

ВЪВЕЖДАНЕТО НА ГЕОМЕТРИЧНА ВЕРОЯТНОСТ В XI КЛАС¹

Борислав Йорданов Лазаров

Институт по математика и информатика

Българска академия на науките

lazarov@math.bas.bg

Резюме: В статията са представени идеи за връзка между класическа и геометрична вероятност, които биха могли да подпомогнат преподавателите при операционализирането на учебната програма за общообразователна подготовка в XI клас. Най-общо казано, стохастично явление с безкрайно (неизброимо) много равновъзможни изходи се разлага на крайно обединение от равновероятни изходи. За това обединение е приложим моделът на класическата вероятност. Предимствата на такава методика са в по-добрата мотивация за въвеждане на новото понятие геометрична вероятност. Засегнати са и философски проблеми относно връзката между континуум и дискретна структура, които за целевата група носят мирогледно послание. Включени са примери от състезателните теми на турнира „Черноризец Храбър“.

Keywords: geometrical probability, classical probability, Chernorizec Hrabar Math Tournament.

1. Увод

В програмата за общообразователна подготовка по математика в XI клас, която влиза в сила от 2020/2021 учебна година, са включени две теми от *геометрична вероятност*: 4.4. Геометрична вероятност върху правата като отношение на дължини на интервали. 4.5. Геометрична вероятност в равнината като отношение на лица.¹ Това е нова област за средното ни образование, в която тепърва ще се проправят методически пътеки. Както обикновено, в такива случаи има несигурност и лутане. Това засега се забелязва в утвърдените учебници – авторските колективи ни представят разнообразие от идеи, респективно, разнообразие от методически проблеми по темата. Дано се окажем лоши предсказатели, очаквайки в началото методическите проблеми да намерят своето задълбочаване и изостряне в педагогическата практика. Това ни дава основание да дадем в статията някои идеи, които считаме за полезни при разрешаването на основния казус: *въвеждане на ново понятие с опора на вече изучени понятия*.

¹ Статията е препечатана от сп. Педагогика, НИОН "Аз-Буки", 2021 г., бр.4.

2. Вероятностният модел геометрична вероятност

Нека m е мярката дължина или лице на равнинна фигура.² Ако Ω и A ($A \subset \Omega$) са две фигури в равнината, за които може да се въведе мярката m , като $m(\Omega) > 0$, то геометричната вероятност на събитието *случайно избрана точка от Ω да принадлежи на A* се дефинира като $\frac{m(A)}{m(\Omega)}$ (Sevast'yanov et al., 1980). Да подчертаем, че както Ω , така и A , могат да са съставени от отделни парчета: непресичащи се отсечки или фигури.

На пръв поглед от методическа гледа точка няма проблеми – понятията дължина и лице се считат за изучени.³ От свойствата на мярката може да се изведе, че така дефинираното отношение удовлетворява изискванията, които налагаме при определяне на класическа вероятност – и тук няма методически проблем. Проблем се появява, когато се търси мотивация за подобна дефиниция. Преходът от дискретен към непрекъснат модел изисква определено дидактическо майсторство или поне набор от дидактически материали, каквито липсват в учебниците. Затова в следващите секции ще предложим няколко дидактически материала, подходящи, според нас, за въвеждащ текст към уроците за геометрична вероятност. Примерите са на основата на тестови единици, включвани в състезателни теми на Есенния турнир по математика и информатика *Черноризец Храбър*.

3. Квантуване на отсечки

В евклидовата геометрия отсечката е континуум, в реалния живот не е така. Това дава шанс да се съставят въвеждащи примери за геометрична вероятност на основата на класическия модел: краен брой равновероятни събития.

Пример 1. Приблизително каква е вероятността, ако за секунда погледнем цифров часовник във времето между пладне 12:00 и полунощ 00:00, да видим четири нечетни цифри?

А) 0,1 Б) 0,04 В) 0,08 Г) 0,02 Д) 0,06

Отговор В.

Обосновка. „Благоприятните минути“ са тези, при които първата цифра е 1; за втората цифра има 4 варианта (3, 5, 7, 9), за третата има 3 варианта (1, 3, 5) и за последната има 5 варианта (1, 3, 5, 7, 9). Следователно на часовника четирите цифри са нечетни по време на $4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ минути, т.е. 1 ч. Между пладне и полунощ има 12 часа. Следователно търсената вероятност е около $\frac{1}{12} \approx 0,08$.

