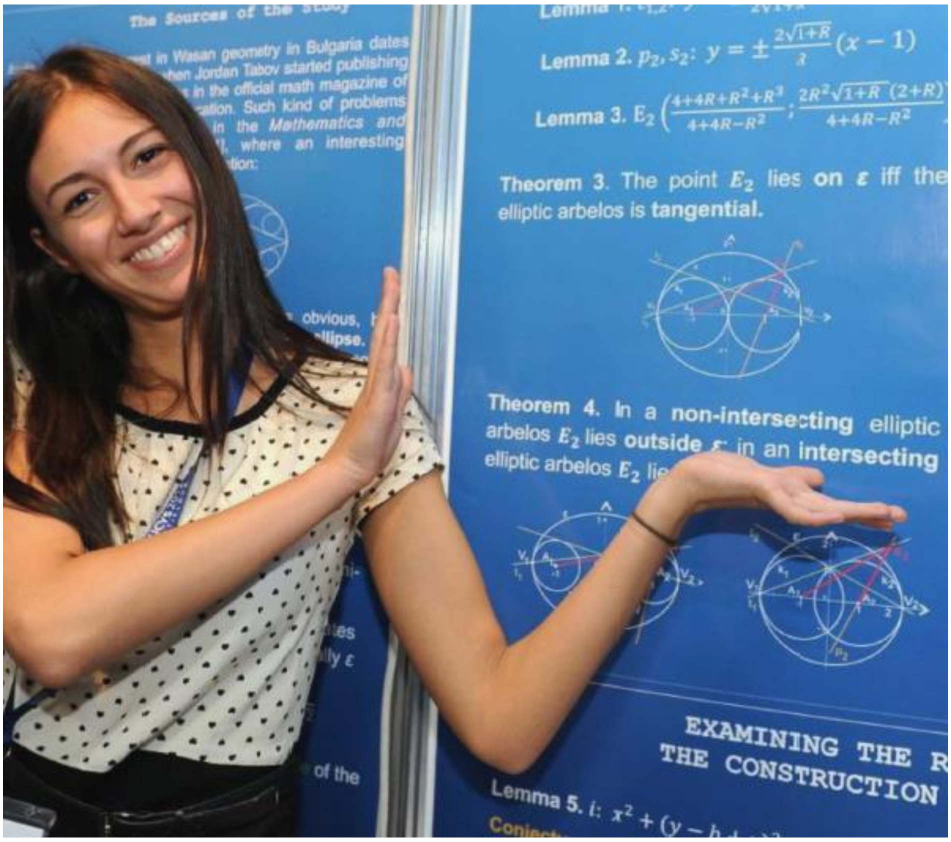
Освен с дисертацията на Ватанабе, 2011 г. ще остане в „българската" история на сангаку още и със задача от сангаку на Турнира „Черноризец Храбър", приспособена за формата на Турнира; условието ѝ е показано на **фиг. 7.** През 2011 г. е и първата „сангакова” проява на Пролет Лазарова на МИТЕ 2011, последвана от възход до първо място на Националния кръг на МИТЕ 2012 – София и първо място в категорията „Геометрични миниатюри” на Международния кръг на МИТЕ 2012 в Москва. Една снимка на Пролет на фона на геометрични изследвания и обобщения инспирирани от сангаку (**фиг. 8**) се превърна в европейски символ на младите математически таланти.

13. Фигурата на чертежа представя външна окръжност с радиус 1, в която са разположени седем окръжности: две еднакви големи, три еднакви средни и две еднакви малки, които се допират, както е показано. На колко е равен сборът от радиусите на седемте окръжности?



А) $\frac{41}{15}$ Б) $\frac{35}{12}$ В) $\frac{49}{30}$ Г) $\frac{67}{24}$ Д) никое от тези

Фиг. 7. Задача от Турнира „Черноризец Храбър” през 2011 г.



