ИЗСЛЕДОВАТЕЛСКИЯТ ПОДХОД: НАЧИН НА МИСЛЕНЕ И НА ЖИВОТ

КИРИЛ БАНКОВ

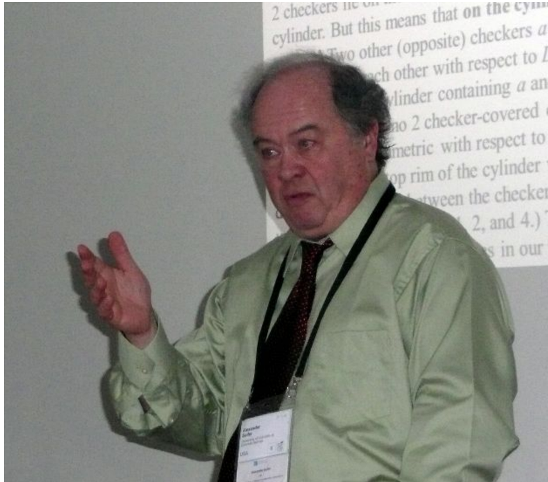
НСО, София, 3 декември 2016

ICME-13

- 13 международен конгрес по математическо образование (ICME-13), Хамбург, 24-31 юли 2016
- Тематична група 30: Математически състезания
- Проф. Александер Сойфер: „Целите на обучението по математика“

Проф. Александер Сойфер

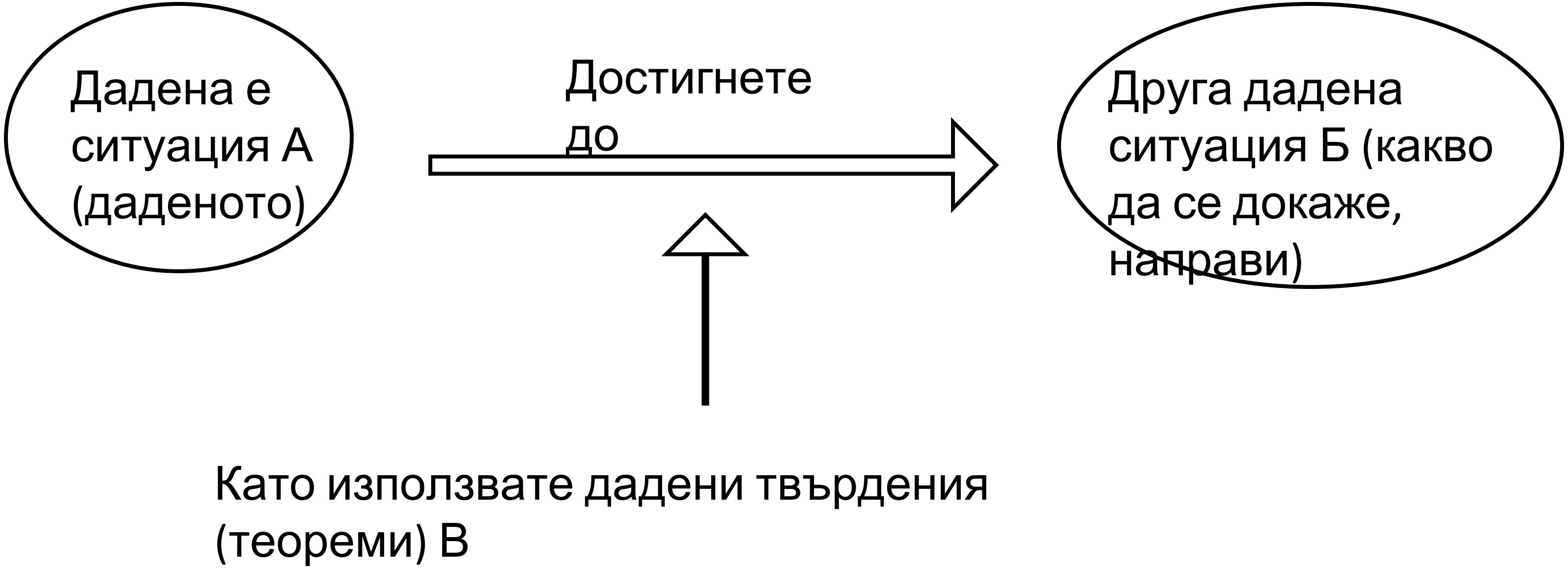
Струва ми се, че целта на живота е всеки да открие и да изяви себе си и по този начин да допринесе за развитието на културата на нашата планета. Ето защо висша цел на обучението е да се помогне на учениците в стремежа им за себепознание и изявяване.



