

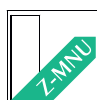
Към нов подход в математическото образование

(избрани извадки от английския превод на оригиналното издание в три части)

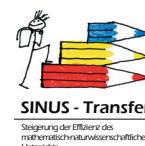
SINUS and SINUS-Transfer

СЪДЪРЖАНИЕ

▶ Кратко въведение към философията на проекта SINUS за преподаватели по математика	3
▶ За нов начин на преподаване на математика	11
▶ Да почувстваме математиката	17
▶ Обучението по математика – разкриване на индивидуални пътища за учене	43
▶ Послепис към българския превод	67



UNIVERSITÄT
BAYREUTH



SINUS - Transfer
Steigerung der Effizienz des
mathematisch-naturwissenschaftlichen
Unterrichtes

Книгата е издадена с подкрепата на проект „Fibonacci – разпространение на изследователския подход в образованието по математика и природни науки в Европа“



Проектът Fibonacci е получил финансиране от Седма рамкова програма на Европейския съюз. Участник от България е Институтът по математика и информатика на БАН.

<http://www.fibonacci-project.eu/>

Координатор на проекта за България: акад. Петър Кендеров



DISSEMINATING INQUIRY-BASED SCIENCE
AND MATHEMATICS EDUCATION IN EUROPE

Редактори

Петер Баптист, Карстен Милер, Дагмар Рааб

Редактор на българското издание

Евгения Сендова

Автор

Петер Баптист

Издател на английската версия

Катедра по математика и математическо образование
Университет в Байройт



UNIVERSITÄT
BAYREUTH

Превод от английски език

Теодора Давидова, Йорданка Горчева

Коректор

Ани Търсанкова

Предпечатна подготовка

Виктория Наумова, Красимира Иванова

Издателство „Регалия 6“

ISBN 978-954-745-225-1



Петер Баптист

Кратко въведение към философията на проекта SINUS за преподаватели по математика

Превод: Теодора Давидова

Първи стъпки към нов начин на преподаване на математика

Защо да преподаваме математика в училище?

Значението на математиката

Малцина разбират, че високите технологии, белязали съвременното ни, са по своята същност математически технологии.

Едуард Б. Дейвид
Бивш президент на Exxon Research

Математиката е едно от най-старите, най-значимите, последователни и същевременно най-актуални постижения на човечеството. За хора, работещи в областта на естествените науки или икономиката, е немислимо да се анализира явление или да се създава негов модел без помощта на математиката. Съвременното ни се определя в нарастваща степен от високотехнологичните компютри и безпрецедентния научен и технологичен прогрес. Ето защо математиката печели все по-значими позиции. Основите на множество аспекти на културата и комуникациите, отличаващи модерното общество, са положени върху математически прозрения и методи и често са резултат на най-новите научни открития. Математиката не се свежда до механично прилагане на правила. Тя е висша творческа дейност, изискваща специфични мисловни умения, специфични методи и не на последно място – всеотдаен опит. Но тази характеристика на математиката, отразяваща нейната истинска същина, обикновено не се популяризира достатъчно упорито в немските училища. Все още се обръща прекомерно внимание на формалните методи за смятане..

Културната стойност на математиката

Красотата е първото изпитание: няма кътче в света, където неугледната математика би намерила място.

Годфри Н. Харди (1877-1947)

Прилагането на математическите умения е интелектуално приключение, изискващо въображение, съобразителност, логическо мислене, последователност и критичност. Подобно на изкуството, математическите теории, задачи и решения провокират не само интелекта, но и чувствата и естетическите възприятия. Също като поетите, художниците и композиторите, математиците са създатели на мотиви, структури и модели, достатъчно свежи и жизнени, за да пребъдат през вековете. Тези безсмъртни математически творения имат за основа забележителни идеи, като едновременно с това удовлетворяват и нашите естетически изисквания. Математиката проявява красотата си по разнообразни начини. Тя не зависи от степента на трудност, нито от равнището на резултатите или разглежданите теореми. Естетическото съдържание може да се култивира и на елементарно ниво. Най-популярният пример за това навярно е Питагоровата теорема.

Математиката като ключова технология

Книгата на природата е написана на езика на математиката.

Галилео Галилей (1564-1642)

От друга страна, математиката е незаменим технически инструмент, използван в естествените и компютърните науки, в инженеринга и икономиката. Техническият прогрес и развитието на медицината са немислими без нея. Този аспект трябва също да бъде взет предвид при обучението по математика в училище. Управлението на пътните светофари и функционирането на интелигентните транспортни системи са непостижими без математика. Без нея няма да имаме преносими компютри, мобилни телефони, DVD или MP3 устройства, навигационни системи, компютърни скенери, карти за банкомати и сканиращи касови апарати. Списъкът с примери може да расте безкрай защото не друго, а математиката лежи в основата на вградените в техническите устройства и средства електронни компоненти. Макар обикновено невидима в готовия продукт, най-напред е трябвало да бъде развита тя, а сетне – и приложена към конкретния проблем. Една от задачите на училището е да представи културния и технологичния принос на математиката и да спомогне да бъде осъзната по-добре нейната значимост.

Резюме

Математиката не е всичко.

Но без математика всичко е нищо.

Ханс Олаф Хенкел

Далече сме от мисълта, че всеки е длъжен да се занимава с математика така, както правят това математиците. Наслаждаваме се на Бетовен, Моцарт и Фреди Меркюри, без да храним илюзията, че ние самите бихме създали майсторска композиция. За да разберем оперите на Вагнер и картините на Пикасо е необходимо да бъдем насочвани и да имаме опит. За задълбоченото разбиране и достойната оценка на математиката също са потребни насочване и опит. Необходимо е обществото да осъзнае много по-добре значението на математиката за живота. Това е една от съществените и неотложни цели на обучението по математика. Заедно с преподаватели от почти всички федерални провинции на Германия доведохме пилотното проучване SINUS до успешен завършек, като демонстрирахме и изпитахме различни методи за постигане на посочените цели и за намаляване и дори премахване на пропуските в математическото образование. Но пилотните проучвания могат само да подготвят почвата и да посочат пътя. Ето защо за крайния успех на проекта решаваща роля играят всеобщото възприемане на тези идеи от преподавателския състав и тяхното прилагане във възможно най-голям брой училища.

В центъра на вниманието – преподаването в класните стаи

Аз, естествено, не знам дали ще бъде по-добре, ако е различно.

Но трябва да бъде различно, за да бъде поне малко добре.

Георг С. Лихтенберг (1742-1799)

„Историята на успеха има твърде обемисто название: Повишаване на ефективността на образованието по математика и естествени науки. Амбициозната програма доказва, че дори и в Германия може да бъде постигнато нещо, считано за непостижимо от възприеманите като мудни германци, – скоростна реакция на плачевното положение в училищата, реформиране на обучението в клас, основната дейност на образователните институции, мобилизиране на силно упреквания преподавателски състав да приеме промените – и всичко това посредством сътрудничеството между федералните и държавни правителства“. („Ди цайт“, немски седмичник, 20/2003).

„Задачи, взети от живота, а не схематично смятане; индивидуално обучение, а не затрупване с формули с еднакво за всички темпо – това е реформата в обучението по математика, зад която застава проектът SINUS. В началото програмата за обучение на напреднали в Германия обхваща няколкостотин учители. След шока от Международната програма за оценка на учениците PISA техният брой нарасна десеторно. SINUS показва успешния начин за промяна на обучението.“ („Ди цайт“, немски седмичник, 50/2004).

Регионалните и централните печатни издания също отразиха с единодушни положителни оценки пилотното проучване на Федералната комисия за насърчаване на планирането и изследователската дейност в образованието (BLK). Но те изразиха и съжалението си, че въпреки отбелязания напредък SINUS все още далеч не е стигнал до всяка класна стая. През последните години броят на училищата, работещи по методиката на SINUS, нарасна значително. Ние обаче ще бъдем удовлетворени едва тогава, когато я въведем във възможно най-голям брой учебни заведения. Как да постигнем това? Най-напред трябва да заинтригуваме онези учители, чиято осведоменост за пилотното проучване е все още бегла и да проникнем до съзнанието на заинтересованата широка общественост. Вярваме, че сте нетърпеливи да разберете как функционират училищата, където обучението по математика се извършва по метода SINUS.

В началото бе анализът на статуквото: Как развихме и разпространихме SINUS

Конкурентоспособността на една страна не започва в завода или техническата лаборатория. Тя започва в класната стая.

Ли Якокка

През 1997 г. след шока от резултатите на международното изследване TIMSS (Тенденции в изучаването на математика и точни науки) Федералната комисия назначи експертен съвет със задача да потърси пътища за подобряване на обучението по математика и точни науки. Бяха анализирани редица проблеми, свързани с изучаването и преподаването на матема-

тиката и точни науки. Нещо повече, специалистите предложиха начини за организиране на пилотно проучване на територията на цяла Германия и дефинираха свързаните с неговото съдържание идеи.

Трайните промени в обучението не могат да се спуснат „с указ“ отгоре. Те трябва да бъдат разработени „отвътре“ и от основата им, във всяко отделно училище, за всеки отделен учител и ученик. Това е основната идея, залегнала в проекта SINUS и тя послужи като генерална насока за действие. В пилотното проучване взеха участие повече от 180 училища от всякакъв вид, предлагащи Втора степен за завършено средно образование (1 април 1998 – 31 март 2003). Целта на работата в училище беше да се повиши качеството на обучението по математика и естествени науки. Инициативността и отговорността от страна на училището бяха равностойни по значение с тясната връзка и сътрудничество вътре в него и между отделните училища. По отношение на методиката и организацията на обучението, училищата получиха поддръжка от Института за педагогика и естествени науки (IPN) в Кил (в качеството му на отговорник за реализиране на проекта), катедрата по математика и математическо образование и Центъра за математика и естествени науки (Z-MNU) в Университета в Байройт и Държавния институт за училищна педагогика и изследвания в образованието (ISB) в Мюнхен. За да популяризира идеите, методите и резултатите на SINUS и да създаде широко поле за нововъведения и подобряване на качеството на обучението, BLK стартира Програма за разпространение на SINUS. От началото на учебната 2003/2004 година в работата се включиха нови училища в две поредици, всяка с продължителност по две години (общо около 1800 училища). В резултат на федералната реформа в Германия се наложи програмата за разпространение на SINUS да приключи през 2007 г.

Качество на обучението – основните предпоставки

Преподавателите могат да окажат най-голямо влияние върху собствените си методи на преподаване. Техен дълг е да го упражняват.

Андреас Хелмке

За всеки, който се занимава с образование е ясно, че сами по себе си иновативните учебни програми и образователни стандарти не са гаранция за постигане на положителни промени в преподаването. Качеството на обучението се подобрява или влошава в зависимост от личността на преподавателя. Обучението зависи от професионализма и мотивацията на самите преподаватели. Ефективни промени са възможни – това доказва и пилотното проучване SINUS. Постигнахме го с множество малки промени в продължение на определен период от време. Основната предпоставка за успеха обаче е в това да накараш участващите преподаватели да повярват твърдо в съответните идеи и активно да се включат в процеса на реализиране на промените.

Промяната не означава непременно промяна на използваните в училище математически понятия. Тя означава промяна на начина, по който разглеждаме тези понятия. Тя означава промяна на начина на преподаване. Учителят не е актьор от забавно предаване, а ученикът не е прост наблюдател. Обучението е активен, конструктивен, кумулативен и целенасочен процес. Като такъв трябва да бъде възприеман и от учениците. Ето защо предаването на знания от учител на ученик не е едностранен акт. Напротив – учителите са длъжни да осигурят възможност на учениците да намерят своя подстъп към знанието. В статия за прилагането на

тази концепция в училище, което работи по програма SINUS, немският седмичник „Ди цайт“ (41/2006) даде за пример училище от провинция Бранденбург, под сензационното, но съвсем подходящо заглавие „Революция в математиката“, с подзаглавие „SINUS променя обучението по математика в немските училища“.

За да се осъществи или разпространи „революцията в математиката“, не е достатъчно само преподавателите да се чувстват ангажирани. За целта е нужно да се изпълнят няколко рамкови условия. Това означава:

- ▶ училищната администрация и контролните органи да оказват конкретна подкрепа и да насърчават необходимите реформи;
- ▶ учениците и родителите да приемат факта, че постиженията в науката са невъзможни без усилия и всеотдайност.

Банална истина е, че показващото добри резултати училище, няма да постигне успех без подкрепата на обществото. SINUS не предоставя единственото и универсално решение за успешното обучение по математика. Множество пътища водят към тази цел, а някои от тях са коренно различни от другите. Обикновено успешните учители по математика представляват ярки индивидуалности. В нашата брошура обаче са изложени конкретни ключови понятия.

Ръководни идеи – преосмисляне на собствените методи на обучение

Международните сравнителни проучвания доказват, че средното равнище на обучението по математика в Германия е високо. Бяха установени обаче пропуски в начина, по който се предава съдържанието. За подобряване на обучението в клас не е нужно да променяме съдържанието, а да променим начина, по който го преподаваме – т.е. нужни са иновации в клас. Кое отличава успешното обучение по математика в училищата, работещи по програма SINUS? Как да предадем конкретна форма на вече споменатите малки стъпки, водещи до нова форма на обучение? Философията SINUS се разбира най-добре чрез съзнателното обмисляне на собствените методи на преподаване. Няколко централни теми могат да послужат като средство за ориентация. При тях са взети предвид пет различни аспекта на обучението:

1. Стил на преподаване
2. Работа по задачи/цели
3. Техническо съдържание
4. Начини за проверка на постигнатото
5. Ролята на учителя по математика.

Разсъжденията по горните възлови теми са от полза и за студентите от висшите учебни заведения, както и за стажант-учителите. Макар опитът на начинаещите преподаватели да е ограничен (ако изобщо имат такъв), тези възлови теми ще им посочат области, които са от коренно значение за предстоящата преподавателската дейност.

1. Преценете отново своя стил на преподаване.

- ▶ Фокусът на обучението пада върху учениците ви, а не върху вас.
- ▶ Насърчавайте учениците да изучават, не ги поучавайте.
- ▶ Поощрявайте учениците да търсят собствени пътища за учене.
- ▶ Правете предложения и оказвайте подкрепа за самоподготовката им.
- ▶ Разграничете отчетливо процеса на обучение от процеса на проверка.

- ▶ Прилагайте разнообразни форми и методи на обучение в класната стая.
- ▶ В заключение помнете, че ученикът е този, който носи отговорността за своя напредък в обучението, а не вие.

2. Преразгледайте своята работа по задачите.

- ▶ Изисквайте от учениците не само отговори, а ги накарайте да се почувстват съпричастни към съответните въпроси. Целта е пътят!
- ▶ Осигурете възможност за активна и продуктивна работа по задачите:
- ▶ инициирайте задачи и цели;
- ▶ разнообразете задачите;
- ▶ разграничете моделите;
- ▶ подгответе стратегии за постигане на решения.
- ▶ Намерете различни пътища към решенията и едва тогава вземете самите решения.
- ▶ Свържете познанията от ежедневието с математическите познания по разбираем начин.
- ▶ Накарайте учениците да водят дневник на обучението си. Научете ги да отразяват в писмен вид процесите на решаване на задачи и на обучение.

3. Преразгледайте съдържанието на предмета.

- ▶ Ограничете се в рамките на фундаменталното съдържание.
- ▶ Акцентируйте върху най-значимите идеи от съдържанието.
- ▶ Представете съдържанието в подходящ и интересен контекст.
- ▶ Обърнете внимание на установяването и развитието на взаимната обвързаност между съдържание и структура
- ▶ Ограничете преобладаващата тенденция към просто смятане и наблегнете на разбирането.

4. Преразгледайте своя традиционен метод на проверка.

- ▶ Налага ли се проверката да включва винаги смятане?
- ▶ Може ли въпрос от проверката да има описателен вид?
- ▶ Може ли една „традиционна задача“ да съдържа обяснения и доказателства?
- ▶ Могат ли задачите да бъдат съставени така, че да имат различни решения и да бъдат логични?
- ▶ Разнообразяването на проверяваните въпроси може да наложи по-високата изискателност от формалното прилагане на методите за пресмятане.
- ▶ Направете оценка на начина на водене на дневниците за обучение.
- ▶ При планиране на уроците включвайте проверки на изпълнението на целите на обучението.

5. Преразгледайте ролята си на учител по математика.

- ▶ Изразявайте възхищението си от математиката.
- ▶ Подчертавайте непрестанно значението на математиката най-вече за културата, технологията и промишлеността.
- ▶ Покажете личното си отношение към предмета, който преподавате.
- ▶ Продължете своите активни занимания с математика: решаване на задачи, състезания, научнопопулярна литература и др.
- ▶ Не бъдете „вълк-единак“, разчитайте на сътрудничеството с учениците и преподавателския състав.
- ▶ Покажете чрез своя начин на преподаване, че математиката е пулсираща, постоянно развиваща се дисциплина.

Перспективи

Тези насоки имат за цел да провокират преосмисляне на стила на преподаване, като заложат определени приоритети. SINUS акцентира силно върху поощряването на учениците да изнасят свои собствени ресурси за обучение. Но не само учениците са длъжни да открият личните си възможности. Споменахме вече, че успешното образование има индивидуално лице и то е преди всичко лицето на отделния учител. Идеите и материалите по SINUS вдъхват ентузиазъм, но доколко ще се материализира той зависи от отделната личност.

Първата стъпка е преоценка на собствения начин на преподаване въз основа на посочените възлови теми. Тя е фундаментът на всяка промяна в преподаването. Като следващ етап излиза необходимостта от изчерпателна информация за идеите и съдържанието на SINUS, заедно с изпитани и проверени писмени материали. Допълнителна информация във връзка с упоменатите цели ще получите на адрес: <http://www.sinus-transfer.eu>.