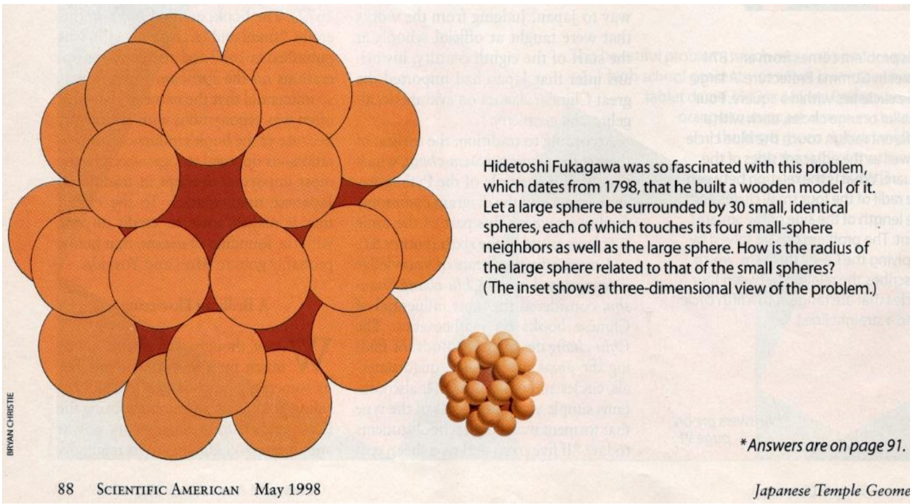
Фиг. 8. Пролет Лазарова на фона на геометрични изследвания и обобщения инспирирани от сангаку

На фона на разказаната до тук история на сангаку в България естествено идва и появата на международното списание “Sangaku Journal of Mathematics”, издавано от Висшето училище по застраховане и финанси (ВУЗФ) в София с главни редактори Хироши Окумура и Сава Гроздев (вече споменати по-горе); българското участие в редколегията е внушително и включва опитни геометри: Грозьо Станилов, Деко Деков и Веселин Ненков.

Накрая да се върнем към очарованието на сангаку с любимата „сангаку задача” на Хидетоши Фукагава:

„Нека голяма сфера е оградена от 30 еднакви малки сфери, всяка от които се допира до четирите си съседни малки сфери и до голямата сфера (**фиг. 9**). На колко е равен радиусът на малките сфери спрямо радиуса на голямата?” (Rothman 1998)

Отговорът е в приложение 5.



Фиг. 9. Любимата „сангаку задача” на Хидетоши Фукагава; отговорът е в приложение 5.

Библиография:

(Карлов, 1988) Карлов, Е. Два симетрични квадрата. *Обучението по математика и информатика*, 1988, № 2, 61.

(Николова-Джакова, 1988) Николова-Джакова, В. Отново за сангаку от брой 2, 1987 г. *Обучението по математика и информатика*, 1988, № 4, 56.

(Табов, 1987) Табов, Й. Исторически бележки за „сангаку” и за шестте теореми, публикувани през 1987 г. *Обучението по математика*, 1987, № 6, 60.

(Fukagawa&Pedoe, 1989) Fukagawa, H.; Pedoe, D. *Japanese Temple Geometry Problems.* Charles Babbage Research Center; Winnipeg, Canada, 1989.

(Rothman, 1998) Rothman, T. with the cooperation of Fukagawa, H. Japanese Temple Geometry. *Scientific American*, May 1998, 85-91.

(Fukagawa&Sokolowski, 1994) Fukagawa, H.; Sokolowski, D. *Japanese Mathematics.* (Two volumes). Morikita Publisher, 1994. (In Japanese)

Приложения

Приложение 1

Of the world's countless customs and traditions, perhaps none is as elegant, nor as beautiful, as the tradition of *sangaku*, Japanese temple geometry. From 1639 to 1854, Japan lived in strict, self-imposed isolation from the West. Access to all forms of occidental culture was suppressed, and the influx of Western scientific ideas was effectively curtailed. During this period of seclusion, a kind of native mathematics flourished.

Приложение 2

corum. They had been sent to him, at my suggestion, by Hidetosi Fukagawa. I knew that Léo had a great love for geometry. These problems first appeared in December, 1984, and attracted much attention from the international readership of *Crux*. In fact, a Bulgarian mathematics education journal has displayed a temple problem on the front cover of successive issues, and attracted solutions from many readers; the editor, Professor Jordan Tabov, has taken some to Moscow for publication in Russian mathematics education journals, great interest has been aroused in Spain, and there are indications that these problems will appear in journals in Central and South America also. These are all countries, of course, where geometry was not virtually abandoned, as it was in the United States, with the advent of the *new math*.