Защо да изследваме

- Всеки ден ние се сблъскваме със стотици задачи
- Животът е решаване на задачи, а грешките в решенията им понякога могат да струват скъпо
- Тук е ролята на математиката, която ни учи да изследваме и творчески да решаваме задачите

Какво правим в клас



Какво прави математикът

- Знаем дадената ситуация А
- Никой не ни казва до какви изводи да достигнем. Тях ги откриваме чрез изследване на ситуацията А
- Не се знае предварително какво да използваме, тъй като така и не знаем до къде трябва да стигнем

Изследователският подход

- Учениците развиват интуиция, така че да могат да направят достоверно предположение за ситуацията (ситуациите) Б
- Намират онези средства В, които са им необходими, за да достигнат до ситуацията Б
- Учениците имат възможност да разберат

Ролята на учителя

- Да представи на учениците изследователски идеи и методи, които да покажат как „работи“ истинската математика
- Това – в контекста на „училищната“ математика

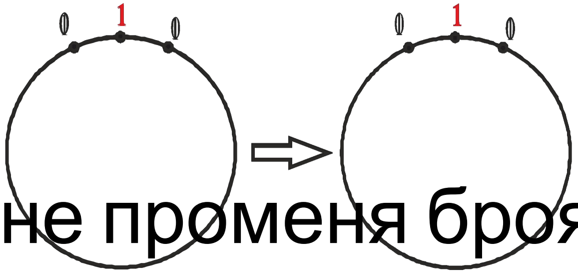
- Примери от математически състезания

Ситуация 1

Нека $n > 2$ клетки са наредени по окръжност. Във всяка от тях може да има или 0, или 1. Допустима е следната операция: избираме клетка C, в която има 1, и сменяме записа в двете съседни на нея клетки (така че x, y стават $1 - x$, $1 - y$).

Свойство 1

Операцията на променя четността на броя единици



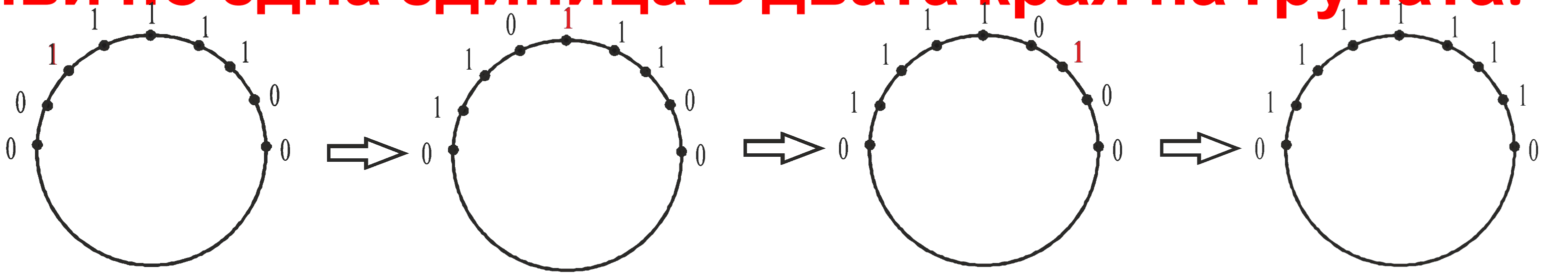
Операцията или не променя броя на единиците (ако в двете съседни клетки на *C* стоят различни числа – 0 и 1), или го променя с 2 (с 2 повече единици, ако в двете съседни клетки на *C* има 0, или с 2 по-малко единици, ако в тях има 1)

Свойство 2

Да предположим, че в четен брой (например 2*k*) клетки имаме единици, а във всички останали – 0. Ако изпълним последователно операцията върху единиците с номера 1, 3,…, (2*k*-1) по часовниковата стрелка, броят на единиците няма да се промени, а групата единици ще се придвижи с една клетка обратно на посоката на часовниковата стрелка.