Да отбележим, че „границните“ секунди между благоприятни и неблагоприятни минути са сумарно 2 минути, т.е. те могат да повлияят на вероятността с $\frac{2}{12 \cdot 60} = \frac{1}{360} < 0,003$, което се вписва в разглежданата точност на интервалите във вариантите за отговор. (Lazarov, 2019)

Коментар. Времевият интервал теоретично е континуум, но реално се състои от краен брой моменти – в нашия случай секунди, които образуват пространството от равновероятни елементарни събития. В обосновката „благоприятните минути“ са онези отсечки, които се

появяват в модела геометрична вероятност. Формулировката на задачата предполага приблизително пресмятане. Така се дава възможност за обосновка на отговора чрез закръгляване на резултата от изчисленията, като същевременно се обезпечава строгост на разсъжденията. На въпроси от типа „ама какво става, ако цифрите се сменят в секундата, когато сме погледнали“ се отговаря с „бройте такъв изход както си искате – благоприятен или неблагоприятен; това няма да повлияе на отговора“.

4. Въвеждащ текст към урок за геометрична вероятност

В учебника (Bankov et al., 2020) е избран интересен подход: определянето на понятието геометрична вероятност върху правата се предхожда от въображаем „диалог в сократовски стил“.

Диалог в сократовски стил:

Учител: Автобусът за центъра на града спира на спирката всеки ден в произволно време между 8:00 ч. и 8:30 ч. Някой път успявам да го „хвана“, но някой път той вече е минал. Как мога да пресметна вероятността да „хвана“ автобуса, ако отида на спирката в 8:15 ч.?

Ученик: Аз знам, че класическа вероятност е отношението на броя на благоприятните към броя на всичките елементарни събития, т.е.

$$P(A) = \frac{\text{брой на благоприятните елементарни събития}}{\text{брой на всички елементарни събития}},$$
 но в тази задача множеството от елементарните събития е безкрайно (интервал от време) и затова не може да приложим определението за класическа вероятност.

Както става ясно от приведения цитат, въображаемият ученик изпитва душевни терзания и търси опора в изучен материал, т.е. в класическото определение за вероятност. В диалога има продължение с обяснение на въображаемия учител, което няма да коментираме.

Предложеното в пример 1 квантуване би направило прехода класическа→геометрична вероятност съвсем естествен и оттук въображаемият диалог става по-убедителен. За тази цел в рамката на реален диалог учителят би могъл да зададе въпрос: може ли ситуацията от примера да се интерпретира чрез краен брой равновероятни събития. Е, тук следва да припомним необходимото условие за преподаване в сократовски стил – учителят да е опитен и учениците да не спят (Froydental, 1986).

Следват още две идеи за квантуване на линия, които, според нас, са подходящи за въвеждащ текст.

1. *Чупене на пръчка.* Популярни задачи имат следната обща идея: пръчка (с дължина 1 м) се срязва (чупи) на части по случаен начин; търси се вероятността парчетата да притежават някакво свойство. Тук квантуването може да стане чрез милиметри, като това се мотивира с големината на самия срез. Отново трябва да се иска приблизителен резултат.

2. *Колело на късмета.* Има популярни телевизионни предавания, където показалец се завърта и по случаен начин попада в определен сектор от кръг с изписани въпроси.

Квантуването е експлицитно зададено чрез секторите, които нарязват окръжността на дъги. Моделът за геометрична вероятност върху правата се обогатява с *геометрична вероятност върху окръжност*, което по същество не го променя.

Въвеждащите текстове са важен компонент на урока в учебника и те трябва да се обмислят внимателно от авторите. Писаното слово не е като изказът в интерактивна среда, когато ораторът/авторът може да се доизясни, допълни, доуточни и т.н. Ето част от въвеждащ текст, който намираме за неубедителен.

„Досега разглеждахме примери за опити с краен брой равновъзможни изходи (...). При тях общият брой изходи и благоприятните такива просто могат да се изброят.

Има опити, при които изходите са също равновъзможни, но не са краен брой.

Когато множеството от елементарни изходи при даден опит е неизброимо и може да се представи във вид на част от правата, говорим за геометрична вероятност върху правата.“ (Текстът е от проект за учебник.)