Crux Mathematicorum is now published by the Canadian Mathematical Society, and it is appropriate that this collection of Japanese Temple Geometry Problems should be published in Canada. Hidetosi Fukagawa and I have indeed been fortunate in encountering so many friends of geometry during our years of collaboration in writing this book, a collaboration which began soon after his first letter to me in May, 1984.

Dan Pedoe
1956 East River Terrace
Minneapolis, Minnesota, U.S.A.

Приложение 3

2 интересни решения Сангаку от брой 2/1987– на Е. Карлов (2/1988) и В. Джакова (4/1988):

ЗА „САНГАКУ" ОТ БРОЙ 2, 1987 Г.

ДВА СИМЕТРИЧНИ КВАДРАТА

ЕМИЛ КАРЛОВ, Ямбол

Квадратен лист хартия $ABCD$ е сгънат така, че D заема положение D' върху BC. С A' е означено положението на A след сгъването, а с E — пресечната точка на AB и $A'D'$. В триъгълника $BD'E$ е вписана окръжност и с r е означен нейният радиус.

Теорема:

Доказателство. Симетрията σ спрямо правата на сгъването е определена от съотношенията σ: $D \to D'$ и σ: $A \to A'$. Нека $A'B'C'D'$ е образът на $ABCD$ при тази симетрия (черт. 1). Без ограничение на общността можем да приемем, че страните на тези два квадрата са с дължина 1. Тъй като D' е на разстояние 1 от AD, то поради симетрията и D е на разстояние 1 от ED. От това е ясно, че D е център на външновписаната окръжност на триъгълника $BD'E$. Следователно периметърът на този триъгълник е равен на $2CD=2$.

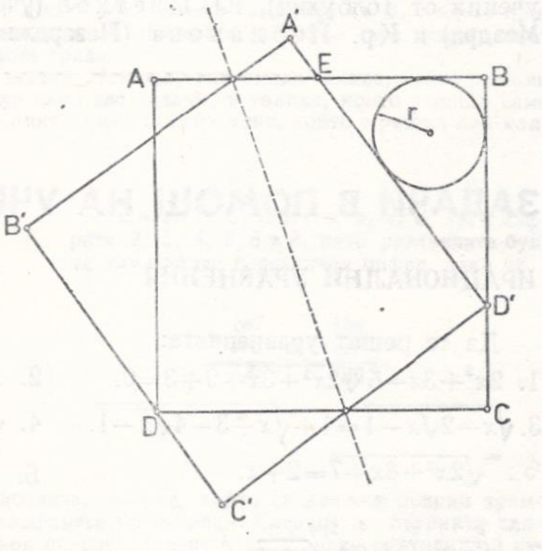
От формулата, изразяваща радиуса на вписаната в правоъгълен триъгълник окръжност чрез страните му, имаме

$$r=\frac{1}{2}(BE+BD'-ED').$$

Следователно

$$r=\frac{1}{2}(2-2ED')=1-ED'=A'E,$$

което трябваше да се докаже.



Черт. 1

Предлагаме на читателите и две задачи, свързани с горната теорема:

Задача 1. Даден е квадрат $ABCD$ със страна 1. Върху страните му BC и AB са избрани съответно такива точки E и F, че $\sphericalangle EDF=45°$. Ако r е радиусът на вписаната в триъгълника EBF окръжност, да се докаже, че $r+EF=1$.

Задача 2. Даден е квадрат $ABCD$ със страна 1. Върху страните му BC и AB са избрани съответно такива точки E и F, че периметърът на триъгълника EBF е равен на 2. Да се намери ъгъл EDF.