Петер Баптист

За нов начин на преподаване на математика

Превод: Теодора Давидова

Заклучения от пилотните проучвания на SINUS и неговото разпространение

Всичко е вече казано, но тъй като никой не слуша, трябва непрестанно да се връщаме назад и да започваме всичко отново.

Андре Жид (1869 – 1951)

Къде сме сега?

Международните сравнителни проучвания като TIMSS и PISA не само предоставиха информация за състоянието на преподаването – те са безспорно необходими и полезни. На горните проверки и резултати обаче не бива да се приписва по-голямо значение от това, което се придава на целите и съдържанието на обучението, а следователно и на самото образование. Същото се отнася и за тестването на всеки етап на обучението, което междувременно става задължително за все по-голям брой европейски страни. Преподаването не бива да се свежда до учене за теста. За беда в тази насока вече се открояват нежелани явления.

Обучението няма да се подобри заради това, че е станало обект на оценка и емпирично изследване. За практическото отстраняване на признатите недостатъци са нужни конкретни, обвързани със съдържанието концепции за промяна на процесите преподаване и заучаване. Общи препоръки и изисквания, без връзка с конкретно и отнасящо се към определени теми съдържание, не водят до промяна. Преподавателите са особено склонни да приемат съвети и да ги осъществят на драго сърце, когато предложенията са направени във вид на разумни технически и дидактически форми.

От много години се провеждат проучвания за конструктивно развитие на методологията, като дейността се ориентира в посока проектиране (пресъздаване) на учебната среда и емпиричното ѝ изследване, изпитване и внедряване. Германските пилотни проучвания на BLK*, „Повишаване на ефективността на образованието по математика и естествени науки“ (SINUS) и разпространение на SINUS извлякоха голяма полза от тази конструктивна развойна дейност. Внедряването на резултатите в училищата, както и в обучението за начинаещи и напреднали преподаватели, представлява една от най-важните задачи на образователната политика, независеща от каквито и да било реформи на федералната система в Германия.

* Федералната комисия за насърчаване на планирането и изследователската дейност в образованието до 2007 г.

Отправни точки на промяната в преподаването и ученето

1. Ръководство за самостоятелна работа.

*Ученикът е достигнал зрелост тогава, когато
е научил достатъчно, за да бъде в състояние да учи сам.*

Вилхелм Хумболт (1767-1835)

В наши дни учениците не получават такава автономност. Учителите поднасят съдържанието на преподавания предмет, а учениците го забравят начаса или поне то не стига до съзнанието им. („Знанието се сервира, преглъща и забравя.”) Как да се отърсим от този проблем? Начинът е само един – смяна на ролите – учителят не е актьор от забавно предаване, а ученикът спира да бъде прост наблюдател. Ето защо математиката не бива да се поднася наготово. Преподаването не трябва да се ограничи до дейността на учителя, който показва даден начин на смятане, а после учениците го повтарят, без да се замислят. Ученето е активен, конструктивен, кумулативен и целеви процес. Това също е добре да стигне до съзнанието на учениците.

Ето защо нужно е да се разгледа подробно понятието „учене, свързано със съдържанието”. Смисълът му е далеч по-обхванат от предоставянето на базови знания. Наред с тях, т.е. опирайки се на конкретно съдържание, ние трябва да развиваме способността на учениците да се ангажират с активно, самостоятелно учене.

2. Не само базови знания, а образование.

СOLIDните базови знания осигуряват основата, необходима за продължаващо обучение. Училищата имат за задача да дадат не само знания, а нещо много повече – да предоставят образование. Но какво ще рече това? Образованието, наред с другото, означава способност да боравиш със знанието, да го прилагаш, да правиш преценки. Това са умения от друг вид, различен от простото отмятане на обособени елементи знание. Потребни са самостоятелна работа и разсъждения, както и комуникация и екипност. По този начин съответните образователни стандарти автоматично намират своя път към обучението.

Математическото образование включва следните елементи:

- ▶ признаване значението на математиката
- ▶ увереност в собствените възможности за справяне с математиката
- ▶ прилагане на математическите знания към математически и нематематически задачи
- ▶ способност за използване на математиката като форма на комуникация и изразяване
- ▶ математическо мислене.

3. Насоки за преподаването на математика.

Дори програмата SINUS не гарантира универсално решение за постигане на успешно обучение по математика. Много пътища водят към тази цел, като някои от тях са коренно

различни от другите. Добрите учители по математика обикновено блестят със своята ярка индивидуалност. Съществуват обаче и определени фундаментални ръководни понятия, характеризиращи преподаването на математика в училище, базирано на въпроси и отговори.

Те включват:

- ▶ по-малко струпване на знания, повече обучение в решаване на задачи;
- ▶ по-малко смятане, повече разбиране;
- ▶ учене в контекст („разказване на истории“, математиката като културен актив);
- ▶ внимание не само към резултатите, но и към необходимите стратегии и процеси на обучение. Наградата е извървеният път!

Прилагането на тези основни понятия ще ви откъсне от закостенелия начин на преподаване в традиционния му вид, характерен с тесногърдия подход, състоящ се от въпроси и отговори с формално смятане и жонглиране с термини за сметка на провокирането на интерес.

И нека не забравяме, че възприемчивостта на много ученици по отношение на съдържанието на предмета е намалена значително под влиянието на ежедневно поглъщаната медийна информация. Това не означава непременно, че днешните ученици са по-лоши от онези в миналото. Те са различни и имат различно поведение. Ето защо нямаме потребност от ново съдържание, а от нов подход за третиране на старото съдържание. Когато става дума за преподаване, това не трябва да се забравя.

4. Достъп до математиката чрез експеримент: Намиране на самостоятелни пътища за учене.

Каква е идеята, залегнала в призива за иновации в класната стая? Много училища дълго време насочваха вниманието си върху пренасянето на знания. Учениците обикновено остават пасивни, а учителят се бори сам, за да им предаде съответния материал. Задължителната представа на преподавателя „трябва да мина през целия материал“ ограничава свободата на ученика да направи своя самостоятелен принос. Ето това е причината, налагаща фундаментална смяна на ориентацията. Приоритет за учителя е не да предаде своите собствени знания на учениците, а да предостави възможност на ученика да достигне сам до тези знания.

Преди много години американският математик Пол Халмош (1916-2006) излезе с призива: „Не проповядвайте фактите, а стимулирайте дейността.“ Приложено към училищното образование това означава, че учениците трябва да бъдат заинтригувани и поощрени да проучат своите собствени ресурси за заучаване. Те трябва

- ▶ да експериментират,
- ▶ да наблюдават,
- ▶ да откриват,
- ▶ да изказват предположения,
- ▶ да обясняват и да се аргументират.

Този подход описва много точно начина на действие на експерименталния подход в сферата на математическото образование. В началото няма правила и формули, те се извеждат (ако изобщо се стигне до това) в края на учебния процес.

Последователното обучение по математика налага и нещо друго – да създаваме ситуации, в които учениците да развиват своя интерес и да минат през следните етапи от процеса на обучение:



- ▶ самостоятелно (аз),
- ▶ заедно с другите ученици (вие),
- ▶ с помощта на учителя (ние).

Това ни води до една от основните насоки на работа на програма SINUS и Разпространение на SINUS, когато става въпрос за математика. Основните методи са приложими и за други предмети.

Независимостта в изграждането на знанията по никакъв начин не изключва систематичното предаване на знания и подкрепата от страна на преподавателите. Само взаимодействието на двете форми може да проправи пътя към ефективен и последователен процес на обучение.

5. Иновации в класната стая – Процесът на обучение чрез уроци.

Ако в начина на преподаване не бъдат внесени промени, резултатите няма да се подобрят независимо от степента на редуциране на обема на преподавания материал или на съответния урок. Пропитият от традиционализъм, установен и разпространен опит в преподаването не подлежи на такава скоростна промяна. Промяна може да се очаква още по-малко в области извън обсега на училището (университет, родителски асоциации и промишленост) или чрез правителствени разпоредби. Известна истина е, че всеки урок или учебна единица се определят от личността на учителя по отношение на тяхната същност и методология. Ето защо единствено учителят е в състояние да осъществи промяна в сценария на преподаването.

По-сериозни промени са възможни само чрез малки промени, осъществявани през един продължителен период от време. Това, което ни трябва, е процес на непрекъснато

подобряване на преподаването, който да бъде конструиран от самите учители и да бъде сравним с успешно практикувания в Япония „процес на научаване чрез урока“. За да инициират и реализират този процес, учителите имат нужда от компетентна подкрепа и външни консултации, но те не бива да бъдат менторски.

Успоредно с консултации за управление на процеса предвиждаме създаването на консултантски бюра за иновациите в училищното преподаване, така че преподавателите да се обръщат към тях за информация за най-новите разработки в методологията на преподаване, педагогиката и образователната психология. Това включва и компетентна подкрепа в избора на учебни материали и учебен софтуер. Тези консултантски бюра могат да бъдат създадени в рамките на университетските центрове (съществуващи и предвиждани) за педагогическо образование и за изследвания в областта на училищното образование (напр. „Център за математическо и научно образование“ към университета в Байройт).

6. Мрежи на добрите практики.

Чрез проекта SINUS подбирате училища с добри практики и документиране онова, което се прави по различен начин в тях и как точно става това. Тези учебни заведения играят ролята на пилотни училища за създаване на нови мрежи. Следващата стъпка е да бъде поощрено сътрудничеството между учителите от мрежата – обмяна на опит и материали, споделяне на обучението за напреднали, съвместно разработване на учебни среди, размяна на преподавателски часове. За тези дейности се използва централният сървър на SINUS (www.sinus-transfer.eu).

Мрежите се създават и без училищна мрежова структура. Съществуват достатъчно заинтересовани и ангажирани учители. Трябва само да им дадем възможност за редовни срещи и обмяна на опит.

7. Включване на участници и обществото.

Всеки работещ в областта на образованието е наясно, че иновативните учебни програми, образователните стандарти и проверената учебна среда не дават гаранции за положителни промени в преподаването. Както отбелязахме вече, качеството на образованието расте или спада в зависимост от личностните качества на учителя. Образованието зависи от професионализма и мотивацията на самите учители. Ефективните промени са възможни – това доказва и пилотното проучване SINUS. Основната предпоставка за това обаче е да успеем да убедим учителите в съответните идеи и да ги накараме да вземат дейно участие в процесите на промяната.

Само ангажираността на учителите не е достатъчна за промяна в обучението по математика – необходимо е да бъдат изпълнени и някои рамкови условия. Училището няма да постигне добри резултати без подкрепата на обществото. Това означава:

- ▶ училищната администрация и надзорните органи категорично да подкрепят и подпомогнат необходимите реформи,
- ▶ учениците и родителите да приемат факта, че няма научно постижение без усилия и всеотдайност.



Петер Баптист

Да почувстваме математиката

Превод: Теодора Давидова

Съдържание

- ▶ Математиката – странен свят за мнозина
- ▶ Как възприемат математиката учениците
- ▶ Причини за занижената оценка, която обществото ни дава на математиката
- ▶ Дефиниране на общото образование по математика
- ▶ Преподаването в бъдеще
- ▶ Преподаването трябва да се промени!
- ▶ Самостоятелната работа – учене от успеха
- ▶ Дьорд Пойа – класически пример за намиране на решения
- ▶ Смятането не е толкова важно, колкото разбирането
- ▶ Целта е пътят!
- ▶ Самостоятелно учене – осъществяването му в клас
- ▶ Сравнение с традиционния урок
- ▶ Писане. Чертане. Писане
- ▶ Работа със задачи с отворен край и учебни ситуации
- ▶ Условия за успешни промени в подхода към обучението
- ▶ Заради училището ли учим или заради живота?
- ▶ Литература

Да почувстваме математиката

Предложения за изследване на индивидуалните пътища към ученето

Математиката – странен свят за мнозина

За германците математиката изглежда особено труден предмет. Преди няколко години немското списание „Психологи хойте“ разглежда въпроса „Защо толкова много хора се чувстват изгубени щом стане дума за числа и факти“. Ще цитирам първите няколко реда от статията:

„В много обществени кръгове незнанието на математика се възприема като неоправдан „малък грях“. Участници в светски събития правят изявления от сорта на: „В училище бях винаги най-слаб по математика“ и никой дори не повдига вежди въпросително. Даже и хора с образование не се справят с числата. Защо стана така, че много хора не могат да боравят с математически и със статистически данни?“

Приблизително по същото време немският седмичник „Ди цайт“ отбеляза следното:

„Шокът беше огромен. Начинът, по който немските ученици се класираха на международното проучване PISA, се смята за скандален, гибелен, катастрофален провал. Оттогава цялата нация вкупом обсъжда недостатъците на днешните учители и ученици. Но измежду тези, които заклепват резултатите, има много, които трябва да се радват, че те самите не са били подложени на тестове за решаване на задачи от 9 клас. ...По отношение на аритметиката и абстрактното мислене образованите хора в Германия представляват доста жалка картина, та дори и онези, които са завършили университет.“

Това становище е подкрепено от два примера. Според статистика от Хамбургския университет много студенти по медицина (да не говорим за практикуващи лекари) срещат големи затруднения, когато им зададат тестови въпроси от типа на:

От 3 000 души 1.4% страдат от рак. Колко са болните от рак?

Дори и след няколко минути размисъл мнозина не могат да решат задачата. Ситуацията не е по-добра и сред учениците от бизнес училищата. Професор от университета в Лайпциг задал на студентите си две задачи от теста на PISA. Резултатът бил „катастрофален“. И въпреки това малцина възприемат положението като притеснително.

През есента на 1999 г. името на Дитрих Шваниц, професор по английски език в Хамбургския университет (1940 - 2004), окупира вестникарските заглавния с книга, посветена на образованието. Нейното подзаглавие е „Всичко, което трябва да знаем“. Но в нея няма нищо за точните науки и математиката. Запитан в едно интервю дали това са предмети, за които не трябва да знаем нищо, Шваниц отвърнал: „В немската традиция точните науки и математиката не се възприемат като част от понятието [общо] образование“. Ако е така, то какво е тогава [общо] образование? На което Шваниц дал доста фиволен отговор: „Бихте станали за смях пред образовани хора, ако не знаете кой е Молиер. Но те няма да се възмутят, ако нямате представа за втория закон на термодинамиката. По традиция точните науки не се смятат за част от общото образование“.

С други думи, ако не знаеш кои са Шекспир, Гьоте или Моцарт, ти си необразован и невежа. Но ако никога не си чувал за Ойлер или Гаус, ще бъдеш извинен, защото тези велики фигури са най-добре известни най-вече на специалистите. Познаването на забележителните математици и на елементарната математика очевидно не е от съществено значение за добрата образователна култура.

Нищо чудно тогава, че при проучването EMNID една трета от анкетираните граждани на Германия не можаха да определят правилно какво означава „40%“. Някои мислеха, че това е равно на една четвърт, а останалите заложили на предположението, че може да значи „един на четирийсет“. Нашият преглед на печата продължава. „Зюддойче цайтунг“ цитира Ханс Олаф Хенкел, бивш президент на BDI и председател на Обществото Лайбниц, който не е математик между другото, да казва: „Математиката не е всичко, но без математика всичко е нищо“. Какво означава това? Живеем в общество, изключително зависимо от математиката. Без математика няма да има технически прогрес и напредък в медицината. Ситуацията е парадоксална. Колкото по-важна за обществото става математиката, толкова повече тя бива избутвана в ъгъла. Ако не погледнем нещата отблизо, няма да проумеем, че математиката играе съществена роля в живота ни. Повечето от нас не знаят и не искат да знаят. Управлението на пътните светофари и на интелигентните транспортни системи са немислими без математика. Без математика няма да имаме портативни компютри, мобилни телефони, DVD и MP3-устройства, навигационни системи, компютърни скенери, карти за банкомати и сканиращи касови апарати. Списъкът с примери може да расте безкрай защото не друго, а математиката лежи в основата на вградените в техническите устройства електронни компоненти. Макар и невидима в крайния продукт, за решаването на конкретния проблем най-напред е трябвало да бъде развита математиката, а после тя да бъде приложена. Няма да бъде преувеличено да заявим, че математиката е изначалният двигател на информационното столетие, в което живеем.

Как възприемат математиката учениците

Всеки тръгнал на училище се сблъсква с математиката. Учителите естествено трябва да предадат техническата страна на предмета. Но освен това, те поемат и една друга високо отговорна задача. Начинът, по който те представят математиката, определя начина, по който математиката ще бъде възприета от голяма част от обществото.

Какви са възприятията, съхранени от учениците във връзка с математиката в резултат на преподадените в клас уроци? В американско проучване от 1992 г. Алън Шонфелд установява следните модели ученически възприятия по отношение на съществените особености на математиката:

- ▶ Математическите задачи имат само едно единствено правилно решение.
- ▶ За всяка математическа задача има само един валиден подход – обикновено този, който последен е бил показан от учителя.
- ▶ „Обикновените“ ученици не очакват да разберат математиката – те приемат, че е достатъчно да научат нещата наизуст и да прилагат механично това, което са научили.
- ▶ Ученици, които са разбрали дадено математическо съдържание, са в състояние да решат всяка задача за няколко минути.
- ▶ Математиката, така, както се преподава в училище, няма нищо общо с реалния свят.
- ▶ Заниманията с математика са самотна дейност, на която се отдават хора „единаци“.
- ▶ Математиката е формална система. Тя няма нищо общо с интуицията и креативността.