Според нас, заедно с този текст, учителят следва да обясни, че при безкрайно много равновъзможни изходи всеки изход трябва да е с нулева вероятност и тогава всяко крайно или изброимо обединение на такива изходи също е с вероятност нула. Но как при това положение въобще е възможно да се реализират събитията, ако вероятността за всяко едно от тях е нула? Подобен въпрос е стоял от дълбока древност. Психологическите проблеми с възприемането на континуума като множество от точки е в основата на апорията *Стрела* на Зенон Елейски: във всеки един момент летящата стрела е неподвижна, а интервалът от време е съвкупност от моменти, значи стрелата изобщо е неподвижна (Yushkevich, 1974). Но дали всеки учител би се справил с обяснението на тези парадокси?

Освен това, в математиката *неизброимо множество* е термин, натоварен с точно определен смисъл: това е множество, което не е нито крайно, нито изброимо. Затова е неправилно в учебник по математика същите думи да се използва като фразеологично словосъчетание.

Предизвикателство 1. В светлината на цитирания въвеждащ текст, как моделът за геометрична вероятност върху правата следва да се прилага към *канторовия дисконтинуум* (Kurant & Robins, 1985)? Например, може ли с този модел да се определи вероятността на събитието *случайно избрана точка от канторовото множество* (в интервала $[0; 1]$) да се окаже в интервала $[1/9; 1/4]$?

Трябва да отбележим, че цитираният въвеждащ текст не е единственият проблемен измежду срещащите се в проектите за нови учебници. Например, има въведение, в което мотивацията на модела се прави чрез пример, решението на който се основава на самия модел. При това решението е представено като вече позната (изучавана) учебна материя.

Квантуването на въвеждащия пример би спомогнало този проблем да се разреши с минимални допълнителни усилия.

5. Квантуване на равнинни фигури

В тази секция ще дадем идея за преход от класическия вероятностен модел към геометрична вероятност в равнината. Следващият пример сам по себе си е тежичък за въвеждаща задача, но идеята за пикселите е съвсем адекватна.

Пример 2. Мишена-екран с висока резолюция се състои от два концентрични кръга, вътрешният с радиус 1 см. Винаги и с една и съща вероятност се регистрира попадение в пиксел от мишената, като регламентът е: 5 точки за уцелен вътрешен кръг и 1 точка за попадение извън него. Колко сантиметра е радиусът на външния кръг, ако математическото очакване за получените точки е 1,25?

А) 3 Б) 4 В) 5 Г) 6 Д) никое от тези

Отговор Б.

Обосновка. При висока резолюция броят на пикселите вътре в кръг или венец може да се приеме за „почти пропорционален“ на лицето на съответната област. Затова вероятността за попадение в кръгова област от мишената може да се апроксимира с отношението на лицето на областта (броят „благоприятни пиксели“) към лицето на мишената (броят „всевъзможни пиксели“).

$$p = \frac{\text{броят „благоприятни пиксели“}}{\text{броят „всевъзможни пиксели“}} = \frac{k \cdot (\text{броят „благоприятни пиксели“})}{k \cdot (\text{броят „всевъзможни пиксели“})} \approx \frac{S_1}{S_r}.$$

Тестваме отговорите:

А) Когато радиусът на външния кръг е $r = 3$, вътрешният кръг се уцелва с вероятност $\frac{1}{9}$, външният венец – с вероятност $\frac{8}{9}$.

Математическото очакване е

$$\frac{1}{9} \cdot 5 + \frac{8}{9} \cdot 1 = \frac{13}{9} \neq 1,25.$$

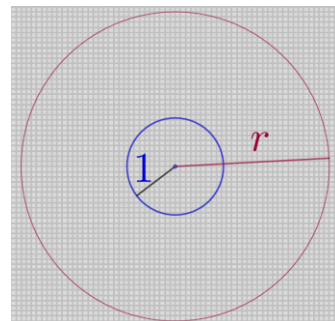
Б) Когато радиусът на външния кръг е $r = 4$, вътрешният кръг се уцелва с вероятност $\frac{1}{16}$, външният венец – с вероятност $\frac{15}{16}$.

Математическото очакване е $\frac{1}{16} \cdot 5 + \frac{15}{16} \cdot 1 = \frac{20}{16} = 1,25$, значи $r =$

4 е отговорът.

С проверка може да се установи, че отговорите В) и Г) не съответстват на условието (Lazarov, 2018A).

Коментар. Предположението, че броят на пикселите вътре в кръг може да се апроксимира с лицето на кръга, по същество е обосновано от Гаус (Hilbert & Kon-Fossen,



1981). Изразът „почти пропорционален“ съответства на терминологията на Харди (Hardi, 2002). В пример 4 ще дадем обосновка на подобно твърдение за многогълник.