Свойство 3

Да предположим, че в нечетен брой (например 2*k*+1) клетки имаме единици, а във всички останали – 0. Ако изпълним последователно операцията върху единиците с номера 1, 3,…, (2*k*+1) по часовниковата стрелка, броят на единиците ще се увеличи с 2, като се появи по една единица в двата края на групата.



Нека $n = 20$

- Първоначално е написано 1 в една от клетките и 0 във всички останали. Възможно ли е с краен брой такива операции да се получи 1 във всички клетки? (Състезание „Акад. Кирил Попов“ 2016)
- Не. Съгласно свойство 1, броят на единиците ще бъде винаги нечетен и няма как да стане 20.

Нека $n = 20$

- Първоначално е написано 1 в две съседни клетките и 0 във всички останали. Възможно ли е с краен брой такива операции да се получи 1 във всички клетки? (Състезание „Акад. Кирил Попов“ 2016)
- Не. Съгласно свойство 2, броят на единиците ще бъде винаги равен на 2.

Нека $n = 20$

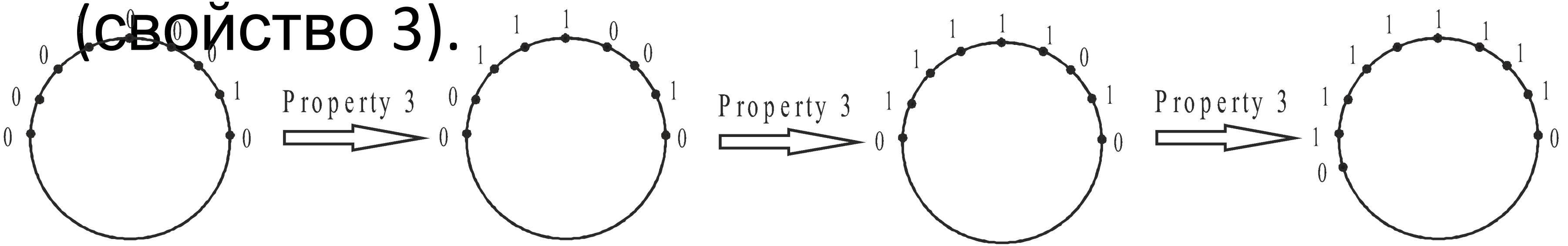
- Първоначално е написано 1 в две клетки, между които има една 0, и 0 във всички останали. Възможно ли е с краен брой такива операции да се получи 1 във всички клетки? (Състезание „Акад. Кирил Попов“ 2016)
- Не. След първото изпълнение на операцията ще получим четири

Нека $n = 20$

- Може ли е да се изберат две клетки по такъв начин, че ако първоначално в тях е написано 1 и 0 във всички останали, да е възможно с краен брой такива операции да се получи 1 във всички клетки? (Състезание „Акад. Кирил Попов“ 2016)

Упътване

Нека първоначално е записано 1 в две несъседни клетки и 0 във всички останали. Започваме да изпълняваме операцията от едната единица и продължаваме, докато втората единица „се присъедини“ към групата (свойство 3).



Упътване (продължение)

- Получихме четен брой последователни единици. Съгласно свойство 2, броят им повече няма да се промени.
- За да нямаме 0 между тях, би трябвало първоначалните единици да са диаметрално противолжни.

Нека $n = 21$

- Първоначално е написано 1 в една от клетките и 0 във всички останали. Възможно ли е с краен брой такива операции да се получи 1 във всички клетки? (Състезание „Акад. Кирил Попов“ 2016)
- Да. Прилагаме многократно свойство 3.