Причини за занижената оценка, която обществото ни дава на математиката

Защо учениците показват такова „изкривено“ отношение към математиката, което не отговаря нито на значението, нито на положението на предмета? Една от причините определено е в начина, по който се преподава. В задълбочените проучвания, проведени под ръководството на Франц Е. Вайнерт (1930 -2001) от Института за психологически изследвания „Макс Планк“, се прави изводът, че начинът на преподаване и учене в Германия изобщо не дава добър резултат.

- ▶ По принцип уроците в клас са прекомерно ориентирани към съдържанието и недостатъчно – към таланта.
- ▶ Колкото и парадоксално да изглежда, преподаването е обърнато към формалната успеваемост, а не към научаването.
- ▶ Общо взето уроците в клас са насочени към покриване на необходимия материал, а не към откриване на таланта.
- ▶ Като цяло преподаването не е разнообразно в смисъл на прилагани учебни методи.

Каква е общата оценка за преподаването по математика? Тук откриваме отношение, поставящо доста въпроси:

Когато достатъчно голям брой ученици могат правилно да решат достатъчен брой задачи от конкретен, известен тип, се смята, че преподаването е било успешно.

Това не може и не бива да бъде цел и задача на преподавателската дейност! Обучението по математика не може да се приравни към възпроизвеждането от страна на учениците на онова, което им е показал учителят. Ние трябва редовно да проверяваме:

- ▶ доколко учениците са схванали и обработили новопридобитото знание;
- ▶ доколко учениците могат наистина да боравят с методите, условията и правилата, които току-що са научили;
- ▶ доколко гъвкави са те в прилагането на наученото по отношение на задачи, които са им все още непознати

Това е подходът, използван в проучването PISA. Идеята е не да се провери съдържанието на учебната програма. PISA приема, че петнайсетгодишните момчета и момичета, които са получили няколко години образование по математика, трябва да са придобили определена степен на математическа грамотност, която могат да вкарат в активна употреба. Тестът има за цел да установи дали учениците са усвоили основните математически понятия по такъв начин, че с помощта на тези средства да се справят със задачи от различен контекст. За съжаление немските ученици се нареждат много ниско в тази класация.

Защо? Мартин Вагеншайн (1896-1988) удачно нарече преподаването по математика трагедия.

Математиката, образец на яснота и свободомислие, се възприема от много ученици като модел на неяснота и безсмисленост.

Завършвайки училище, повечето младежи възприемат това отношение. Доживели най-сетне щастливия миг да свалят този хомот, те ще сторят всичко възможно да не чуят повече за математика. В статия от 1996 г. цюрихският „Тагесанцайгер“ публикува пасаж, който ни дава поле за размисъл.

В нашата цивилизация математиката се смята за пълна със загадки наука, недостижим терен, барикадиран от хиляди формули. Това е суеверие, подхранено от много фактори: лишен от въображение сухарски учителски подход, интелектуален мързел от страна на обществото и самоизолация на много математици.

Това изявление е направено от Ханс Магнус Енценсбергер, един от най-големите немски писатели на нашия век. Но той не се задоволява само с обвинения и оплаквания. Енценсбергер написва забележителна книга, озаглавена „Числата на дявола“. Тази „настолна книга за всички изпитващи страх от математиката“ въвежда читателя в различни, интересни и вълнуващи раздели на математиката. Книгата има за цел да убеди децата и „опарените“ от математиката възрастни да потърсят своя път към тази наука.

Дефиниране на общото образование по математика

Ханс Магнус Енценсбергер създава математическа книга не само за деца. Обратна е ситуацията с един английски математик от Викторианската епоха, който пише прочути книги за деца, които се четат и до днес от малки и големи. Една от тях е известна в цял свят. Това, което е по-малко известно, е че Луис Карол е псевдонимът на математика Чарлс Латуидж Доджсън (1832 – 1898), преподавател през втората половина на XIX век в Крайст Чърч Колидж в Оксфорд. Когато прелистваме „Алиса в страната на чудесата“, срещаме една доста непросветена Алиса, която не знае накъде да завие на разклонението на пътя в гората. Тя твърде неуверено пита качилия се на дървото Чеширски котарак: „Бихте ли ми казали, моля, по кой път да тръгна оттук?“ „Това зависи до голяма степен от това, къде искаш да идеш.“ – отвръща котаракът. Ако приложим тази ситуация към класната стая, трябва да си зададем въпроса:

- ▶ Какви умения трябва да цели образованието по математика?
- ▶ Каква форма трябва да придобият уроците?

Ето какви умения цели рамката на общото образование по математика:

- ▶ Способност за справяне със задачи „с отворен край“, защото по правило проблемите от действителността нямат точни дефиниции;
- ▶ Способността да се признае, че математическите понятия и модели могат да се приложат към ежедневните проблеми и проблемите от по-сложен характер;
- ▶ Способността да се превеждат проблемите в адекватни математически изрази;
- ▶ Адекватни знания и владение на маршрутите за намиране на решение.

Обучението в клас, което би подпомогнало постигането на тези цели, не се изразява в монокултурата на отегчителните задачи от типа на посочените по-долу:

$$\begin{array}{lll}
4. \text{ a) } \frac{4x}{5y} : \frac{5y}{4x} & \text{b) } \frac{18m}{35n} : \frac{7m}{9n} & \text{c) } \frac{108}{25pq} : \frac{135p}{q^2} \quad \text{d) } \frac{72ab^2}{27c} : \frac{16a^2b}{45c^2} \\
\bullet 5. \text{ a) } \frac{147(uv^2w)^2}{1024ab^3} : \frac{196u^3w}{640(ab)^3} & \text{b) } \left(\frac{12m^3n}{55xyz^2} \right)^2 : \frac{27m^4x^2}{242ny^2z} & \\
6. \text{ a) } \frac{5(2a-b)}{9} : \frac{4a-2b}{15} & \text{b) } \frac{5m}{3n-5} : \frac{m^2}{5-3n} & \\
7. \text{ a) } \frac{rs}{24r-32s+20t} : \frac{st}{30r-40s+25t} & \text{b) } \frac{8x-28y}{5yz-3y} : \frac{21y-6x}{20z-12} & \\
8. \text{ a) } (a^2-9b^2) : \frac{a+3b}{a-3b} & \text{b) } \frac{6x-6y}{5x+5y} : (3x^2-3y^2) & \\
9. \text{ a) } (2m^2+20m+50) : \frac{m-5}{15+3m} & \text{b) } \frac{x-3}{3x+15} : (x^2+2x-15) & \\
10. \text{ a) } \frac{25a^2-20ab+4b^2}{4c^2+56c+196} : \frac{5a-2b}{3c+21} & \text{b) } \frac{8u-20v}{9+3w} : \frac{4u^2-25v^2}{w^2+6w+9} & \\
11. \text{ a) } \frac{9p^2-36q^2}{3-r} : \frac{2p-4q}{r^2-9} & \text{b) } \frac{18s-2}{81s^2+18s+1} : \frac{2}{1-81s^2} & \\
\bullet 12. \text{ a) } \frac{x^2-1}{1-y^2} : \left(\frac{x-1}{1-y} \right)^2 & \text{b) } \frac{(x-1)^2+4x}{x^2+4y^2} : \frac{3x^2+6x+3}{4xy-(x+2y)^2} & \\
13. \text{ a) } \left(\frac{1}{a} : \frac{1}{b} \right) : \frac{1}{c} & \text{b) } \frac{1}{a} : \left(\frac{1}{b} : \frac{1}{c} \right) & \text{c) } \frac{1}{b} : \left(\frac{1}{c} : \frac{1}{a} \right) \\
14. \text{ a) } \left(\frac{u}{v} : \frac{v}{w} \right) : \frac{w}{x} & \text{b) } \frac{u}{v} : \left(\frac{v}{w} : \frac{w}{x} \right) & \text{c) } \left(\frac{v}{u} : \frac{w}{v} \right) : \frac{x}{w} \\
15. \text{ a) } \left(\frac{1}{y} : y^2 \right) : \frac{1}{y^3} & \text{b) } \left[\frac{1}{z} : \left(\frac{1}{z^2} : \frac{1}{z^3} \right) \right] : \frac{1}{z^4} & \\
\bullet 16. \text{ a) } \frac{x^2-9}{6y} : \left(z : \frac{xyz}{x+3} \right) & \text{b) } \left(\frac{(2m+1)^2}{n-2} : \frac{3n+6}{4m-2} \right) : \frac{4m^2-1}{4-n^2} & \\
17. \text{ a) } \frac{51(x^2-y^2)}{7xy} : [68(x-y)^2] & \text{b) } \frac{54(a^2-b^2)}{13a} : [81(ab+b^2)] & \\
\text{c) } \frac{5ab(x-y)}{6xy(x+y)} : \frac{10ax(x-y)}{3by(x+y)} & \text{d) } \frac{38a(a-b)}{51b(x-y)} : \frac{57b(a^2-b^2)}{68a(x^2-y^2)} &
\end{array}$$

За съжаление тези слабости на учебниците все още често определят курса на уроците по математика и характеризират начина на преподаване на предмета. Вместо това преподаването трябва да се фокусира върху изискванията на реалния живот, както гласят постулатите на забележителния немско-холандски математик Ханс Фройдентал (1905 г. – 1990 г.). Той развива една задълбочена идея за общото образование по математика. Неговите главни тези са:

- ▶ Математическите концепции, структури и идеи са създадени, за да изследват и структурират явленията от физическия, социалния и интелектуалния свят.
- ▶ Действителността трябва да бъде отправната точка на преподаването и изучаването на математиката, а не „поднесената наготово“ математика.
- ▶ Целта на насочването на вниманието към явленията е да се създадат устойчиви мисловни модели за математическите условия.

Преподаването в бъдеще

Кои изисквания трябва да бъдат изпълнени по отношение на преподаването в клас, за да се постигнат посочените по-горе цели? Кой е адекватният процес на обучение? Литературата предлага множество примери. Привеждаме един, за да подчертаем един критичен аспект:

Начинът на преподаване, който ни трябва, е този, при който учениците ще се обучават така, че да не страдат, а да се радват от усвояването на знания или умения. Обучаването, поднасянето и предаването на материала са характеристики на преподавателския подход, които принадлежат на миналото и са от минимална стойност за настоящето... Естествено в бъдеще учениците също ще имат потребност от знания и умения – и ние вярваме, че те ще ги придобият в по-голяма степен, отколкото в миналото. Но не желаем да ги набиваме в главите им, а да ги стимулираме сами да стигнат до тях. Това променя задачата на учителите във всички области. Вместо да се ограничи единствено с излагането на материала, учителят трябва да провокира способностите на учениците... Работата на учениците се състои в това да участват активно в процеса, а не да бездействат като слушатели...

Горните бележки представляват зов за самостоятелност в ученето. Въпросът е изключително актуален днес, макар че Йоханес Кюнел (1869 – 1920) даде гласност на съображенията си относно процеса на обучение в бъдещето още през 1916 г.

Става ясно, че проблемът е в практическото осъществяване. Знаем точно как трябва да функционират процесите на обучението – че учениците учат най-добре чрез действие, а не чрез слушане. Но независимо от това прозрение, учителите говорят през 60 – 80 % от времето, прекарано в час. Вилхелм Буш (1832 – 1908) описва ситуацията доста язвително:

*„Кой е споменът, запазен от училищното време?
Глас един опява, а всичко друго дреме.“*

И какво е следствието от това четене на лекции в клас? Много просто. Всички участници в процеса недоволстват от училищния живот.

Преподаването трябва да се промени!

Преподаването трябва да се промени, защото отношението на децата и родителите към училището се е променило. Това не значи, че и училищата не трябва да се приспособят. Те не бива да избират пътя на най-лекото съпротивление чрез непрекъснато занижаване на стандартите. При планиране на уроците си учителите трябва да отчитат настъпващите промени в обществото. Не можем да продължим да преподаваме математика така, както сме правили това през петдесетте години на деветнайсети век.

Хайнц Клиперт, радетел на реформата в клас, ясно показва, че положението е променено.

- ▶ Днешните ученици не са по-малко компетентни, отколкото онези от миналото, те са различни.
- ▶ Много ученици са изключително разглезени и прекалено закриляни. Резултатът е хронична безпомощност и мързел!
- ▶ Много ученици са крайно невъзприемчиви към учебното съдържание. Това е последица от ежедневното консумиране на медийна информация.

Ето защо Клиперт призовава дейците от областта на образованието да помислят отново и отново. Цитирам:

- ▶ Традиционните методи за насочване и представяне стават все по-съмнителни. Учителят като „шоумен“ се справя все по-зле.
- ▶ Това се дължи и на факта, че 90 % от прогимназиалните ученици предпочитат жива, практическа учебна среда. За да научат, те се нуждаят от непосредствен опит.

Съществуват, разбира се, и много отдадени на професията учители, които са осъзнали проблемите и се стараят да намерят нови пътища. През последните няколко години конвенционалното обучение претърпя съществени промени.

- ▶ Съдържанието често се представя под формата на задачи. Простото познаване на фактите вече не е първостепенна грижа.
- ▶ Учебниците имат повече илюстрации. Учебният материал е формулиран по много по-лек за възприемане начин.

Въпреки това повечето ученици са „блестящи по забравяне“, както уместно заяви берлинският училищен директор Волфганг Харнишмахер в една вестникарска статия. Споменатият по-горе Хайнц Клиперт порицава слабостите на ежедневното обучение още по-смело:

Знанието се поднася, поглъща и забравя.

Ако този начин на преподаване („знанието се сервира“) не се промени, редуцирането на учебната програма няма да допринесе за подобряване на положението. Преподавателите трябва да преосмислят ролята си и да я предефинират радикално. По време на урока те не трябва да се стремят да предадат колкото е възможно повече знания или да играят ролята на подвижни енциклопедии, окупирали центъра на събитията. Добре е учителите да се научат да се въздържат и да избягват поднасянето на готови уроци. Да се откажат от идеята, че задачата им е да покажат всичко, което знаят. Наместо това те трябва да създават учебни ситуации, позволяващи на учениците да научават самостоятелно и да влагат в тях чувство за отговорност за собствения си напредък. Водещ принцип е не какво казват или правят учителите в клас, а какво са успели да „прехвърлят“ на учениците.

Този вид преподаване в клас се свързва непосредствено с цитираните преди малко идеи на Йоханес Кюнел. Основното е училището да се превърне от място за преподаване в място за научаване. Страни с добри показатели в сравнителните тестове за успеваемост на учениците доказват, че това е възможно.

Самостоятелната работа – учене от успеха

Определено няма панацея за ефективното въвеждане на самостоятелност в ученето. Но си струва да погледнем страните с високи резултати в международните оценъчни проучвания. Нека обърнем внимание на шампиона в проучването TIMSS – Япония. По какво образованието там се различава от нашето?

1. Представете задачата и проверете дали въпросът е разбран.
2. Самостоятелна работа и намиране на решение от страна на учениците (индивидуално или на групи).
3. Съберете различните решения и обменете мисли по тях.

На пръв поглед може и да не установим различия с час по решаване на задачи в Германия. Всъщност такава беше и реакцията на много наши учители и ученици, след като видяха японската видео програма. По мое мнение обаче съществува една критична разлика, която допринася съществено за различията между постигнатите от японските и немски ученици резултати. Това е преходът между фаза 1 и фаза 2. Японският учител проверява дали учениците са разбрали задачата и след това учениците работят самостоятелно. С класа не се обсъждат никакви потенциални решения, като учителят не прави и намек за такива. Учениците работят по задачата без външна помощ. Този подход кара учениците да работят самостоятелно, което почти автоматично води до различни методи за решаване на задачата. Обсъждане на задачата почва едва тогава, когато учениците са имали възможността да се занимаят с нея сами. Вярно е, че обсъждането се води от учителя, но междувременно учениците са станали по-компетентни партньори по отношение на поставените въпроси и така са попаднали в по-добро положение да възприемат предлаганите им обяснения.

Нека разгледаме сравнима ситуация в един клас в Германия. Преходът от фаза 1. към фаза 2. се въвежда с въпрос от рода на: „Какъв е възможният подход за решаване на тази задача?“ Направените от учениците предложения се приемат и обсъждат. След това учителят прилага метода „въпрос и отговор“, за да открие подходът, който трябва да бъде приет – подчертавам „подходът, който трябва да бъде приет“. После „самостоятелното“ решаване на задачи от страна на учениците приема формата на прилагане на посочения от учителя подход. Даже и с най-добрите намерения на света това е все едно да лишим нашите ученици от способностите им. Нищо чудно, че чуваме писъци от ужас, когато представим някоя по-малко позната задача: „Това не сме го правили!“ е всеобщото оплакване. Стандартизираното обучение, основащо се на задаването на „правилния“ въпрос и получаването на „правилния“ отговор отнема възможността за разнообразие от възможни решения. С това принципът за самостоятелно учене, така горещо подкрепян от дейците на образованието, отива на заден план. С този подход ние разделяме интригуващи и комплексни задачи на управляеми порции, т.е. ясно дефинирани частични задачи, като по този начин изключваме индивидуалния подход от самото начало.

Какви заключения можем да направим от това наблюдение? Каква е формулата за успешното преподаване? Да оставим учениците на техните собствени ресурси? Категорично не! Едва ли някой ще се научи да свири на пиано, ако го сложат пред инструмента и го оставят да съчинява акорди без външна помощ. Кариерата на всеки пианист започва с упражнения за пет пръста. Отнесено към училището това означава обучение под контрола на учителя, което обаче не е еквивалентно на скромното преподаване чрез въпроси и отговори, както показва японският пример.

Дьорд Пойа – класически пример за намиране на решения

Кои са упражненията за пет пръста, нужни, за да ви направят класически пример за намиране на решения? Да видим какво е казал по въпроса великият майстор на успешното решаване на проблеми Дьорд Пойа (1887 – 1985). В книгата си „Как се решава задачата?“ той защитава следния подход:

Как се решава тази задача

1. Разбиране на задачата.
2. Съставяне на план.
3. Изпълнение на плана.
4. Поглед назад.