6. Компютърна симулация

Понятието *статистическа вероятност* (Brodskiy, 2008) не е включено в учебната програма за XI клас. Независимо от това, неявното му приложение може допълнително да мотивира теоретичния модел *геометрична вероятност*. Например, компютърни симулации на случайни процеси, от една страна, могат да се интерпретират с геометрична вероятност; от друга страна, статистическата вероятност, пресметната при компютърна симулация, дава практическо потвърждение на модела.

Пример 3. При извикване функцията **СлучайноЧисло** връща случайно избрано число в интервала $(-1; 1)$. Каква стойност с точност до стотните се очаква да бъде отпечатана на изхода на програмата отдясно?

- А) 0,2 Б) 0,25 В) 0,33
Г) 0,4 Д) 0,5

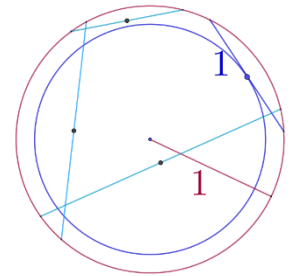
```

p ← 0, q ← 0
повтори 1 000 000 пъти:
  x ← СлучайноЧисло
  y ← СлучайноЧисло
  ако  $x^2 + y^2 < 1$  то
    q ← q + 1;
    ако  $2\sqrt{1-x^2-y^2} < 1$ 
      то p ← p + 1
отпечатай p/q

```

Отговор Б.

Обосновка. Програмата реализира компютърна симулация за вероятността на събитието хорда в кръг с радиус 1 да има дължина по-малка от 1, когато в единичния кръг по случаен начин се избира средата на хордата. Тъй като множеството от средите на хордите с дължина 1 е окръжност с радиус $\frac{\sqrt{3}}{2}$, то избирайки средата на хордата във венеца, ограден от тази окръжност и единичната, ще получаваме дължина на хордата по-малка от 1. Така p/q е приблизително отношението на лицето на венеца към лицето на единичния кръг. Лицето на венеца е $1 - \frac{3}{4}$, значи $p/q \approx 0,25$ (Lazarov, 2020).



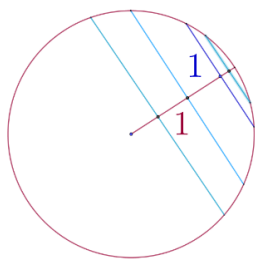
Коментар. Псевдокодът от примера е реализиран в програма на C++.⁵ В приложение 1 след статията поместваме самия код. Ето резултатите за p/q след 10 стартирания на програмата:

0.249655; 0.249805; 0.249255; 0.250708; 0.249814;
0.250828; 0.250035; 0.249962; 0.250701; 0.249582.

Така получените стойности на статистическата вероятност при компютърната симулация на случайния процес се съгласуват добре с теоретичното пресмятане по модела геометрична вероятност в равнината. Самият пример е илюстрация на единия от

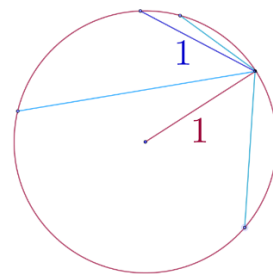
вариантите на *парадокса на Бертран*⁶. Другите два варианта на този „парадокс“ използват модела геометрична вероятност върху правата.

Предизвикателство 2. Предлагаме за обмисляне съставянето на компютърна симулация (може в псевдокод) и съответното моделиране с геометрична вероятност върху права (окръжност) на останалите два случая на парадокса на Бертран:



1) Да се определи вероятността на събитието хорда в кръг с радиус 1 да има дължина по-малка от 1, когато в единичния кръг се фиксира радиус, върху който по случаен начин се избира средата на хордата.

2) Да се определи вероятността на събитието хорда в кръг с радиус 1 да има дължина по-малка от 1, когато единият край на хордата е фиксиран и вторият край се избира по случаен начин върху окръжността.



7. Проблемът с ГМТ

По същество решаването на задачи за пресмятане на геометрична вероятност опира до определяне на някакво геометрично място на точки (ГМТ). Наистина, когато множеството от всевъзможните изходи Ω е равнинна фигура, условието, задаващо множеството на благоприятните изходи A измежду точките на Ω , определя фигура, която е част от Ω . Но това е точно ГМТ, удовлетворяващи условието за благоприятен изход.