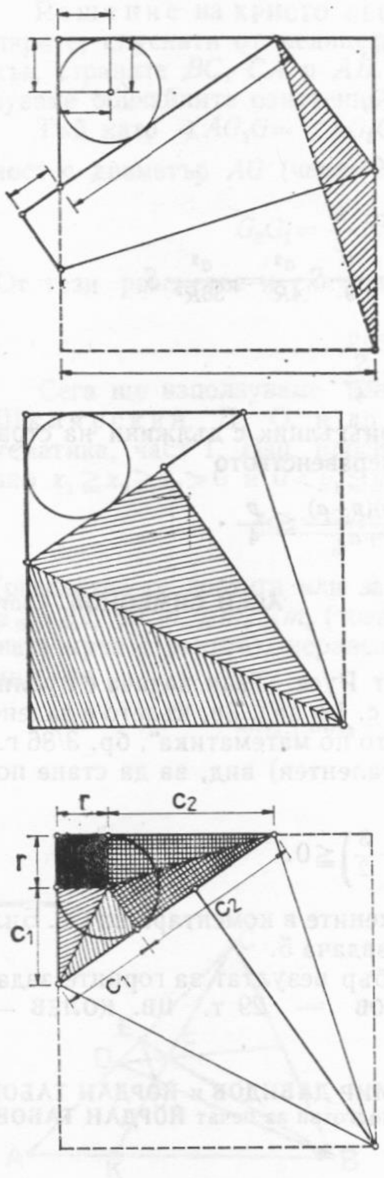
61

ОТНОВО ЗА „САНГАКУ“ ОТ БР. 2, 1987 г.

ВАЛЕНТИНА НИКОЛОВА-ДЖАКОВА, София

Очарованието на задачите от серията „Сангаку“ идва от яснотата и нагледността на формулировките. Потърсих решение в същия стил. Струва ми се, че и условието на задачата може да се редактира така, че да се използуват само най-нужните означения, без, разбира се, да се изменя съдържанието на теоремата.

Предлагам формулировката и решението на задачата в три чертежа.



Черт. 1, 2, 3

Т е о р е м а. Квадратен лист хартия със страна a е сгънат така, че един от върховете попада върху срещулежаща страна. При това срещуположният му връх става връх в правоъгълен триъгълник с хипотенуза c. Радиусът на вписаната в този триъгълник окръжност е r. Да се докаже, че $a-c=r$ (черт. 1).

Р е ш е н и е.

Наблюдение 1. Защрихованият на черт. 1 триъгълник е равнобедрен, тъй като при сгъването дължините не се променят. Ъглите при основата му са равни. Равни са и ъглите, които ги допълват до 90°. Основата на равнобедрения триъгълник е общо рамо на тези два ъгъла. Прегъваме квадрата по това общо рамо и получаваме резултата, отразен на черт. 2.

Наблюдение 2. Защрихованите на черт. 2 триъгълници са правоъгълни с обща хипотенуза. Всеки от тях има катет с дължина a. Прегъваме по хипотенузата и получаваме резултата, отразен на черт. 3.

Наблюдение 3. Двете страни на квадрата покриват точно контура на правоъгълния триъгълник, за чиято дължина се вижда от чертежа, че е $2r+2c$. Следователно $2a=2r+2c$. Или $r=a-c$, което трябваше да се докаже.

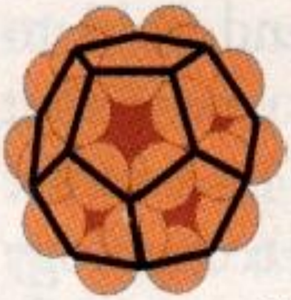
Стилът на „Сангаку“ е много близък до идеите на Ф. К л а й н за преподаването на геометрията в училище и затова намирам за уместно да приведа следния цитат:

„По такъв начин тук доказателството е направено съвсем кратко, и стру-

Приложение 4

sion. SCIENTIFIC AMERICAN wishes to acknowledge the help of Hidetoshi Fukagawa in preparing this manuscript. Fukagawa received a Ph.D. in mathematics from the Bulgarian Academy of Science. He is a high school teacher in Aichi Prefecture, Japan.

Приложение 5



Answer: $R = \sqrt{5}r$, where R and r are the radii of the large and small spheres, respectively. The problem can be solved by realizing that the center of each small sphere lies on the midpoint of the edge of a regular dodecahedron, a 12-sided solid with pentagonal faces.