В японското училище фаза 1 на урока се оформя като дискусия, ръководена от учителя. Решаваща е стъпката при фаза 2, т.е. мигът, в който японските ученици са оставени сами на своите собствени знания. Основната цел тук е да се намери начинът, по който учителят ще успее да провокира учениците да открият решението, без да им подсказва какво е то. Според Пойа учителите трябва да предоставят помощ само „отвътре“ (чрез това, което е вътрешно присъщо на ученика), т.е. да правят предложения, които учениците биха намерили сами, ако се бяха сетили за тях. Учителят трябва да избягва помощ, която е „неприсъща“, т.е. не трябва да представя решения дори отчасти, които излизат извън рамките на познанията на учениците в момента. Тук нещата се свеждат до: „да им помогнем да си помогнат сами“, но да се осигури помощ от този вид далеч не е лесно. Изисква се отлично познаване на учениците, както и на задачата, чието решение се търси.

Описаната по-горе схема не е абсолютна гаранция за успешното решаване на задачи, но тя помага на учениците да канализират мислите си и да се научат на самостоятелност. Полезни идеи дават и различните индивидуални въпроси, свързани с отделните фази, които Пойа предлага в книгата си. Фаза 2 е явно най-решаващият етап. Какво ще направите, ако не можете да намерите сигурен подход за решаване на задачата? Тук дори и Пойа не е в състояние да ни изненада с универсално приложима формула. Той само казва: „При откривателството първото правило е да имаш мозък и късмет“. А второто правило е „да не отстъпваш, докато не стигнеш до блестяща идея“. Четвъртата фаза – преглед на целия процес, също е от съществено значение за обучението. Тя стимулира задълбоченото разбиране и служи за обогатяване и разгръщане на задачата.

Смятането не е толкова важно, колкото разбирането

Препоръките на Пойа представляват радикално нов подход към задачите. Простото решаване на задачата се заменя от дълбок интерес към контекста при вникването в текущата задача. Важно е да се предаде съдържанието, но също толкова важни са и съпътстващите процеси на ученето. Ето защо ние разширяваме и модифицираме схемата на Пойа. Обучението включва следните силно интерактивни фази:

- ▶ Фаза ориентация:
- ▶ Разбиране на задачата. Целта е задачата да бъде осмислена и всички данни да бъдат идентифицирани.
- ▶ Креативна фаза на обработка:
- ▶ Намиране на липсващи данни, ако има такива. Разглеждане на сродни задачи. Съставяне на стратегия и план за решаване на задачата.
- ▶ Решаване на задачата: Осъществяване на плана. Намиране на решение.

- ▶ Оценъчна фаза: Анализ на процеса на решаване и на полученото решение. Какви нови прозрения е предизвикала задачата? Позната ли е стратегията? Можем ли да получим решението по друг начин?
- ▶ Фаза разширяване и свързване: Намиране на връзки с вече придобито познание и познати задачи, обобщаване, предлагане на варианти на задачата.

Горната схема има за цел да даде насоки за работа със задачите. Тя улеснява достъпа до систематичния подход при решаването им. Но Пойа е напълно наясно с вида на задачите, които трябва да бъдат задавани. Той предпочита такива, една трета от които активират математическата грамотност на ученика, а две трети разчитат на неговия здрав разум. Тези изисквания напълно съответстват на популярната задача с балона:

*Колко въздух е необходим,
за да се напълни балонът?*

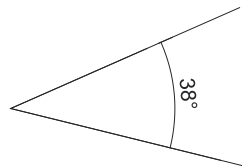


Снимка: Kropsoq, commons.wikimedia.org

Интелигентна проверка може да се направи и за стандартни въпроси. Следващата задача изисква активност и прилагане на елементарна геометрия:

Имаме триъгълник с ъгъл 38° . Какви трябва да бъдат другите два ъгъла, за да получим следните видове триъгълници:

- а) остроъгълен,*
- б) правоъгълен,*
- в) тупоъгълен,*
- г) равнобедрен,*
- д) равностранен.*



Подусловията от а) до д) се характеризират с разнообразни потенциални решения (няколко, едно, никакво). Освен това тук имаме продуктивно повторение на знанията за видовете триъгълници и за сумата от ъглите им.

Упражняването на аритметичните умения не значи непременно да се трудиш безкрай над осакатяващо досадни задачи от вида:

Европейската централна банка предвижда да емитира монети само от три и пет евро. Може ли всяка сума, по-голяма от седем евро, да бъде платена с точна сума, съставена само от тези две монетни деноминации?

Тук учениците могат да разберат обвързаните със съдържанието цели, свързани с делимост на числата и да приложат някои евристични подходи и стратегии (проба и грешка, систематичен опит, разглеждане на конкретен случай). Важно е не само да постигнем резултати, а и да си представим процесите, водещи до тях.

Целта е пътят

Когато разработвате съдържанието на математическите уроци, методите за научаване и решаване на задачи трябва също да бъдат от първостепенен интерес. Няма да се научите да решавате задачи единствено като следвате правилата за решаване. Ще се научите само като разглеждате практически проблеми и анализирате решението им. От съществено значение за успеха е тези усилия да не бъдат спорадични. Този вид обучение трябва да се води системно.

Потенциалните стратегии от този вид са важни не само за математиката, но и за други предмети, както и за да се справим с проблеми от ежедневието. Ето и някои примери:

- ▶ проверка и системна повторна проверка чрез опит и грешка,
- ▶ работа по конкретни случаи,
- ▶ обобщаване,
- ▶ намиране на аналогии,
- ▶ реструктуриране,
- ▶ работа с поглед напред или назад,
- ▶ връщане до познат случай,
- ▶ разпознаване на модели.

Александър Витенберг (1926 – 1965) ни предлага обширно резюме на тези съображения. Книгата му „Образованието и математиката“ заслужава да бъде прочетена.

„Истинската същност на преподаването не се крие в предмета на съдържанието, а в процеса на работата по него“.

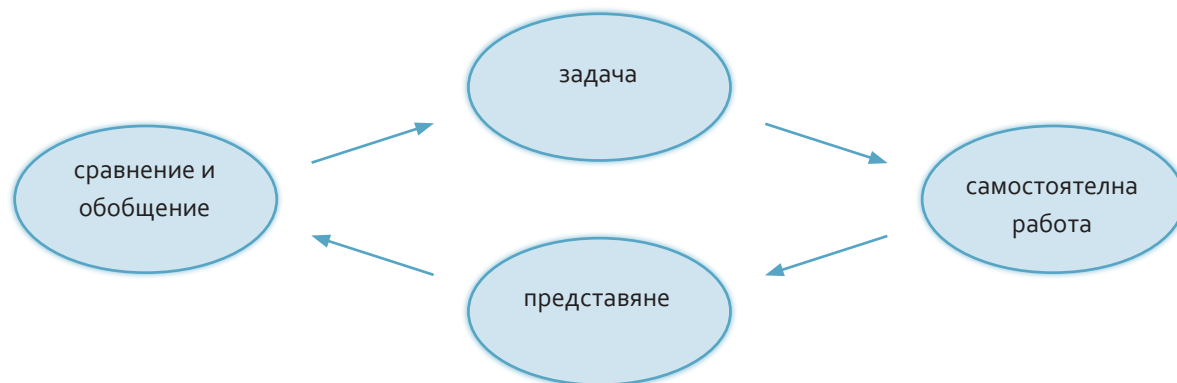
Самостоятелно учене – осъществяването му в клас

Ако искаме учениците да развият жива връзка с математиката, те не трябва да възприемат обучението по тази дисциплина като попадане в един изкуствен свят, нямащ нищо общо с техния личен живот и чувства. Това изискване произтича от идеите на Фройдентал за общото образование по математика. Учениците трябва да получат по-голяма самостоятелност по отношение на учителя. Те трябва да се научат да структурират, да обработват и да представят своите собствени идеи. Когнитивната психология подчертава огромното значение на самостоятелното учене. Един учебен процес е успешен, когато е активен, конструктивен, кумулативен и целеви. За училищното образование това, наред с други неща, означава, че учителят не е шоумен, а ученикът не е само потребител. Как да реализираме тези концепции и идеи в

клас? Да започнем, като разгледаме примера на някои страни, образец на успех:

- ▶ Учителите възлагат на учениците интригуващи и свързани с реалността задачи.
- ▶ Задачите се представят и обсъждат разбираемо, но без подсказване на решения.
- ▶ Много често задачата може да се реши по различни начини или да има няколко решения.
- ▶ Приетият подход се обсъжда подробно. В много случаи подходът е по-важен и от самото решение.
- ▶ По време на урок преобладават ситуациите на научаване, а не на проверка.
- ▶ Приемат се, обсъждат се и се изследват различни подходи за решаване на задачата, в това число и грешни, както и придружаващите ги грешни решения, за да се усвои потенциалът, който носят те.

Структурата на урока, целяща развитието на самостоятелност у ученика, е представена чрез следната илюстрация. Ще обсъдим и отделните фази:



1. По правило задачата се представя от преподавател. Това могат да направят и учениците, разбира се, като показват обикновено варианти на задача, която вече е разглеждана.
2. Самостоятелна работа. Учениците работят самостоятелно продължително време (индивидуално или на малки групи). Учителят ги контролира. Обикновено изпълнява ролята на съветник (помага им да си помогнат сами). Учителят отбелязва подхода и/или решенията, които се оформят, а после избира ученик, който да ги представи.
3. Избраните ученици представят своите решения и/или подходи към проблема. Представянето им се сравнява и обсъжда. Учителят трябва да прояви сдържаност и да се намеси само когато е необходимо.
4. След активната работна фаза, осъществена от учениците, учителят представя резултатите. Тази фаза, имаща за център учителя, се използва, за да се вметнат допълнителни бележки и да се въведат нови понятия и похвати.

Такъв подход към обучението в клас цели да постигне взаимодействие между активните, самостоятелни работни фази на учениците и на преподавателските фази, чиито център е учителят. Формирането на самостоятелни знания не изключва насочващата подкрепа или систематичното предаване на знания. В крайна сметка взаимодействието между двете спомага за постигане на ефективен и устойчив учебен процес.

Сравнение с традиционния урок

Този подход беше използван успешно в училищата, участващи в пилотното проучване на BLK SINUS. Сравнявайки го с традиционните методи на преподаване, установихме следното:

- ▶ Същността на ученето не се ограничава само в един, единствен метод, а включва няколко процеса, които се управляват от самия ученик.
- ▶ Учениците се провокират да работят активно и самостоятелно.
- ▶ Представянето на различни решения демонстрира различни подходи, а математическата комуникация между учениците расте.
- ▶ Първоначално учителят е по-скоро наблюдател, най-много съветник.
- ▶ Учителят не предлага разяснения, преди учениците да са направили опит сами да излязат с решение.
- ▶ В активната фаза на учениците, неподготвените и немотивирани ученици не успяват „да се скатаят“ така добре, както при преподаване в стил четене на лекции.
- ▶ В началото е необходимо много повече време.
- ▶ В началото подходът е непознат, по-сложен и с по-високи изисквания за ученици и учители.
- ▶ Този изискващ повече усилия подход на обучение радва учениците.

Писане. Чертане. Писане

В часовете по математика у нас учениците рядко пишат текстовете си. Една от основните цели на образованието и ключов елемент за нейното постигане трябва да бъде предоставянето на възможност на учениците да формулират резултатите и/или прозренията, до които са стигнали, на своя собствен език и със свои собствени думи, а не със стандартните заучени фрази. Това означава:

Възможно най-често отразяване на хартия на резултатите от ученето и процесите на учене.

Заданията, като тези в работните тетрадки, трябва да се съставят по такъв начин, че да допринасят за постигането на тази цел. Изготвената от нашия швейцарски колега Петер Галин таблица за решаване на квадратни уравнения е добър пример.

Решете квадратното уравнение $ax^2 + bx + c = 0$

Решете всяко отделно уравнение.

В общия случай всяко уравнение има две (!) решения.

Запишете разсъжденията си.

Отделно запишете какво е новото или различното във всяка задача в сравнение с предходната.

Внимавайте при прехода от 5. към 6.

1. $x^2 = 4$

2. $x^2 - 3 = 0$

3. $2x^2 - 1 = 0$

4. $x^2 = 6$

5. $(x + 2)^2 = 6$

6. $x^2 - 6x + 9 = \frac{25}{4}$

7. $x^2 - 6x = 31$

8. $x^2 + 4x = -\frac{7}{4}$

9. $x^2 - \frac{2}{3}x = -\frac{1}{9}$

10. $x^2 - 3x = -\frac{25}{4}$

11. $2x^2 + 4x - 7 = 0$

12. $\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{6} = 0$

13. $x^2 + 2px + q = 0$

14. $ax^2 + bx + c = 0$

Наред с внимателно обмислената поредица от уравнения, от решаваща важност тук е да накарате учениците да запишат разсъжденията си. Освен това те трябва да дефинират по какъв начин всяко отделно уравнение се отличава от предходното, като отразят мислите си в писмен вид.

В множество свои съвместни публикации Петер Галин и Урс Руф доказват, че тази методика води до самостоятелна, конструктивна работа. Защото, за да можем да запишем нещо, трябва предварително да сме го обмислили задълбочено. Освен това от учениците се изисква да водят т. нар. дневници на обучението вместо стандартните тетрадки за упражнения. Те трябва да записват всичко важно за тях само в една работна тетрадка – домашните работи, упражненията, забележките на учителите, своите лични идеи и възприятия, обобщенията. Когато учителят прегледа такава тетрадка, много лесно ще прецени какво кара ученика да „тиктака“ математически и дали е разбрал учебния материал. При традиционните методи на преподаване в клас, учителите обикновено поднасят своите собствени или общоприетите идеи за разглеждания въпрос. Но това не води до трайно разбиране. Учениците трябва да получат шанс да развият своите идеи, асоциации и визии. Това налага необходимостта ученикът да осмисли задачата сам, да я обсъди с другите, да начертае фигурите в дневника на обучението и да запише личните си бележки. Това е единственият начин за култивиране на лично отношение към математиката. То прави съдържанието на предмета по-познато и по-прозрачно. Личните бележки заменят учебниците и официалните схеми. Работата с дневниците на обу-

чението може да започне внимателно, на малки стъпки. В края на всяка учебна единица учениците биват помолени да запишат отговорите на следните стандартни въпроси:

- ▶ До какви нови прозрения стигнах днес?
- ▶ Кой въпроси останаха неразрешени лично за мен?

Работа със задачи с отворен край и учебни ситуации

Ключова дефиниция: Задачата е с отворен край, когато учениците са получили правото да работят самостоятелно, от тях се очаква и им е позволено да работят самостоятелно по дадена задача.

Въпроси, възникващи от задачите с отворен край:

- ▶ Каква е дадената ситуация?
- ▶ Как да започна и какво да направя?
- ▶ Как да интерпретирам резултата?

Задачите с отворен край се характеризират с въпроси, които дават в резултат различни, вероятно еднакво валидни отговори. Разликите стават предмет на обсъждане при работата по задачата и в клас. Можем да дефинираме задачите с отворен край и в смисъла на техните противоположности, така наречените задачи със затворен край. Това ни сблъсква с проблема как да дефинираме затворените или тясно дефинирани задачи. Задачите със затворен край съдържат всички необходими данни. Процесът на решаването им е или очевиден, или ясно предписан. Коригирането на грешки е изключително лесно за учителите и по тази причина много учители предпочитат този вид задачи. Но ако те преобладават, учениците ще придобият изкривена представа за математиката. Всеки от нас си спомня типични примери от своите училищни дни. Ето един:

Правоъгълник със страни a и b има периметър 25 cm. Едната страна е с 3 cm по-дълга от другата. Каква е нейната дължина? Започнете с уравнение.

Прилежният ученик едва ли би сбъркал, освен ако не допусне грешка в пресмятането. От учениците не се изисква да правят собствени разсъждения. Отнета е възможността за индивидуални пътища към решението. Целта на задачата е да се упражни решаването на уравнения. Изискването „да се изчисли дължината на страната на правоъгълника“ е маловажен въпрос. Ситуацията се променя коренно, когато се фокусираме върху съдържанието на задачата. Разглеждаме правоъгълник, чиито страни трябва да определим. Тази информация е важна за тези, които искат да начертаят правоъгълника. Ето задачата в „отворен“ вид, превърната в проблем за разрешаване:

Едната страна на правоъгълник с обиколка 25 cm е с 3 cm по-дълга от другата. Начертайте правоъгълника.

Но самата задача определя дали подходът е с отворен или със затворен край. По-важен фактор е решението, взето във връзка с пътищата и средствата, използвани в клас за справяне със задачата и постигнатото чрез тях.

"Истинската същност на обучението не е материалът, отнасящ се до съдържанието, а процесът на работа по него."

Александър Витенберг (1926 -1965)

Горният пример показва, че тясно дефинираните задачи обикновено могат да се преформулират, за да се получат проблемни задачи с отворен край. Уроците в клас придобиват по-реалистична окраска и всеки ученик може да работи по задачата по начин, отговарящ на неговите индивидуални умения и знания, като създава подходи с отворен край.

- ▶ Разширете задачата (обтекаема формулировка), без да задавате тясно скроени въпроси, дайте възможност за поява на нейни варианти и различни подходи към решението.
- ▶ Накарайте учениците да се ангажират със съдържанието, лежащо в основата на представения проблем.
- ▶ Поощрете учениците да развият по-силен интерес към различните математически понятия.

Как дефинираме подхода с отворен край при преподаването на математика?