За илюстрация ще се върнем към пример 3. В алгоритъма се избират по случаен начин точки с координати $(x; y)$ от квадрата $|x| < 1, |y| < 1$. От така избраните точки:

- първо в q се броят тези от единичния кръг;
- след това се пресмята дължината на хордата със среда съответната точка;
- после се проверява дали тази хорда е по-къса от 1;
- тези точки се броят в p ;
- накрая се пресмята p/q .

Не е трудно да се проследи как в тези стъпки последователно се определят три ГМТ.

Бедата е, че темата ГМТ не е включена в програмата по математика в средния курс. Защо това е беда? Защото учениците не прилагат знанията и уменията си (ако изобщо имат такива) за определяне на необходимо и достатъчно условие, обвързано със свойства на геометрични фигури. Оставяме настрана психологическите бариери една геометрична

фигура да се възприема като множество от точки (или на вероятностен език *как събития, всяко с вероятност 0, могат да образуват събитие с ненулева вероятност?*). По този начин помощното за геометричната вероятност понятие ГМТ трябва да се прилага, без самото то да е изучавано. В приложение 2 поместваме задачи за ГМТ от турнира *Черноризец Храбър*, които могат да послужат за запълване на визираната празнота в програмата.

Схолия относно въпроса, формулиран в горния параграф. Авторът многократно е констатирал следния „аномален феномен“: *пишейки на дъската детерминанта „със случайно хрумнали му наум елементи“, достатъчно често стойността ѝ се оказва 0*. Това е „невероятно“, доколкото детерминантите на матрици, чиято стойност е 0, се избират измежду хиперравнина на съответното линейно пространство квадратни матрици. Но мистерия няма: обикновено на лекторите им хрумват по случаен начин елементи, които са измежду целите числа от -3 до 3 , а в този случай вероятността за нулева детерминанта е по-голяма от 0 ☺. Това, разбира се, не отговаря на поставения по-горе въпрос.

От друга страна, синтезът на геометрични идеи с класическа вероятност може да се използва като самостоятелен дидактически похват. Без да имаме преки наблюдения за правилността на подхода, предлагаме за дискусия въпроса доколко е възможно квантуването, т.е. с дискретни интерпретации на континуума, да се използва за разрешаване на изброените дидактически предизвикателства. Като база за такава дискусия предлагаме с малка редакция една задача, включена в темата за XI-XII клас на турнира *Черноризец Храбър* през 2006 г.

Пример 4. Тази година в казиното се появи нов игрален автомат – *еднорък пират*. От играча се очаква да пусне един лев в автомата, където се зарежда по случаен начин естествено число a , по-малко от 2006. След това играчът трябва да дръпне ръчка – „ръката на пирата“ – и тогава *пиратът* му генерира по случаен начин друго естествено число b , по-малко от 2006. Ако се окаже, че a е по-близо до b , отколкото до 0, *пиратът* печели, а ако не – връща на играча 3 лв. Приблизително колко лева печалба предвиждат в казиното при 10 000 игри на едноръките пирати?

А) 1250 Б) 2500 В) 3750 Г) 5000 Д) 7500

Отговор Б.

Обосновка. Разглеждаме декартова координатна система Oxy . Всевъзможните състояния на играта се описват от точките $(a; b)$, където $a, b \in \{1; 2; \dots; 2005\}$, т.е. целочислените точки, вътрешни за квадрата K със страна 2006 върху всяка от координатните оси. Условието a е по-близо до b , отколкото до 0 означава $|a - b| < a$. Така казиното печели при $a > \frac{b}{2}$, т.е. благоприятните изходи за казиното са точките, за които $b < 2a$. Тези целочислени точки са от ГМТ, определени от неравенствата

$$F = \{(x; y): x > 0, y > 0, x < 2006, y < 2006, y < 2x\}.$$

Фигурата F е правоъгълният трапец $OABC$ с координати на върховете $A(2006; 0), B(2006; 2006), C(1003; 2006)$. Броят на целочислените точки от F се апроксимира добре с лицето на F . Следователно казиното печели 1 лв. с вероятност приблизително $\frac{S_F}{S_K} = \frac{3}{4}$ и губи 2 лв. с вероятност. При 10 000 игри се очаква печалба около

$$10\,000 \left(\frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{1}{4} \right) = 2500 \text{ лв.}$$

Коментар. Означаваме със $\{F\}$ броя целочислени точки, вътрешни за фигурата F . Приложението на модела *геометрична вероятност в равнината* изисква обосновка, че може да апроксимираме $\{F\}$ с лицето S_F . Това може да се направи с формулата на Пик (Lazarov, 2018B) по следния начин. Нека $n = \{F\}$ и m е броят контурни целочислени точки за F . Тогава $S_F = n + \frac{m}{2} - 1$. От това, че периметърът на F е по-малък от този на K , който е $4 \cdot 2006$, следва $m < 4 \cdot 2006$. Така стойностите $\frac{m}{S_K} < \frac{4 \cdot 2006}{2006 \cdot 2006} < \frac{1}{500}$ могат да се пренебрегнат, т.е.

$$\frac{S_F}{S_K} = \frac{n + \frac{m}{2} - 1}{2006^2} \Rightarrow \frac{S_F}{S_K} \approx \frac{n}{2006^2} = \frac{\{F\}}{S_K}.$$

8. Заключение

Смятаме, че разглеждането на отделни вероятностни модели във взаимна връзка допринася за изграждане на по-пълна представа за понятието вероятност у учениците. Често може да се чуе от невежи люде такова „съждение“: вероятността да срещнеш динозавър на улицата е 50% – или ще го срещнеш, или не. Подобно невежество може да има фатални последици, например, заменете „да срещнеш динозавър“ с „да катастрофираш“.

Въвеждането на геометрична вероятност в средния курс е един начин да се изгражда компетентност, съчетаваща теоретични знания с практически умения, т.е. съчетаваща (синтетична)

компетентност, в която отделните ключови компетентности са добили качеството на цялостен атрибут за индивида. Такава цялостност изисква интегриран подход и приемственост при въвеждането на нови математически понятия. Надяваме се, че представените тук идеи ще обогатят дидактическият арсенал на учителите в педагогическата им практика.

NOTES/БЕЛЕЖКИ

1. ЗАПОВЕД № РД09-1655/ 16.08.2018 г. на Министър на образованието и науката (Приложение №15).
2. Ще отбележим, че върху правата може да се конструира под-множество на интервала $[0;1]$, за което не може да се определи мярката *дължина*. Аналогично е положението в равнината. (Yeh, 1982)
3. Тук няма да дискутираме проблемите около въвеждането на понятията дължина и лице, които надхвърлят рамките на училищния курс. (Рохлин, 1966)
4. Официална страница www.math.bas.bg/ch.
5. Келеведжиев, Е. Код на C++ за реализация на псевдокода на задача от турнира „Черноризец Храбър“ – 2019 г. Частна кореспонденция – електронна поща от 19.08.2019. Резултатите са пресмятани с точност 6 цифри след десетичната точка (Приложение 1).
6. В оригиналната формулировка на парадокса случайната хорда се сравнява със страната на равностранныя триъгълник, вписан в окръжността. (Sevastyanov et al., 1980, p. 19.)

ЛИТЕРАТУРА

- (Bankov et al., 2020) Банков, К., Цветкова, И., Петрова, Д., Николова, Г. и Наков, С. *Математика за XI клас (Проект за учебник)*. София: Просвета-София, стр.217
- (Brodskiy, 2008) Бродский, Я. *Статистика, вероятность, комбинаторика*. Москва: Оникс, 2008, стр. 119-134.
- (Froydentaly, 1982) Фройденталь, Г. *Математика как педагогическая задача. Часть I*. Москва „Просвещение“, 1982, стр. 76.
- (Gilbert & Kon-Fossen, 2002) Гилберт, Д. и Кон-Фоссен, С. (2002). *Наглядная геометрия*. Москва: Наука, 2002, стр. 40.
- (Hardi, 2002) Харди, Г. *Двенадцать лекции о Рамануджане*. Москва, Институт компьютерных исследований, стр. 100.
- (Kurant & Robins, 1985) Курант, Р. и Робинс, Х. *Що е математика?* София: Наука и изкуство, 1985, стр. 248-250.