Учениците се сблъскват със ситуация или предизвикателство. Обичайните примери са вестникарска статия, преживяване, реална житейска ситуация, геометрична конфигурация, числови данни.

Специфични примери:

Паметникът на Аденауер:

Определете височината на статуя, която би имала посочената на снимката глава (на първия германски канцлер Конрад Аденауер).





Парапет на балкон:

Изследвайте квадратните форми между две колони на балконския парапет.

Пътен знак:

Какъв ще бъде наклонът на възвишението, ако знакът показва 100 %.



Редици от числа:

Обяснете числовите редици и ги продължете.

При ситуации с отворен край се стремим да постигнем следните цели:

- ▶ Учениците да получат собствен поглед върху представената им ситуация, като подберат, придобият и преценят информацията.
- ▶ Да развият ситуативни въпроси или предположения.
- ▶ Да изследват математически процеси и пътища, за да отговорят на зададените въпроси или да валидират предположенията.
- ▶ Да обменят прозренията и знанията си с други ученици (останалите от класа).
- ▶ Как да процедираме при въвеждане на задачи с отворен край
- ▶ Традиционен метод – учителят задава въпроси във връзка с дадена ситуация. Учениците отговарят на въпросите или работят по съответната задача.
- ▶ Учениците намират допълнителни въпроси във връзка с предварителната ситуация. Списъкът с въпроси се обсъжда с всички ученици в клас и може да се организира в някакъв порядък или пък учителят добавя собствени нови въпроси. Ето някои примери:
 - ▶ Какво е интересно в този въпрос?
 - ▶ Кой пътища към решението имат смисъл?

- ▶ Каква допълнителна информация или материали са необходими, за да се даде отговор на въпроса?
- ▶ Учениците работят по някои въпроси или задачи.

След като учениците последователно се запознаят с подхода с отворен край, учителят може да промени метода в зависимост от постигнатото равнище на резултати и умения. Въпросите от страна на учителя постепенно намаляват и накрая изчезват съвсем. Учителят трябва или по-скоро е длъжен да свикне да „му отпуска края“. Неговата задача е да култивира любопитство у учениците си. Това означава, че ученикът трябва да се научи да задава подходящи въпроси. Учителите, които последователно и редовно прилагат този метод ще забележат, че учениците им придобиват нарастваща независимост в изучаването на задачите.

Конкретното значение на предлагането на въпроси по математика беше подчертано от немския математик Георг Кантор (1845 – 1918), известен като основател на теорията на множествата. Той говори дори за „изкуството да задаваш въпроси“. В защитата на докторската му дисертация през 1867 г. една от тезите му е била: „В математиката изкуството да се задават въпроси се използва по-често, отколкото решаването на задачи“.

В клас учителят трябва да стои настрана и да бъде винаги готов да се включи като наблюдател и съветник (идеал, достоен за подражание!). При подготовката на тези уроци обаче учителите трябва задълбочено да проучват съдържанието, преподавано посредством подход с отворен край. Учителят трябва да бъде в състояние да посочи на учениците, че има определени очаквания. Освен това трябва да бъде готов да зададе допълнителни въпроси и да излезе с предложения и материали.

Примери:

1. Шофьори, нарушаващи ограниченията на скоростта.
(Източник: Вестник „Нордернайер Бадецайтунг“ 1991 г.)

Преди няколко години всеки десети шофьор караше на моменти с превишена скорост. Сега е всеки пети. Но дори и пет процента нарушители са твърде много. Затова все още съществува пътна проверка на скоростта, а на нарушителите се налагат парични глоби.

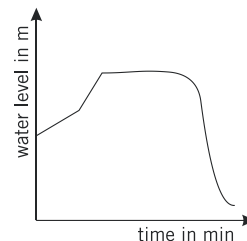
Коментар:

- ▶ Практически указания: Обсъдете публикуваната информация.
- ▶ Запознатите с този вид задачи ученици нямат нужда от такива указания.
- ▶ Учителите трябва да се уверят, че учениците не се отклоняват към нематическото съдържание.
- ▶ Функция диагноза: От отговорите учителят може да направи заключение доколко учениците са разбрали процентите.
- ▶ Оценка на задачи с отворен край. Представеният писмено анализ на ученическите решения може да послужи като основа за развиване на прозрачни критерии за оценка, които ще бъдат съобщени на учениците. За съжаление следното твърдение е повече от вярно: Мнозинството ученици не приемат задачите с отворен край сериозно, освен ако не са задачи за проверка.

2. „Разказване на истории по графика“

Всяка графика може да бъде извор на история. Може да е историята на езеро, тръба в банята или каквото ви хрумне.

Измислете история по показаната графика.



3. Изчисления с часовете от денонощието

Циферблатът на часовника показва числата от 1 до 12. Вземете всички 12 числа и като използвате действия събиране и изваждане, съставете условие с резултат, равен на 0.

- Опитайте да направите горното по няколко начина.
- Какво е общото в получените резултати?



Цели на урока:

- ▶ Въвеждане на задачата и съставяне на условие.
- ▶ Учене на събиране и изваждане.
- ▶ Откриване на водещи до решение стратегии.

Очаквани решения:

а) Опит и грешка;

- ▶ Системни опити и грешки: Определете общата сума (78), разделете сумата на 2; намерете варианти за половината сума.
- ▶ Отклонение: Как определяме сумата на целите числа в една аритметична прогресия?

б) Всички плюс (положителни елементи) винаги дават решение 39. Съществуват минимум 4 положителни елемента и максимум 8 положителни елемента.

Варианти на задачата:

- ▶ Вземете шестте четни числа 2, 4, 6, 8, 10, 12 и използвайте действията събиране и изваждане, за да получите условие, равно на 0. Възможно ли е това?
- ▶ Можете ли да направите същото с шестте нечетни числа?
- ▶ Можете ли да направите същото с числата от 1 до 11?
- ▶ Можете ли да направите същото с числата от 1 до 10?
- ▶ Представете си, че часовникът падне и циферблатът се разбие на три парчета. Възможно ли е сумата от числата от всяко парче да бъде една и съща?

Описаната тук работа чрез подход с отворен край е важна за трениране на базови умения и стимулира следните важни дейности:

- ▶ Самостоятелна работа по задачите.

- ▶ Изготвяне на самостоятелни стратегии за решаване на задачи.
- ▶ Представяне на решения на съученици.
- ▶ Сравняване и оценяване на различни решения.

В края на урока учителят трябва да направи обобщение, да оцени постигнатите резултати и евентуално да даде допълнителни примери за задачи със сродно математическо съдържание.

Трайни резултати се постигат само когато имаме баланс между указанията (предоставяни от учителя) и независимото построяване на задачата. Работата по описания горе начин е опит за постигане на този вид баланс. Възложената задача подтиква учениците да работят активно и самостоятелно. Указанията на учителя могат и трябва да чакат, докато работната фаза на ученика завърши.

Характерни особености на ситуациите с отворен край

Ситуациите с отворен край:

- ▶ обикновено са силно мотивиращи,
- ▶ могат да бъдат много правдоподобни,
- ▶ дават възможност на учениците да съставят въпроси и задачи самостоятелно,
- ▶ карат учениците да се изразяват разбираемо,
- ▶ стимулират обвързването със знанията, които учениците имат по други училищни предмети,
- ▶ дават възможност на учениците да решават задачи със собствени стратегии чрез пътища, които са избрали самостоятелно,
- ▶ имат ограничена „ориентация към продукта“ (пътят е наградата).

Предимства на работата по метода на отворения край при преподаването на математика

- ▶ Ученици, работещите по ситуации с отворен край, правят повече от един опит да вникнат в същността на задачата за разлика от онези, които работят по конвенционални задачи.
- ▶ При работа по въпроси с отворен край, учениците развиват умение да задават различни въпроси. Те конструират и проследяват различни проблеми в зависимост от вече придобитите умения, интереси и способности. Учениците откриват различни подходи и възможности за достигане до решение. Това допринася за естествената диференциация.
- ▶ Когато учениците се занимават с традиционни задачи, можем да очакваме най-много отговорите им да бъдат или „100 % верни“, или „100 % грешни“. При задачи с отворен край учителите могат да очакват „частично верни“ решения.
- ▶ Решаването на традиционни математически задачи често предизвиква т. нар. „капитански синдром“. Контрапродуктивните пътища се срещат много по-рядко, когато учениците работят по задачи с отворен край.

- ▶ Какво е „капитански синдром“? През 1989 г. книгата „На колко години е капитанът?“ от Стела Барък предизвика вълнения. Седемдесет и шест от деветдесет и седем второкласници и третокласници „решиха“ задачата: „На един кораб има 26 овце и 10 кози. На колко години е капитанът?“ Обичайният отговор беше – 36! Разширен вариант на това (френско) проучване, обхващащ повече задачи и ученици и такива от други класове, потвърди този твърде обезпокоителен резултат.
- ▶ Резултатите от работата по задачи с отворен край не са свързани с пола на учениците. Момчетата извличат огромна полза от подхода с отворен край, но и момчетата не изпадат в неизгодно положение.

Тук следва да направим една отбелка. Не целим замяна на всички традиционни задачи в часовете по математика с такива с отворен край или пък работа изключително със ситуации с отворен край. Искаме само да разширим обсега на методите, с които разполагаме. Рутинните задачи запазват значението си за практикуването и усвояването на определени процедури, модели или умения. Задачите с отворен край са по-близки до живота. Тук учениците могат да покажат дали са в състояние да приложат придобитите знания без помощта на учителя.

Условия за успешни промени в подхода към обучението

Нужно е да положим усилия, за да направим училището по-ефективно, като променим обучението отвътре. Това трябва да стане на малки стъпки, които могат да се осъществят при относително ниски разходи. Ще изброим някои от необходимите фактори:

- ▶ Сътрудничество между учителите.

Вълкът-единак прахосва силите си. Опитът на отделния учител да осъществи цялостни промени в конвенционалните подходи на обучение няма смисъл или пък той ще е незначителен. Ако учениците са свиквали години наред с традиционния вид обучение от тип лекции, този опит ще бъде обречен на неуспех, защото учениците няма да искат да изоставят своята „удобно“ пасивна роля. Обучението може да се промени ефективно само чрез взаимно сътрудничество. Необходимо е „групирание“ на „критична маса“ учители съмишленици, работещи системно за постигане на самостоятелност в ученето. Това налага учителите да преосмислят своя стил на преподаване. Необходима е смяна на ролите. Учителят няма да предава знанието на учениците си. Той ще им дава възможност да получат достъп до него.

- ▶ Повече автономност за училищата и учителите.

В Германия обучението в клас и броят и видът на оценките на постиженията са предмет на твърде строг режим от учебни планове, програми, училищни и други правилници. В други страни, например Швейцария или Холандия, учителите имат повече свобода да действат на собствена отговорност. Това създава по-голяма мотивация, себеотдаденост и професионализъм. Никой не трябва да се крие зад правилата само заради мързела си да стори нещо друго. Нека най-после дадем повече свобода! Положителният подход е вече намерен! За да подтикнат учениците към изследване на своите пътища към ученето, да създадат методи на обучение като „отворят“ задачите, представят вариантите им или работят на принципа „аз-вие-ние“, учителите имат нужда от подходящи условия за преподаване. Това включва:

- ▶ Достатъчно малка численост на класовете, за да се даде възможност на учителите за индивидуална работа с учениците или за работа по техни индивидуални идеи.

- ▶ Отказ от 45-минутното стакато темпо. Работата по интересните задачи има смисъл само тогава, когато имаме достатъчно време да я извършим.
- ▶ Отделяне на средата за работа от средата за тестване.

Натискът за постигане на добри оценки не трябва да доминира в среда, в която се проучва и упражнява ново съдържание. На учениците трябва да се каже ясно, че учебната дейност има за център съдържанието, а не оценката на техните учебни постижения. Средата за обучение и средата за тестване трябва ясно да се разделят, защото целите, които определят характера им са твърде различни.

Учебната ситуация има следните или подобни характеристики:

■ научаване на нещо ново,

- ▶ запълване на пропуските в обучението,
- ▶ подобряване на разбирането на въпроси, изискващи изясняване,
- ▶ откриване на връзки.

Тук учителят действа като съветник и помощник, а учениците – като партньори в научаването.

Ситуацията на тестване или изпитване има следните характеристики:

- ▶ избягване на грешки,
- ▶ неразкриване на липса на знания,
- ▶ проектиране на свой положителен образ,
- ▶ отбелязване на възможно най-висок резултат.

Тук учителят е оценител. Учениците обикновено са състезатели.

▶ Тестови постижения

Променените форми на обучение няма да бъдат устойчиви или успешни, ако не се променят и тестовите за проверка на научните постижения. Тестови въпроси, които могат да се решат вярно благодарение на запаметени и схематични отговори, застрашават онзи подход към обучението, който активира умението за разбиране и решаване на задачи.

Промяната на създадените навици е продължителен и изтощителен процес, който може да се осъществи само на малки стъпки. Разглеждането на следните въпроси при съставяне на тест за проверка в клас е една от стъпките в правилна посока.

- ▶ Винаги ли задачите трябва да бъдат представяни във вид на аритметични задачи?
- ▶ Не може ли да задаваме задачите в устна форма?
- ▶ Може ли да включваме обяснения и аргументи?
- ▶ Може ли да представяме задачи, които позволяват различни решения?

Това са прости и скромни предложения за промяна, но ефектът от потенциала им е огромен, ако бъдат реализирани последователно и развити допълнително.

Заради училището ли учим или заради живота?

Съществуват множество противоречиви дискусии за придобитото в училище знание. Въпросът „За какво ми е това?“ е израз на прекомерно внимание към „директното приложение“. Общобразователните училища имат една образователна функция, която се простира далече извън предаването на директно приложимото ежедневно ноу-хау. Това ноу-хау, естествено,

също трябва да има място в образователната среда, но въпросът не свършва дотук. Училището е факт от живота. Ето защо ние не учим заради училището, а заради живота. Учим заради живота в училище и извън него. Обикновено усвояваме знанията в определен контекст. Затова ни е трудно да отнесем знанието към друга ситуация и контекст. Нищо чудно, че придобитите в училище знания невинаги са ни под ръка в извънучилищни ситуации. Тези знания се наричат „инертни“. За да ги приложим, трябва първо да ги адаптираме към отделната ситуация. Трябва да ги модифицираме или разширим. Ще го постигнем по-лесно, ако придобитото знание е било прилагано вече към друг контекст. Това означава, че ни е необходимо ситуационно и систематично учене. Те трябва да се допълват взаимно. Въпреки налаганите в училище ограничения върху директната приложимост, усвоеното по тези методи знание никога не е безполезно.

Качеството на училищното обучение едва ли би могло да се оценява само чрез директната практическа приложимост. Училищното обучение е качествено винаги, когато е култивирало способност за ефективно и самостоятелно учене както в училище, така и извън него.

„Училището“ е абстрактно понятие. Конкретните фактори са „ученици“ и „учители“. Важно е не какво се преподава, а как се преподава. Според мен класическото образование може да бъде добра подготовка за модерния живот – стига преподаването да е на ниво.

Пилотното проучване SINUS и Разпространение на SINUS на BLK предоставят множество идеи от вида, към който призовава Хайнрих Ман (1871 – 1950) в цитирания горе пасаж. Ако учителите и учениците се заемат да „преживеят“ математиката, нейният първоначално чужд свят ще им стане близък и ще бъде съсредоточен в два центъра – значението на математиката за техническия, медицинския и икономическия прогрес и формирането на иновативен и прецизен начин на мислене.

ЛИТЕРАТУРА

- ▶ Baptist, Peter: Elemente einer neuen Aufgabenkultur. BLK 1998 Download at www.sinus-transfer.de
- ▶ Baptist, Peter (Hrsg.): Lernen und Lehren mit dynamischen Arbeitsblättern. Friedrich 2004
- ▶ Baptist, Peter und Dagmar Raab: Auf dem Weg zu einem veränderten Mathematikunterricht. Z-MNU 2007 Download at www.sinus-transfer.de
- ▶ Cofman, Judita: What to Solve? Problems and Suggestions for Young Mathematicians. Oxford University Press 1990
- ▶ Devlin, Keith: Mathematics. The Science of Patterns. Scientific American Library 1997
- ▶ Enzensberger, Hans M.: The Number Devil. Holt 2000
- ▶ Flewelling, Gary: Teaching with Rich Learning Tasks: A Handbook. Australian Association of Mathematics Teachers 2005
- ▶ Freudenthal, Hans: Mathematics as an Educational Task. Kluwer 1973
- ▶ Herget, Wilfried u.a.: Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Cornelsen Verlag, Berlin 2001
- ▶ Polya, George: How to Solve It. Princeton University Press 2004
- ▶ Schoenfeld, Alan: Mathematical Problem Solving. Academic Press 1988
- ▶ Ulm, Volker: Mathematikunterricht für individuelle Lernwege öffnen. Kallmeyersche Verlagsbuchhandlung 2004
- ▶ Wittenberg, Alexander: Bildung und Mathematik, Klett-Verlag 1990



Фолкер Улм

Обучението по математика – разкриване на индивидуални пътища към учене

Превод: Йорданка Горчева

Съдържание

- ▶ Отвореният подход: Индивидуална работа с всеки
 - Задаването на въпроси
 - Изследване на обекти със средствата на математиката
 - Дискусия
 - Оценки
 - Създаването на задачи
 - Математически приказки
- ▶ Постскрипtum: Математическата грамотност
- ▶ Литература
- ▶ Послепис към българския превод

Отвореният подход: Индивидуална работа с всеки

Дотук бяхме съсредоточили вниманието си върху въпроси от методологията на преподаване на математика. Да се обърнем сега към конкретни примери. Когато помолим учениците да мислят и работят самостоятелно, тяхното поведение се определя най-вече от формата на поставените задачи: за домашно или за работа в клас. Огромни са възможностите и за алтернативни задания.