- (Lazarov, 2018A). Лазаров, Б. *Двадесет и шести Есенен турнир по математика и информатика „Черноризец Храбър“*. София: ИМИ-БАН, 2018.
- (Lazarov, 2018B) Лазаров, Б. *За и около формулата на Пик*. Математика, година LVII (2018), брой 1, стр. 29-38
- (Lazarov, 2019) Лазаров, Б. *Двадесет и седми Есенен турнир по математика и информатика „Черноризец Храбър“*. София: ИМИ-БАН, 2019.
- (Lazarov, 2020) Лазаров, Б. *Двадесет и осми Есенен турнир по математика и информатика „Черноризец Храбър“*. София: ИМИ-БАН, 2020.
- (Rohlin, 1966) Рохлин, В. (1966). Площадь и объем. В: Болтянский, В. & Яглом, И. (ред.) *Энциклопедия элементарной математики, книга V Геометрия*. Москва: Наука, 1966, стр. 7-86.
- (Sevast'yanov & Zubkov, 1980) А. Севастьянов, Б., Чистяков, В и Зубков, А. *Сборник задач по теории вероятностей*. Москва: Наука, 1980, стр. 9.
- (Yeh, 1982) Йех, Т. Об Аксиоме выбора. В: Барвайс, Дж. *Справочная книга по математической логике, часть II, Теория множеств*. Москва: Наука, 1982, стр. 42.
- (Yushkevich, 1974) Юшкевич, А (1974). *История на математиката от най-древни времена до началото на новото време*. Том I. София: Наука и изкуство, стр. 111.

REFERENCES

1. Bankov, K., Tsvetkova, I., Petrova, D., Nikolova, G. i Nakov, S. (2020). *Matematika za XI klas* (Proekt za uchebnik). Sofia: Prosveta-Sofia, p.217
2. Brodskiy, Ya. (2008) *Statistika, veroyatnosty, kombinatorika*. Moskva: Oniks, pp. 119-134.
3. Froydentaly, G. (1982). *Matematika kak pedagogicheskaya zadacha*. Chasty I. Moskva: Prosveshtenie, p. 76.
4. Gilbert, D. i Kon-Fossen, S. (2002). *Naglyadnaya geometria*. Moskva: Nauka, p.40.
5. Hardi, G. (2002). *Dvenadtsaty lektzii o Ramanudzhane*. Mos-kva: Institut kompyuternykh issledovaniy, p. 100.
6. Kurant, R. i Robins, H. (1985) *Shto e matematika?* Sofia: Nauka i izkustvo, pp. 248-250.
7. Lazarov, B. (2018A). *Dvadeset i shesti Esenen turnir po matematika i informatika „Chernorizets Hrabar“*. Sofia: IMI-BAN.
8. Lazarov, B. (2018B). *Za i okolo formulata na Pik*. *Matematika*, 57 (1), pp. 29-38
9. Lazarov, B. (2019). *Dvadeset i sedmi Esenen turnir po matematika i informatika „Chernorizets Hrabar“*. Sofia: IMI-BAN.
10. Lazarov, B. (2020). *Dvadeset i osmi Esenen turnir po matematika i informatika „Chernorizets Hrabar“*. Sofia: IMI-BAN.

11. Rohlin, V. (1966). Ploshtady i obem. V: Boltyanskiy, V. & Yaglom, I. (red.) *Entsiklopedia elementarnoy matematiki*, Kniga V Geometria. Moskva: Nauka, pp. 7-86.
12. Sevastyyanov, B., Chistyakov, V i Zubkov, A. Sbornik zadach po teorii veroyatnostey. (1980). Moskva: Nauka, p. 9.
13. Yeh, T. (1982) Ob Aksiome vybora. V: Barvays, Dzh. *Spravochnaya kniga po matematicheskoy logike, chasty II, Teoria mnozhestv*. Moskva: Nauka, 1982, p. 42.
14. Yushkevich, A (1974). Istoria na matematikata ot nay-drevni vremena do nachaloto na novoto vreme. Tom I. Sofia: Nauka i izkustvo, p. 111.

Приложение 1

По-долу поместваме компютърна програма, съставена от Емил Келеведжиев, която реализира алгоритъма в пример 3.

```
#include<iostream>
#include<cstdlib>
#include<ctime>
#include<cmath>

using namespace std;
double fRand(double fMin, double fMax)
{
    double f = (double)rand() / RAND_MAX;
    return fMin + f * (fMax - fMin);
}
double Sq(double x, double y)
{
    double z=1.0-x*x-y*y;
    if(z<0.0) return 1.0;
    else return sqrt(z);
}
int t;
void run(int t)
{
    srand(t);
    int i=1;
    double p=0;
    double q=0;
    while(i<1000000)
    {
```

```

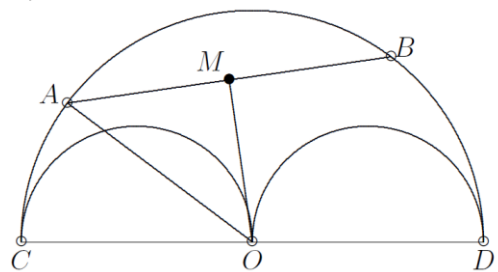
double x=fRand(-1.0,1.0);
double y=fRand(-1.0,1.0);
if(x*x+y*y<1.0)
{q=q+1;
 if(2.0*Sq(x,y)<1.0) p=p+1;
}
i++;
}
cout << p/q << endl;
}
int main()
{
 t=time(NULL);
 for(int j=1;j<=10;j++)
 {
  t++;
  run(t);
 }
}

```

Приложение 2

Пример 5. Даден е полукръг. Каква част от лицето му е лицето на ГМТ, които са среди на хорди с краища върху дъгата на дадения полукръг?

- А) $\frac{1}{3}$ Б) $\frac{1}{2}$ В) $\frac{1}{4}$ Г) $\frac{1}{\pi}$
 Д) $\frac{2}{\pi}$



Отговор Б.

Обосновка. Търсеното ГМТ е симетричният арбелос без голямата си дъга. Наистина, при означенията от чертежа, M е от ГМТ, точно когато перпендикулярът през M към OM пресича дъгата на полукръга. Това пък е изпълнено, точно когато всеки от ъглите CMO и DMO е остър и ъгъл CMD е тъп. (Задачата е от темата за XI кл. на турнира *Черноризец Храбър* през 2012 г.)

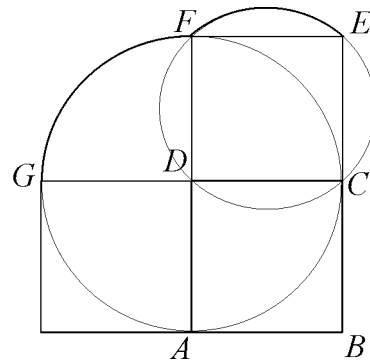
Пример 6. Геометричното място на точки, от които даден квадрат със страна 1 се вижда под ъгъл 45° , представлява линия. Дължината на тази линия е:

- А) $\pi(2 + \sqrt{2})$ Б) $\pi(3 + \sqrt{3})$ В) 4π
 Г) 12 Д) $\pi(5 - \sqrt{3})$

Отговор А.

Обосновка. От точките на дъгата EF отсечката CD (а заедно с нея и даденият квадрат $ABCD$) се вижда под ъгъл 45° . От точките на дъгата FG отсечката AC (а заедно с нея и целият даден квадрат $ABCD$) се вижда под ъгъл 45° . Поради симетрията, описаното в условието геометрично място на точки се състои от четири двойки дъги, т.е. от две окръжности с обща дължина

$$2\pi \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi = \pi(2 + \sqrt{2}).$$



(Задачата е от темата за IX кл. на турнира *Черноризец Храбър* през 2014 г.)

Предизвикателство 3. Преформулирайте примери 5 и 6 като вероятностни задачи, прилагайки подходящ модел на геометрична вероятност. Например, за пример 6 формулировката може да бъде следната: *От дадена точка квадрат се вижда под ъгъл 45° . Каква е вероятността от тази точка да се виждат две страни на квадрата?* (Отговор. $2 - \sqrt{2}$. Обосновка. $\frac{2\pi}{\pi(2+\sqrt{2})} = \frac{2}{2+\sqrt{2}}$.)

INTRODUCING GEOMETRICAL PROBABILITY IN 11th GRADE

Borislav Yordanov Lazarov

Abstract. The paper presents some ideas for linking the model of classical probability with the geometrical probability, which are potentially helpful in operationalizing the correspondent topics from the Bulgarian math curriculum for the 11th grade. The point is to partition a continuum sample space into large numbers of disjoint events. Such partitioning allows interpreting a particular geometrical figure as a finite set of disjoint equal parts. In such manner, the corresponding stochastic phenomenon is considered as a finite composition of equiprobable outcomes. The benefits of this approach consist of the better didactical motivation when introducing the new concept of geometrical probability. Some comments on the philosophical correspondence between continuum and discrete structure are discussed. The examples are taken from the competition papers of Chernorizec Hrabar Math Tournament.