Нашата грижа е да правим задачите достъпни и да намираме начини всекидневно да мотивираме учениците, макар и в малки дози, да работят самостоятелно и/или в сътрудничество със съучениците си.

Учениците могат да почувстват неудовлетворение, ако някоя задача се окаже не само с едно решение. Задачи, които целенасочено предоставят възможност за независими подходи за решаването им, се наричат отворени. Те дават на учениците известна автономност на работа. Отворените задачи нямат едно единствено вярно решение. Те очертават ситуация, която може да се дискутира математически. Те приканват учениците да се ангажират с математическата страна на нещата и да предложат няколко начина за получаване на различни, еднакво верни решения.

За да почувстваме какво означава отворена задача, да разгледаме някои примери. Това ще ни даде и възможност да набележим стратегии за съставяне на отворени задачи за нуждите на ежедневно преподаване на математика.

Задаването на въпроси

Един възможен начин да създадем ситуации за учене на базата на отворени задачи е да накараме учениците да задават въпроси за ситуации, които могат да бъдат описани математически. Подходяща отправна точка са например снимки, предлагащи атрактивен ракурс към някакъв предмет. Ето един пример:

Футболни топки.

1. Измислете и задайте възможно най-много въпроси върху дадената илюстрация.
2. Обсъдете идеите и резултатите си със своя съсед в класа.
3. Споделете най-интересните резултати, получени от вашия съсед с останалите от класа и ги обсъдете.



Снимка: Франц Бекенбауер, Оливер Бийрхоф,
© Deutsche Postbank AG

Някои въпроси, които могат да ви дойдат на ум, са например следните:

- ▶ Колко голяма е футболната топка?
- ▶ Колко голямо е футболното игрище?
- ▶ Колко на брой футболни топки са необходими, за да покрият игрището?

Едва ли можем да очакваме, че учениците ще определят точно големината на футболната топка и футболното игрище. Урокът по математика обаче ще ги сблъска с общите идеи за големина и размерност. Учениците биха могли да оценят диаметъра на футболната топка на около 25 cm, а размера на футболното поле – на приблизително 100 m на 50 m. Тогава, въз основа на собствените им предположения, те без особена трудност ще оценят броя на топките, покриващи игрището. За учениците това успешно прилагане на математиката в ситуация, показана на снимка, ще им вдъхне кураж и увереност да се справят и с по-сложни задачи:

- ▶ Колко общо биха стрували топките, с които е покрито игрището?
- ▶ За колко време един човек би напипал сам всички тези топки?
- ▶ Колко време би било нужно на човек, за да покрие с топки игрището?
- ▶ Колко камиона ще са необходими, за да извозят тези топки от игрището?
- ▶ Каква подредба ще осигури покриването на игрището с възможно най-много топки?
- ▶ ...

Отговорът на подобни въпроси изисква по същество математическо мислене. За разглежданата задача например е подходящо да се приложи принципа „Аз-Ти-Ние“. Реализацията на „Ти“-фазата (работа в малки групи) зависи от преценката на учителя дали да се работи с групи от ученици с едно и също (хомогенно) ниво на подготовка или с групи с различно (хетерогенно) ниво на подготовка. Не трябва да се счита обаче, че само снимковият материал е подходящ за отворените задачи. Данни от ежедневието (разписания на влакове, менюта, статистически данни и пр.) също могат да бъдат източници за поставяне и изследване на математически задачи. Следващият пример с цените на ски-лифт представя не само тема, която би заинтересувала учениците, но и начална точка за самостоятелно математическо изследване. Идеята, заложена в тази задача, е разработена и тествана в рамките на проекта SINUS в едно основно училище в Баден-Вюртенбург, Германия.

През зимната ваканция семейство Милер планира да отиде на ски. За цените на лифта са събрали следната информация:

Ски-спускане 2002/2003

Карти за лифт	Възрастни	Деца	
5-дневна карта	105 €	75 €	
3-дневна карта	72 €	51 €	
11-дневна карта	27 €	19 €	
Следобедна карта	16 €	11 €	(след 12:30)

Семеен пакет (картата за лифта важи за цялото семейство)

5 дни	333 €
33 дни	222 €

Обмислете какви въпроси да зададете и след това им отговорете.

Такава формулировка не „затваря“ задачата, тъй като изгражда само „скелета“ на една ситуация. Преди да зададат въпроси и да извършат каквито и да било аритметични действия, учениците трябва да вникнат в ситуацията. Така поставена, задачата не позволява на учениците да се втурнат към рутинни пресмятания, свързвайки числовите данни по случаен начин.

Какви въпроси бихте дискутирали на базата на тази ситуация?

Интерес представляват също и следните задачи:

- ▶ Колко ще спестите, ако купите една тридневна карта за лифта вместо 3 еднодневни?
- ▶ Защо една тридневна карта за лифта е по-евтина от 3 еднодневни?
- ▶ Изгоден ли е семейният пакет за лифта?
- ▶ При какъв минимален брой членове на семейство е за предпочитане да се купи семеен пакет за лифта?
- ▶ Колко би платило семейството на съответния ученик за този лифт?
- ▶ Изгодно ли е да се предпочете пързалане само в следобедите?
- ▶ Ако семейството на съответния ученик планира 6-дневен престой, кои карти за лифта са най-подходящи?
- ▶ Коя е най-изгодната оферта за 7, 8, 9, ... дни?

По традиция преподаването на математика включва изключително детайлни въпроси, подтикващи учениците да отговарят това, което учителят би искал да чуе. В подобни случаи действията на учениците често се ограничават до търсене и прилагане на такива процедури за решаване на задачи, които следват непосредствено от текущото преподаване. С наша помощ учениците трябва да свикват с отворените задачи. Проблемите, с които ще се сблъскват по-нататък в живота, рядко ще бъдат придружавани от подробни инструкции за решаването им.

При структуриране на уроците си учителите могат да се възползват от принципа „Аз-Ти-Ние“. Този подход предлага и възможности за „вътрешно диференциране“ на класа (групиране на учениците на по-бързи и по-бавни относно изпълнението на задачите). Докато по-слабите ученици задават по-лесни въпроси, по-напредналите ще могат да атакуват по-сложни задачи.

Данните също представляват отлична база за математически разсъждения, поставяне на въпроси и дискусии. Ето пример на задача за по-напредналите ученици от горния курс:

Година	Население в млрд.
1900	1.65
1910	1.75
1920	1.86
1930	2.07
1940	2.30
1950	2.52
1960	3.02
1970	3.70
1980	4.44
1990	5.27
2000	6.06

Увеличаване на населението на Земята

Уебсайтът на ООН съдържа разностранна информация относно увеличаването на населението на Земята (www.un.org/popin). Част от данните са показани в настоящата таблица..

1. Помислете за интересни въпроси относно нарастването на населението на Земята и се опитайте да им отговорите.
2. Съберете информация от интернет, засягаща динамиката на населението на Земята. Подредете данните в подходящ вид и ги представете на съучениците си.

Какви заключения могат да бъдат направени въз основа на тези данни?

За начало може да използвате и текст със скрито математическо съдържание, както в следващия пример (вж. Herget and Scholz, 1998, с. 113). Формулировката е заимствана от един тест за оценка на знания, зададен на шестокласници. И тъй като отворените задачи са съществена част от преподаването по математика, намираме включването им в подобни тестове за напълно уместно.

Материалът по-долу е от немския ежедневник Брауншвайгер Цайтунг:

1576 стъпала за единадесет минути

НЮ ЙОРК. Американският състезател по скално катерене Ал Уаке победи в тазгодишното изкачване на Емпайър Стейт Билдинг. На 32-годишния Уаке му бяха нужни 11 минути и 29 секунди, за да изкачи 1576-те стъпала от 86-те стълбища, включени в маршрута на състезанието.

Поставете математически въпрос върху откъса и му отговорете.

Преподаването на математика в училище обикновено включва учениците в предлагането на техни въпроси и отговори относно зададени ситуации. В учебниците това е отразено чрез поместването на картинки или данни, за които учениците да формулират подходящи въпроси. На места се срещат и задачи с думи без нито един формулиран въпрос. За илюстрация предлагаме два примера от учебници по математика за втори и четвърти клас.



(Източник: Kolbinger, К.-Н. Лешникотрошачката. Нашата читанка по математика за 2. клас. Klett Verlag, Stuttgart, 2001, 87, Баварско издание)

Обмислете въпроси върху предложените текстове и им отговорете:

Никола иска да си купи туристическа палатка (85 €), надуваем дюшек (15,90 €) и спален чувал (79 €). За целта той тегли пари от банкова сметка, в която преди тегленето има налични 484 €. Тарифата на немската радиостанция SWR за излъчването на реклами е 4,79 € за секунда. Рекламата за фирма „Всичко чисто“ трае 9 секунди и се излъчва 5 пъти на ден от понеделник до петък, 7 пъти в събота и нито веднъж – в неделя.

(По Keller, K.-H., Pfaff, P. Книжка по математика за 4. клас. Mildener Verlag, Offenburg, 2002, с. 57 и 59)

И в двата примера не фигурират явно зададени въпроси. Учениците са изправени пред предизвикателството да вникнат в конкретна ситуация, да изследват математическото съдържание и да се запитат какво би представлявало интерес да се търси в нея. Това предшества по адекватен начин самите аритметични действия, а уменията на учениците да анализират се развиват още в началните класове. Но за да не бъдат тези умения забравени, специалните грижи трябва да продължат и в по-горните класове.

От колеги съм чувал следното възражение:

„Няма значение кой задава въпросите – аз или моите учениците. Това, което наистина е важно, е дали учениците ще си сметнат задачата.“

Какво мислите за това изказване?

Изследване на обекти със средствата на математиката

В математиката отворени наричаме всички тези задачи, в които учениците се приканват да изучават обекти и да откриват, и да изследват математическите им свойства.

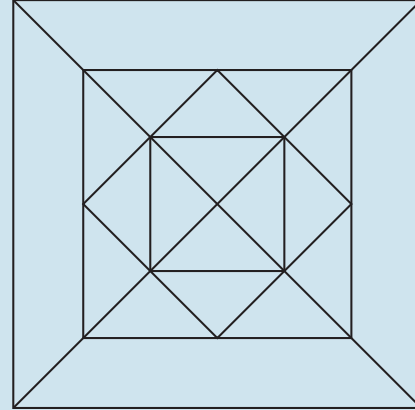
Следващите примери могат да бъдат използвани в преподаването на материала на съответно равнище в различни класове: симетрия, триъгълници, четириъгълници, дължина на окръжност, лица, пресмятане на проценти, хомотетия и пр. (вж. Baptist, 2000 и Wurz, 1998).

Традиционният учебник по математика изобилства с геометрични фигури, придружавани от съвсем конкретни въпроси. Първоначално учителят може да игнорира въпросите от учебника и да създаде отворени обучаващи ситуации. Вместо тях, той може да зададе на учениците си да изучават геометричните фигури като такива, да откриват и изследват математическия им потенциал.

Примерът позволява изследването да поеме в различни посоки.

- ▶ Колко триъгълника виждате на чертежа? А колко четириъгълника?
- ▶ С какви отношения може да свържете триъгълниците и четириъгълниците? Какви подобия наблюдавате? Какъв процент от цялото лице заема вътрешният квадрат?

Решетки на балкони



Тук е показан образец на решетка на балкон.

Изследвайте геометричната фигура и посочете колкото можете повече нейни свойства.

Обсъдете със съседа си получените от Вас резултати.

В партньорство със съседа си представете на класа най-интересните резултати на двама ви.

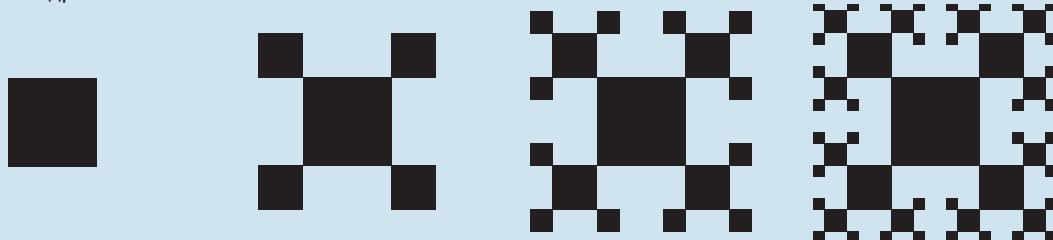
- ▶ Колко е общата дължина на всички пръти, използвани в конфигурацията?
- ▶ Колко тежи конфигурацията на решетката, ако в оригинал тя заема 1 m^2 ? Можете ли да я повдигнете без чужда помощ?
- ▶ ...

Най-доброто нещо, което може да се направи, е да се отдели известно време на тази задача и тя да се изследва на различни равнища. Подобно задълбочаване в един-единствен проблем ще се окаже много по-ефективно в дългосрочен план, отколкото самоцелното решаване на голям брой, но изолирани задачи.

В подкрепа на поставената образователна цел могат веднага да бъдат привлечени и следващите геометрични образци. Те също предлагат възможности за изследване „в дълбочина“ на проблемна ситуация и за открития от страна на учениците.

Образци, генерирани от квадрати

Тук е показан процес, при който се генерира една конфигурация от квадрати. Започваме от един голям квадрат и в четирите му върха добавяме по-малки квадрати. Стъпка по стъпка, дължините на страните на квадратите намаляват с постоянен множител.



Заедно със съседа си изследвайте тази редица от конфигурации по възможно повече различни начини. След това представете заедно на класа резултатите си.

И кратък поглед е достатъчен да разберем, че тези конфигурации са покана към един нов път на разсъждения, поставяне на въпроси, изследване, експериментиране и откривателство, т.е. към задълбочаване в математиката. Многобройни са аспектите, които могат да изследват учениците според интереса и таланта си:

- ▶ броя на квадратите,
- ▶ лицето, което „изпълват“ конфигурациите,
- ▶ обиколката на фигурите,
- ▶ припокриването на конфигурациите или контактите,
- ▶ свойства на симетрия,
- ▶ броя на върховете,
- ▶ най-малкия квадрат, съдържащ n -та конфигурация,
- ▶ най-малкия квадрат, съдържащ всички конфигурации,
- ▶ поведението на редицата от лица на конфигурациите,
- ▶ поведението на редицата от периметрите на конфигурациите,
- ▶ компютърна програма, генерираща такива конфигурации.

Това разнообразие на свой ред поражда нови интересни въпроси. Вместо квадрати учениците биха могли да разгледат триъгълници, петоъгълници или други многоъгълници, които да свържат по различни начини. Принципа за създаване на такива конфигурации учениците могат да приложат и към тримерни обекти, да получат аналогични конфигурации, съставени от кубове, тетраедри и пр., да изследват повърхнините, обемите им и т.н.

След като напреднат в изучаването на подобни конфигурации, учениците интуитивно достигат до идеята за долна граница на сходяща редица. Но какво всъщност представлява границата на такава редица от геометрични фигури? В какво пространство биха срещнали процес със сходящи стойности? Подобни въпроси биха довели най-ентузиасираните и талантиливи ученици до сериозно и задълбочено изследване.

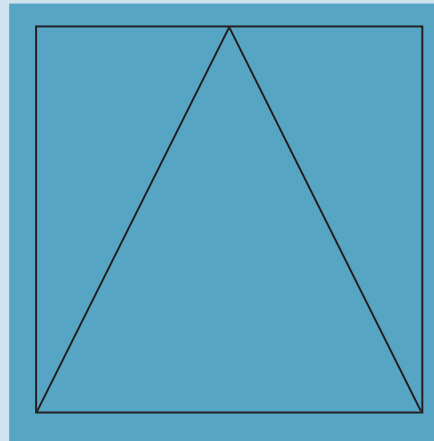
(Хаусдорфовата метрика позволява да се измери колко отдалечени едно от друго са две подмножества на едно метрично пространство. Тя превръща множеството от непразни компактни подмножества на едно метрично пространство в метрично пространство. В това

пространство, разглежданата тук редица от фигури е редица на Коши и следователно е сходяща. Граничната стойност представлява „края“ на растящото обединение от всички фигури.) Следващият пример на пръв поглед изглежда по-скоро като една невзрачна геометрична фигура, отколкото като отправна точка за математически изследвания и открития. Идеята е разработена в контекста на програмата SINUS в училище „Якоб Грим“ в гр. Ротенбург, Германия.

Триъгълник, вписан в квадрат

На картинката е показан квадрат с вписан в него триъгълник.

1. Формулирайте поне пет математически твърдения, отнасящи се до показаната фигура (напр. лице, ъгли и пр.)
2. Влечете горния връх на триъгълника, така че да получите равнобедрен триъгълник. Каква е височината на този нов триъгълник? Какъв процент от квадрата заема той?
3. Как бихте преместили горния връх на триъгълника, че да получите триъгълник, който заема една четвърт част от лицето на квадрата?



Един пример от материала за функции в горния курс за напреднали ученици показва, че не е нужно непременно да се придържаме към твърди правила при изследването им. Има начин да „отворим“ и този тип задачи:

Изследване на функции

Изследвайте семейството от функции

$$f_a(x) = \sqrt{x(a-x)}, \quad x \in D_{\max}$$

Ако е дадено, че параметърът $a \in \mathbb{R}^+$, обсъдете възможно най-много свойства на това семейство, за които се сещате..

От последното изречение на пръв поглед не става ясно какво трябва да се прави и дали изобщо има нещо да се прави. Но разглеждайки по-внимателно задачата, ще забележим, че функциите представляват семейство полуокръжности. Това е нещо, което може да бъде открито, описано и демонстрирано.

Един класически подход вероятно би довел до следната формулировка: „Дискутирайте максималната дефиниционна област, максималната област на монотонност, пресметнете първата и втората производна, екстремумите, инфлексните точки и начертайте графиката за $a = 2$.“

Разбира се, в зависимост от конкретната педагогическа ситуация такива подробни инструкции могат и да са полезни. Ние обаче смятаме, че би било неуместно дискусиите върху функции да следват винаги тясно предначертани пътища и на учениците да не им се предоставя свободата да следват свои собствени пътища на познание.

Едно сравнение с другите учебни предмети показва, че там също използват регулярно отворени задачи. Например, когато в часа по съвременна история учениците започнат дискусия относно създаването на Европейския съюз, се предполага, че поне до известна степен те ще разкрият един доста сложен контекст. Същото се отнася и за разглежданата математическа задача. От учениците се изисква да изследват задълбочено един математически обект и да представят по структуриран начин своите резултати. Ако обаче някой ученик или ученичка определи дефиниционната област на функцията и пресметне производните, но не успее да разпознае графиките като полуокръжности, тогава вероятно е налице съществен пропуск. Последната задача, която привеждаме като пример за изследване на математическото съдържание на дадена ситуация, свързва геометрията с математическия анализ. Тук елементарното геометрично разглеждане на повърхнината и обема на конус води до функции, чието изследване със средствата на анализа е особено атрактивно и съдържателно.

Кръгов конус

Кръгов сектор е използван за направата на конус. Дискутирайте зависимостите на параметрите на конуса (напр. височина, повърхнина, обем) от параметрите на сектора.

Учениците могат да затвърдят и задълбочат геометричната си проникателност посредством разглеждане на тесните взаимовръзки между величините, характеризиращи кръговия сектор (радиус, централен ъгъл, дължина на дъгата) и величините, характеризиращи конуса (образуваща, височина, радиус на основата, дължина на окръжността на основата). Следва установяването на елементарни зависимости между тях (например, за обема на конуса или лицето на околната му повърхнина – зависимостта им от параметрите на сектора) и изследването им с методите на математическия анализ. За по-напредналите ученици тази тема също предлага сериозни предизвикателства. Екстремалната задача („За кой централен ъгъл на сектора – при постоянен радиус, – обемът на съответния конус достига максимум?“) бързо ще ги отведе до функция от вид $f(x) = x^2 \sqrt{1 - x^2}$. Една по-разширена дискусия на тази функция не изисква нищо повече от стандартното преподаване на анализ в горния училищен курс. Но за да се извършат пресмятанията, е необходимо всъщност дълбоко разбиране на нещата. Ако към графиката на разглежданата функция бъде присъединен и огледалният ѝ образ спрямо координатните оси, ще се получи друга една алгебрична крива, чието уравнение е $y^2 = x^4 (1 - x^2)$.

Предложете още примери, предразполагащи учениците да изследват и откриват математически взаимовръзки.

Дискусия

С изложеното дотук целяхме да ви подтикнем към размисъл и за дългосрочните цели на математическото образование. За себе си може би сте открили, че е за предпочитане да представяме вербално математическите взаимовръзки, или пък да оценяваме интересуващите ни факти с подходящи математически средства. Тези компетенции са неделима част от математическата грамотност. Един проверен начин да се убедят учениците в необходимостта им е работата върху отворени задачи. Следващият пример (по Herget and Scholz, 1998, с. 32) е част от тест за оценка на знания, проведен в гимназия „Еренбург“ във Форхайм, Германия.

Настоящият репортаж е взет от в. Нордернойер Бадецайтунг:

“Преди няколко години всеки десети водач е превишил поне веднъж допустимата скорост. Сега скоростта нарушава едва всеки пети. Но дори и пет процента от шофьорите е твърде много. Квитанциите за глоба все още са твърде разпространени и водачите-нарушители ще трябва да ги плащат.”

Дискутирайте математическите заключения в тази новина..

Когато става дума за предмета математика изобщо или за създаването на тестове за оценка на знанията в частност, често се пренебрегва участието на учениците в ситуации, в които те могат да оценяват или дискутират. Твърде често задачите се представят по начин, който предполага учениците да помислят малко и да почнат да смятат. Решенията приемат формата на изчисления и само някои отговори биха могли да се запишат като изречения. За съжаление, от учениците много рядко се изисква да вербализират по-сложни мисли.

Ако искаме да предадем на нашите ученици нещо повече от чисто технически умения, т.е. ако искаме да допринесем за тяхното математическо образование, трябва редовно да привличаме в работата си отворени подходи, които предизвикват учениците да оценяват, дебатират и привеждат аргументи.

Разбира се, развиването на математическата грамотност на учениците изисква време. Откриването на реално допусната математическа грешка обаче, при това в популярен вестник, със сигурност би отприщило коментарите им.

Следващите четири задачи показват как един прост въпрос от рода на: „Какво мислите за...?“ може да накара учениците не само да извършват аритметични операции, но и да обсъждат смисъла им. Втората задача възниква в училище Задоре в Лохфелден, провинция Хесе, Германия. Четвъртият пример е заимстван от материала „Една различна задача“, публикуван в

Ски-скокове

Спортен коментатор за едно състезание по ски-скокове:

“На стартовата линия хълмът за ски-скокове има наклон 100%. Това е равносилно на почти свободно падане на състезателите.”

Какво мислите за този коментар?

сп. „Преподаването по математика“ (Mathematik Lehren, 1999, No. 97, с. 66) и също е използван в рамките на проекта SINUS в провинция Хесе, Германия.

Размисли на колела

Тази сутрин Сеня се е успала за училище. За да навакса поне отчасти закъснението си, яхва велосипеда и докато върти с все сила педалите, размислява: „Ех, да бяха два пъти по-големи колелата на този велосипед, щях да стигна в училище за два пъти по-малко време.“

Правя ли е Сеня? Какво мислите вие?

Хлебчета

В хлебарницата Джесика си е избрала четири пълнозърнести хлебчета. Продавачката иска за тях 1,69 евро. Джесика се замисля за минута и възразява, че вероятно е станала грешка.

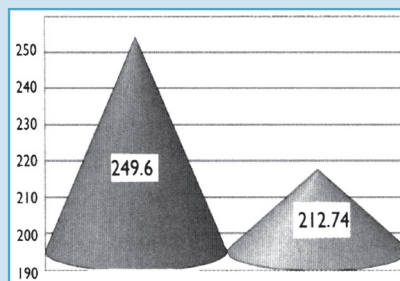
Какво мислите вие?

Емисии на въглероден двуокис

Представената диаграма е публикувана в сп. „Ден и нощ“ в гр. Ветцлар, Германия с цел да мотивира потребителите на течни горива да преминават на природен газ.

Какво мислите за тази диаграма?

1. Каква е процентната разлика в количествата, изобразени с конуса за природен газ и този за течни горива?
2. Сравнете резултата си с данните от графиката.
3. Предложете подходящо представяне на данните с конуси (или други геометрични фигури).



Намаляване на емисиите на CO₂
в тонове на година
след преминаване
от течни горива на природен газ

Измислете задачи, в които простичкият въпрос „Какво мислите вие?“ ще прикани учениците да мислят математически и да преценяват ситуации от математическа гледна точка. Търсете материали от ежедневието (статии от вестници, реклами и пр.), които могат да породят математически коментари и дискусии с учениците върху някаква ситуация. Обменяйте такива материали и с колегите си (като обменът не се ограничава само с това...).

Оценки

Да започнем с образ

В сравнение с текстовете, образите често предават по-ярко идеите. Затова те могат да служат като източник за изследване на многобройните начини на подход и математическо мислене. Ето един пример (по Herget et al., 2001, с. 32):

Балон с горещ въздух

Колко въздух е необходим, за да се напълни този балон?



Снимка: Kropsoq, commons.wikimedia.org

Тук е налице аналогия с въпроса за лицето на повърхнината на континент от теста PISA 2000 (вж. Deutsches PISA-Konsortium 2001, OECD o.J) и задачата за най-големия стол. Основавайки се на приблизителния размер на хората в коша, учениците ще могат да оценят и размерите на балона. След това възниква въпросът за формата на балона. Има различни начини за получаване на приблизително решение и дори шестокласници биха могли да се справят с проблема. Те например могат да достигнат до отговор, умножавайки „дължината по широчината по височината“. При по-точна апроксимация балонът може да се разглежда като комбинация от две тела: полусфера и конус с обща основа. Но това няма да подобри съществено резултата. И от пръв поглед се вижда кое в крайна сметка е решението, съществено по-добро от предишните. При него най-важни се оказват процесите на разделяне на повърхнината на балона на много на брой слоеве и последващото ги обединяване. Това всъщност са процесите на построяване на модел, при които се налага учениците да анализират ситуацията, да я опростят и да я преведат на езика на математиката. С достъпните им средства те трябва да изследват математическия проблем, който са открили, а след това – да интерпретират получения от тях математически резултат на езика на дадената ситуация. Това им дава опит в някои от най-фундаменталните техники на пресмятания в математиката.

В частност, учениците ще добият увереност и самочувствие да щурмуват самостоятелно и някой по-сериозен проблем и да проправят свой собствен път в математиката.

Липсващата информация

Когато се касае за математиката, в най-общия случай задачите се формулират така, че да съдържат именно информацията, необходима за решаването им. Същото се отнася и за природните науки. Ако има излишна информация, това прави учениците несигурни. Ако пък информацията е недостатъчна, учениците биха сметнали задачата за нерешима.

Такива ситуации, разбира се, са напълно изкуствени и могат да се срещнат само в училище. Задачи, които са реалистични, рядко са изрядно дефинирани.

Ето пример на една класическа текстова задача:

Общата площ на един паркинг е 5000 m^2 . Всяко паркомясто е 3 m широко и 5 m дълго. 40% от площта е предназначена за осигуряване на достъп до паркоместата. Колко коли могат да бъдат паркирани на този паркинг?

Тази формулировка води до едно-единствено решение и това е, което учителят най-често има предвид. Важното тук е да се комбинират по необходимия начин данните. Подходяща стратегия за превръщане на подобни задачи от учебниците в отворени е елиминирането на числата. Ето резултатът, получен от една задача от задължителните тестове за 6. клас:

Паркинг има същата големина, както футболно игрище. Приблизително колко коли могат да бъдат паркирани на него?
Обосновете се.

Така с малко усилия създадохме една отворена задача с много възможности за разработване. В тази си формулировка тя със сигурност не е по-лесна от предишната и изисква широк кръг компетентности, като учениците трябва да свържат познанията си по математика с тези за реалния живот. Нужно е и адекватно разбиране на размерностите, оценяване на размери, напътна на предположения и вземане на решения. Учениците трябва да извършат съответните пресмятания и да обосноват отговора си.

Да разгледаме втори пример от учебник за 6. клас.

Колко m^2 плат са нужни на Гизела, за да покрие правоъгълна маса, широка 0,82 m и дълга 1,13 m, ако покривката трябва да виси по 15 cm откъм всяка страна на масата?

Да се спрем по-подробно на този въпрос и неговата формулировка, тъй като те са до болка познати на учителите по математика.

- ▶ Трябва ли учителят да изисква мерната единица да бъде квадратен метър? Доколко съществено е това?
- ▶ Дали уточняването на размерите на масата не прави задачата ненужно отегчаваща? Нима учениците нямат достатъчно маси около тях?
- ▶ Учениците знаят, че покривките трябва да висят от страни на масата. Не можем ли да ги оставим сами да преценят колко да бъде провесването? При каква дължина на провесване покривката изглежда най-естетично?
- ▶ Как ще коментирате употребата на ключовите за задачата думи „правоъгълна“, „широка“ и „дълга“? Не е ли равносилно да поискаме от учениците да пресметнат лицето на даден правоъгълник и да считаме останалото за словесна еквилибристика?

Нека оставим отново конкретните числени стойности. Това ще ни даде отворен и реалистичен, при това значително по-богат подход към конкретната ситуация.

Колко плат ви е нужен, за да покриете с покривка една маса във вашето училище?
Илюстрирайте идеята си със скици в тетрадките.

Възможно е някой ученик да възрази, че изразяването на отговора в m^2 няма особен смисъл, тъй като платът ще бъде отрязан от топ с широчина 2 m.

Тук съвсем на място идват дискусиите, които ще внесат яснота как да бъде отрязан от топа нужният плат, колко плат ще се похаби при кроенето и т.н. Отвореният подход ще окуражи учениците да приемат темата като своя и да я разгледат от различни ъгли.

Следващата задача също не съдържа числени данни. Тя насочва учениците да проучват от математическа гледна точка често срещани обекти от ежедневието.

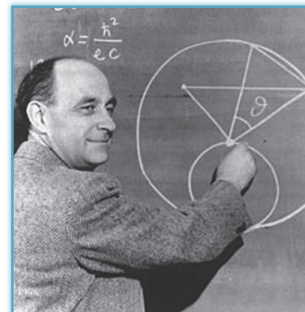
Разглеждайки произволно CD, и с просто око можете да установите на кои негови части има записи (те се правят отвътре навън). Кога CD-то е наполовина пълно?

(Задачата е разработена като част от проекта SINUS в професионалното училище „Оберсберг“ в гр. Бад Херсфелд, Германия.)

В учебника, който ползвате в урочната си работа, набележете задачи, които да трансформирате в отворени чрез изпускане на информация.

Въпросите на Ферми

Енрико Ферми (1901-1954), американски учен и Нобелов лауреат по физика, често изправял студентите си пред извънредно необичайни въпроси. Така ги мотивирал да се справят с проблеми, изглеждащи на пръв поглед нерешими. Ето един пример, който бе представен в различни класове. Той породил множество варианти на оценки и пресмятания и немалко изненади.



Снимка: commons.wikimedia.org

Космите растат изключително бавно. За времето на днешния ни урок по математика всеки отделен косъм на главите ви ще порасне мъничко. Представете си всички тези малки частици една до друга. Каква е общата дължина на косата, пораснала на главата ви за този учебен час?

Ситуацията е лесна за разбиране. Тя е близка до начина на живот на учениците. Те обаче нямат представа какъв би могъл да бъде отговорът. Освен това, задачата оставя у тях впечатлението, че няма достатъчно информация за каквото и да било решение изобщо.

Всичко, което тази задача изисква, е кураж от учениците да се заемат с нея, да използват житейския си опит и да си отговорят на някои подвъпроси:

- ▶ Колко често си подстригвам косата?
- ▶ С колко ми скъси косата фризьорката?
- ▶ Каква е дължината на растеж на косъма за един час?
- ▶ Колко косъма растат на 1 cm^2 скалп?
- ▶ Каква част от черепа е покрита с коса?
- ▶ Колко косъма имам аз на главата си?

Лесно можем да си представим колко забавен ще се окаже такъв математически подход и за учителите, и за учениците. А междувременно учениците ще се упражняват в оценяване, пресмятане на периоди от време, дължини и лица, и дори – в умножение и деление на десетични дробни.

Ето някои допълнителни предложения за задачи на Ферми:

- ▶ Колко на брой са зъболекарите в Европа?
- ▶ Колко общо оценки са поставяни всяка година във вашето училище?
- ▶ Колко от вашия живот прекарвате пред телевизора ?
- ▶ Колко от вашия живот прекарвате в банята?
- ▶ Колко от вашия живот прекарвате в сън?
- ▶ Колко километра сте изминали досега в живота си?
- ▶ Колко е общият обем въздух, който сте вдишали досега през своя живот?
- ▶ Колко удара е направило сърцето ви през целия ви живот досега?
- ▶ Колко е годишната консумация на питейна вода в дома ви?
- ▶ Колко често се среща буквата „е“ в една голяма книга?
- ▶ Могат ли всички ученици от вашето училище да се поберат във вашата класна стая?
- ▶ Колко балона могат да се поберат в класната ви стая?
- ▶ Колко е общата дължина на пастата за зъби, изстискана от една туба ?
- ▶ Гумите на колата се износват с времето. Колко на брой атоми остават средно на пътя при завъртането на едно колело?
- ▶ Колко желирани мечета са нужни, за да напълнят догоре един автобус?

Тук е еднакво важно за учениците да използват креативността и въображението си, от една страна, а от друга - да извършат усърдно и математическата работа.

Помислете за още въпроси на Ферми и ги разработете с учениците си.

Създаването на задачи

1. $\frac{2x-3y}{2x-3y} - \frac{2x+3y}{2x-3y} + \frac{8x^2+18y^2}{4x^2-9y^2}$

2. $\frac{3p^2+1,5p-3}{18p^2-8} - \frac{2p+3}{15p+10} - \frac{p-1}{12p-8}$

3. $\frac{a^2+b^2}{2ab} - \frac{a}{a+b} - \frac{b}{a-b} + \frac{b^4-a^4+4a^3b}{2(a^3b-ab^3)}$

4. $\frac{x+y}{y} - \frac{x-y}{x} - \frac{4xy}{x^2+y^2}$

5. $\frac{3a-2b}{a^2-2ab+b^2} - \frac{2a+3b}{a^2-b^2}$

6. $\frac{7}{3k} - \frac{5}{k-3} + \frac{3}{k+1} + \frac{1}{k+5}$

7. $\frac{5a-6b}{4a+4b} - \frac{2a-b}{3a-3b} - \frac{a^2-37ab+28b^2}{12a^2-12b^2}$

8. $\frac{2r}{rs-s^2} - \frac{2s}{r^2-rs} + \frac{r+s}{2rs}$

9. $\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1} - \frac{2}{z^2-1} - 1$

10. $\frac{1}{p^2-p} - \frac{p^2}{p+1} + \frac{1}{p} - \frac{2}{p^2-1} + p - 2$

11. $\frac{m-3}{m+4} - \frac{m^2-9m-3}{m^2+m-12} + \frac{m-5}{m-3}$

12. $\frac{a}{a-b} - \frac{b^2}{a^2+ab+b^2} - \frac{a^2b}{a^3-b^3}$

Това е един откъс от учебник за 8. клас.

Задачи от такъв тип със сигурност имат смисъл, когато главната цел в часовете по алгебра е постигането на рутина. Но действително няма смисъл неотклонно да искаме от учениците да се придържат към предварително определени методи или да решават дадени уравнения само с пресмятанията, които току-що са научили в клас.

Международни изследвания като TIMSS или PISA показват, ако не друго, че преподаване на математика, в което ударението е поставено върху методите за изчисления, няма дългосрочен ефект. То, разбира се, тренира учениците да използват въпросните методи и те наистина развиват усещане за метода за пресмятане, който се очаква да използват за определен тип задачи. Но такива повърхностни умения нямат реален смисъл и не са от полза, когато учениците се сблъскват с непознати за тях задачи.

Дори и да работят върху рутинни задачи, учителите трябва да придават смисъл на основните математически умения и да окуражават креативността и въображението на учениците. Как обаче може да се постигне това? Отговорът отново се крие в отворения подход, т.е. в предоставяне на учениците на възможности да променят задачите или да измислят свои такива. Ето няколко примера от главата „Пресмятане с числа и изрази: решаване на уравнения.“

Стандартни задачи	Задачи с отворен край
Пресметнете $3^5, 6^3, 2^7, 12^2$	Пресметнете няколко степени по ваш избор. Пресметнете степените с трицифрен отговор.
Пресметнете 12×17	Намерете произведения, чиято стойност е близка до 200.
Пресметнете $24 \times [(9 + 8) : 2]$	Вземете числата 24, 9, 8. Съставете с тях 5 различни числови изрази. Пак със същите числа съставете три числови изрази, чиято стойност е между 0 и 10. Съставете три изрази, чиято числена стойност е между 100 и 110. Съставете числови изрази, които съдържат квадратни скоби.
Решете уравнението $7x - 11 = 24$.	Съставете няколко уравнения с решение $x = 5$. Съставете показателни уравнения с решение $x = 5$. Съставете квадратни уравнения с решения 1 и 5. Опишете всички възможни квадратни уравнения. Съставете текстова задача, съответстваща на уравнението $7x - 11 = 24$.

Решете системата уравнения: (I) $4x - y = 1$ (II) $x + 2y = 7$	Съставете различни системи уравнения, които се решават веднага посредством стандартните методи на събиране или заместване (и чието решение е наредената двойка (1; 3)). (по Henn 1999, с. 10)
Един заек изяжда 2 кг 500 г сено за 10 дни. Колко е неговата средна дневна консумация?	Съставете текстова задача, която съдържа данните 2 кг, 500 г и 10 дни. След това я решете. (по LEU Stuttgart 2001, с. 75)

Това, което се вижда от горната таблица, е че формулировките както в лявата, така и в дясната ѝ колона нямат сами по себе си особен смисъл. Ако целта ни е да въведем учениците в някоя нова област, тогава, разбира се, първоначално могат да бъдат използвани прости задания за техника на пресмятанията.

Би било срамно обаче да подценяваме учениците само с тренировъчни фази, съставени единствено от постепенно усложняващи се изрази. Опитът от преподаването и от задължителните тестове показва, че придобитите по такъв начин умения са твърде краткотрайни.

Създаването на отворени задачи изисква учителите да възприемат математиката от различна гледна точка. Този тип формулировка стимулира подходи, основани на креативността и въображението. Те карат учителите да си задават въпроса как авторът на учебника е достигнал до представените там задачи.

Математически приказки

Учениците често казват, че се справят трудно с текстовите задачи. Някои от тях дори се ужасяват от тях. Това състояние може съществено да се подобри, ако ученикът съставя сам текстови задачи, давайки по този начин възможност и на останалите да се отърсят донякъде от своя страх. За целта учениците трябва да могат успешно да вмъкват данни в текст, придавайки му разбираема форма. Следващите задачи по никакъв начин не могат да се нарекат нови. Подобни на тях могат да се намерят в много учебници по математика. Новото в тях е, че те са написани под формата на математически разкази от учениците на един 8. клас в рамките на проекта SINUS.

Бекстрийт бойс

През 1998 г. общата възраст на певците от групата Бекстрийт бойс е била 107 години. Кевин е бил с една година по-голям, както от Брайън, така и от Хауи. Ник е бил с шест, а Ей Джей – с пет години по-малък от Кевин. На колко години е бил всеки от тях тогава?

Разсеяният Макс

Макс иска да разбере колко струва химикалката, която е купил заедно с други неща в книжарницата. Спомня си, че химикалката е струвала на половината от цената на писалката, а писалката е била с 2 € по-скъпа от химикалката. Макс си спомня още, че на етикетите на химикалката и тетрадката са били написани еднакви цени. Химикалката, книгата и папката са стрували общо 20 €. Книгата е била с 4 € по-скъпа от тетрадката, а цената на папката е била 4 €.

Дядо Коледа

По празниците Дядо Коледа е много ангажиран, затова си има помощник. Дядо Коледа **А** е във Финландия и иска да се върне на Северния полюс. В 7 ч вечерта той се отправя на своето 1150 километрово пътуване. Скоростта му е 25 км/ч. Дядо Коледа **В** е на Северния полюс и трябва да поеме бизнеса във Финландия. Затова в 7 ч. вечерта той също тръгва на път, като се придвижва със скорост 35 км/ч. Кога ще се срещнат двамата?

Ето какво споделя един преподавател, участвал в проекта SINUS, за своя опит с такива примери (Университета Касел, Германия, 2003):

„Предоставянето на учениците на възможност да измислят свои задачи повдига въпроса как да бъдем сигурни, че сме постигнали искания резултат. Един метод, който се оказва много полезен, е следният: Всеки ученик написва на отделно картонче своите задачи и името си, а на друго картонче – решението (добре е картончетата да са в различни цветове и да се номерират). Учителят копира картончетата (разполагайки ги по 4 на хартия letter формат) и ги подвързва в папка. Учениците могат да избират кои задачи да решават, както и да поискат решението от автора на задачата. Могат да видят решението и в папката. По своя преценка учителят може да направи папка-азбучник със задачите (плюс втора папка с решенията), така че учениците да работят независимо един от друг.“

Създайте метод, с който да привлечете учениците си да измислят задачи за часовете по математика.

Постскрипtum: Математическата грамотност

Дотук обсъждахме от различни ъгли преподаването и изучаването на математика. Нека сега се замислим над следното: Къде искаме да ни отведе преподаването на математика? Какви са дългосрочните цели, които искаме да постигнем заедно с учениците си? Тези основополагащи въпроси не бива никога да изпускаме от поглед, каквито и усилия да полагаме от наша страна. Целите, определени от тях, могат и трябва да управляват това, което правим.

Когато разглеждаме темите от PISA, ще забележим, че тестовите въпроси в тях не съответстват на традиционното преподаване. Затова нека използваме материалите на PISA, за да се вземем още веднъж във въпроса къде искаме да стигнем. В крайна сметка, съставянето на тест за оценяване трябва да бъде подплатено с концепции, обвързани с целите в преподаването на математика.

Тестовите за оценяване PISA са основани на фундаменталната концепция за математическата грамотност. Това включва няколко компетентности:

- ▶ разбиране и основни умения,
- ▶ гъвкавост в прилагането на математическите концепции и обличане на идеите в математическо съдържание (моделиране),
- ▶ оценка на същността на явленията с математически средства,
- ▶ математическа комуникация,
- ▶ разпознаване на ролята на математиката в заобикалящия ни свят.

Така поставените цели звучат привлекателно. Вероятно ще се съгласите, че образованието в училище трябва да развие подобни умения у децата. Така че въпросът е: Как преподаването на математиката в училище може да изгради широкообхватна математическа грамотност на нашите деца? Отговорът е прост: По начина, който описахме и обсъдихме в настоящата глава!

- ▶ Повечето обучаващи ситуации, които разгледахме тук, изискват от учениците да проявяват разбиране и гъвкавост в прилагането на математическите концепции, както в училище, така и извън него. Целта на такъв широк обхват от съдържателни задачи е постигането на адаптивно мислене и разбиране на математиката по същество.
- ▶ Общото обучение по математика регулярно приканва учениците да оценяват нещата от гледна точка на математиката. Както видяхме, статии или диаграми от вестниците могат да се окажат подходящи за подобни упражнения.
- ▶ Естествено, една от по-широките цели на обучението е да се развият уменията на децата за комуникация и работа в екип. Вече разгледахме различни начини да извършваме това систематически, докато преподаваме математика. Принципът „Аз-Ти-Ние“ и моделът на часовете по математика в Япония насочват към комуникацията и кооперирането на учениците като съществени фази в процеса на усвояване на материала. Същото важи и за представянето на резултатите и дискусиите в клас.
- ▶ Задачите с отворен край, които обсъждахме, изискват от учениците да свързват своите познания и жизнен опит с наученото по математика. От учениците се иска да правят оценки, да формулират хипотези, да трансформират реални житейски ситуации в математически структури (моделиране), да работят с дан-

ни от реалния живот или да дискутират определена тема с езика на математиката. Целта е учениците да се убедят, че математиката в училище и извън училище не принадлежи на два различни свята, а е една и съща. В крайна сметка, математиката е само едно средство за изучаване и разбиране на света – прозрение, което се подкрепя и от проектно-базирания подход за обучение.

Идеята за математическата грамотност може да бъде полезна и за да се обясни на родителите защо проблемите по математика, с които се сблъскват децата им, се различават от онези, които те самите са изпитвали по време на ученическите си години. На родителите търпеливо и ясно трябва да се каже, че това, което има значение, е не заучаването, а прилагането на математическите правила. Крайната цел на обучението е именно математическата грамотност на децата във вида, в който току-що я дефинирахме. Тогава едва ли ще се намери родител, който би възразил на настъпващите промени в задачите и изискванията. Опитът с проекта SINUS показва, че разногласията в тази насока са незначителни.

Резюме

Математическата грамотност може да служи за водеща визия в преподаването на математиката. Същественият въпрос тук е да ви покажем как да постигнете тази цел чрез ефективни, систематични и непрекъснати промени в обичайните урочни ситуации, както и да ви окуражим да поемете по този нов път заедно с останалите свои колеги-математици.

Литература

- ▶ Baptist, P.: Elemente einer neuen Aufgabenkultur, Bayreuth 1998, <http://sinus-transfer.de> (Materialien).
- ▶ Baptist, P. (Hrsg.): Mathematikunterricht im Wandel, Buchners Verlag, Bamberg 2000.
- ▶ Baptist, P.: Towards new Teaching in Mathematics, Conclusions from the SINUS and SINUS-Transfer Pilot Studies, SINUS international, Part I, Bayreuth 2011
- ▶ Baptist, P., Raab, D.: Auf dem Weg zu einem veränderten Mathematikunterricht, Bayreuth 2007, <http://sinus-transfer.de> (Materialien).
- ▶ Baptist, P., Ulm, V.: Mathematikunterricht verändern – Verständnis fördern, in: Praxis Schule 5 – 10, Heft 4/02, Westermann Verlag, Braunschweig 2002, S. 6 – 9.
- ▶ Baptist, P., Ulm, V.: Stufen mathematischer Kompetenz nach PISA, <http://sinus-transfer.de> (Materialien).
- ▶ Blum, W., Wiegand, B.: Offene Aufgaben – wie und wozu?, in: Mathematik lehren, Heft 100, Friedrich Verlag, Seelze 2000.
- ▶ Deutsches PISA-Konsortium (Hrsg.): PISA 2000, Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich, Leske + Budrich, Opladen 2001.
- ▶ Flade, L., Herget, W.: Mathematik lehren und lernen nach TIMSS, Volk und Wissen Verlag, Berlin 2000.
- ▶ Frey, K.: Die Projektmethode, Beltz Verlag, Weinheim 2002.
- ▶ Gallin, P., Ruf, U.: Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik, Band 1 und 2, Kallmeyer, Seelze 1998 (a).
- ▶ Gallin, P., Ruf, U.: Sprache und Mathematik in der Schule, Kallmeyer, Seelze 1998 (b).
- ▶ Henn, H.-W. (Hrsg.): Mathematikunterricht im Aufbruch, Schroedel Verlag, Hannover 1999.
- ▶ Herget, W. (Hrsg.): Aufgaben öffnen, Mathematik lehren, Heft 100, Friedrich Verlag, Seelze 2000.
- ▶ Herget, W., Jahnke, T., Kroll, W.: Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe, Cornelsen Verlag, Berlin 2001.
- ▶ Herget, W., Scholz, D.: Die etwas andere Aufgabe aus der Zeitung, Kallmeyer, Seelze 1998.
- ▶ Landesinstitut für Erziehung und Unterricht Stuttgart (Hrsg.): Weiterentwicklung der Unterrichtskultur im Fach Mathematik, Begleitlektüre zur Fortbildung (Gymnasium), Stuttgart 2000.
- ▶ Landesinstitut für Erziehung und Unterricht Stuttgart (Hrsg.): Weiterentwicklung der Unterrichtskultur im Fach Mathematik, Anregungen für neue Wege im 5. Schuljahr, Stuttgart 2001.
- ▶ Müller, G., Steinbring, H., Wittmann, E. (Hrsg.): Arithmetik als Prozess, Kallmeyer, 2004.
- ▶ OECD (Hrsg.): PISA 2000, Beispielaufgaben aus dem Mathematiktest, <http://www.mpib-berlin.mpg.de/pisa/beispielaufgaben.html>.
- ▶ Schupp, H.: Aufgabenvariation im Mathematikunterricht, Saarbrücken 1999, <http://sinus-transfer.de> (Materialien).
- ▶ Schupp, H.: Thema mit Variationen, Aufgabenvariation im Mathematikunterricht, Franzbecker Verlag, Hildesheim 2002.
- ▶ Spiegel, H., Selter, C.: Kinder & Mathematik, Was Erwachsene wissen sollten, Kallmeyer, Seelze 2003
- ▶ Spitzer, M.: Lernen, Gehirnforschung und die Schule des Lebens, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin 2003.

- ▶ Ulm, V. (Hrsg.): Mathematische Begabungen fördern, Cornelsen Verlag, Berlin 2010
- ▶ Ulm, V.: Forschendes Lernen im Mathematikunterricht, in: Messner, R. (Hrsg.): Schule forscht, edition Körber-Stiftung, Hamburg 2009.
- ▶ Ulm, V.: Mathematikunterricht für individuelle Lernwege öffnen, Sekundarstufe, Kallmeyer, Seelze 2007
- ▶ Ulm, V.: Mathematikunterricht mit „EVA“, in: Praxis Schule 5 – 10, Heft 4/02, Westermann Verlag, Braunschweig 2002, S. 12 – 20.
- ▶ Universität Kassel FB 17: Materialien zum BLK-Modellversuch SINUS, Vorschläge und Anregungen zu einer veränderten Aufgabenkultur, CD, Kassel 2003.
- ▶ Winter, H.: Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht, Vieweg Verlag, Braunschweig 1989.
- ▶ Wurz, L.: Unterrichtspraktische Überlegungen zu einer geometrischen Figur, in: Mathematik in der Schule 36, 1998.

WWW адреси:

- ▶ “SINUS Transfer”: <http://sinus-transfer.eu>

Послепис към българския превод

Като едни от първите български читатели на материалите от проекта SINUS, разработен в Германия, тук искаме да споделим някои от мислите, които те породиха у нас.

Идеите на проекта SINUS бяха отправна точка за осъществяването на един следващ проект – *Fibonacci* (<http://www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/>), в рамките на който се реализира преводът и отпечатването на тази книга. Координатор на *Fibonacci* от българска страна е акад. Петър Кендеров, а целта на проекта – да се разпространи ученето и преподаването на математиката в изследователски стил.

За начинаещите, както и за опитните педагози, запознаването с настоящата книга може да се окаже поредното предизвикателство в ежедневието, изпълнено с ученици, родители, колеги, административно ръководство, учебно съдържание, учебни часове, учебници и много още.

Но то е и едно изкушение, предлагащо им да направят математиката за своите ученици жива и разкрепостена, такава, каквато я виждат самите те, с една дума – уникална. Математика, която не заобикаля проблемите на живота, а ги вкарва в клас.

Дали това ще помогне за тяхното решаване? Дали ще подобри резултатите от учебния процес? Може би не в този час и не в следващия, и дори не в училище. Но самото поставяне на въпроси от учениците е вече път, различен от заграждането с кръгче на единствен верен отговор. И част от живота.

Йорданка Горчева, Евгения Сендова
членове на българския екип *Fibonacci*

SINUS international

Редактори

Петер Баптист, Карстен Милер, Дагмар Рааб
Катедра по математика и математическо образование
Университет в Байройт

Редактор на българското издание

Евгения Сендова

Автор

Петер Баптист
Катедра по математика и математическо образование
Университет в Байройт

Издател на английската версия

Катедра по математика и математическо образование
Университет в Байройт
95440 Байройт

Превод от английски език

Теодора Давидова
Йорданка Горчева

Коректор

Ани Търсанкова

Предпечатна подготовка

Виктория Наумова, Красимира Иванова

Съдържанието на книгата не отразява непременно възгледите на Европейската комисия и не включва каквато и да е отговорност от нейна страна.

Графично оформление на оригинала (съхранено в рамките на възможното и тук)

Медийна агенция GAUBE, Байройт
Карстен Мюлер, Университет в Байройт

Издателство „Регалия 6“

ISBN 978-954-745-225-1

Разпространява се безплатно.