Общ случай

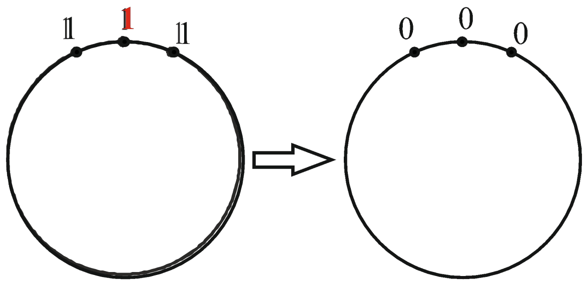
- Първоначално е написано 1 в една от клетките и 0 във всички останали. Намерете всички стойности на *n*, за които е възможно с краен брой такива операции да се получи 1 във всички клетки?
- Отговор: Всички нечетни естествени числа.

Ситуация 2

Нека $n > 2$ клетки са наредени по окръжност. Във всяка от тях може да има или 0, или 1. Допустима е следната операция: избираме клетка C, в която има 1, **сменяме записа в нея на 0** и сменяме записа в двете съседни на нея клетки (така че x, y стават $1 - x$, $1 - y$).

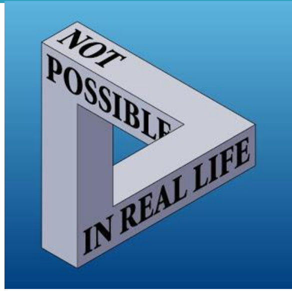
Свойство 1

Всеки три последователни единици могат да се преобразуват в три последователни нули.



Свойство 2

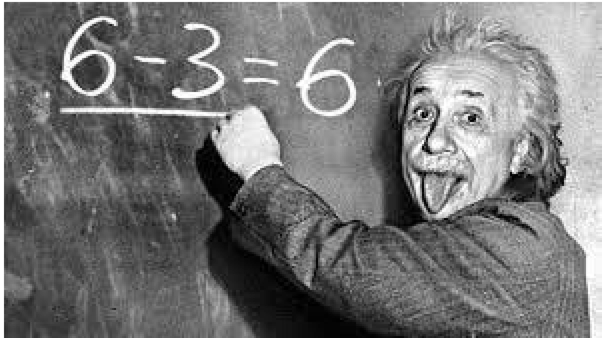
- **Не е възможно да се получат единици във всички клетки**
- Това е така, защото всяка операция се изпълнява в клетка, която съдържа 1, а тази единица се преобразува в 0.



Задача 1

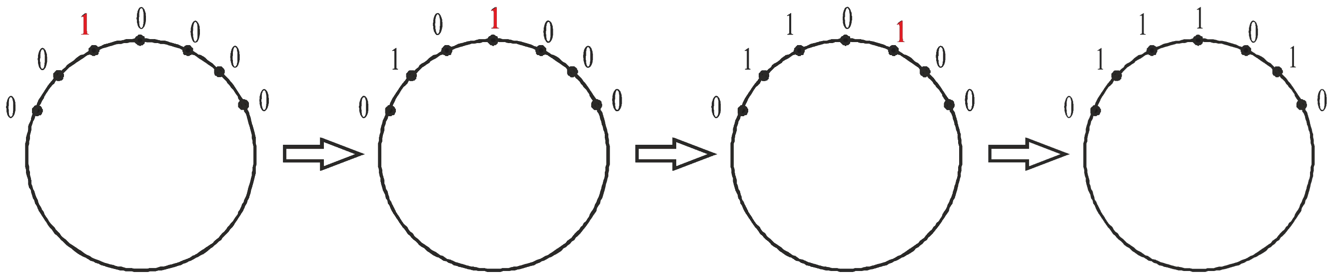
Първоначално е написано 1 в една от клетките и 0 във всички останали. Намерете всички стойности на *n*, за които е възможно с краен брой такива операции да се получи 0 във всички клетки?

(Австрийско-Полско състезание,



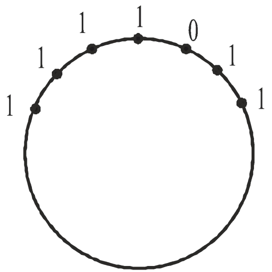
Наблюдение

Последователното изпълнение на операцията по посока на часовниковата стрелка дава следното: група от последователни единици, чийто брой се увеличава с 1, след това 0 и 1 и после група от последователни нули, чийто брой намалява с 1.



Нека $n = 3k + 1$

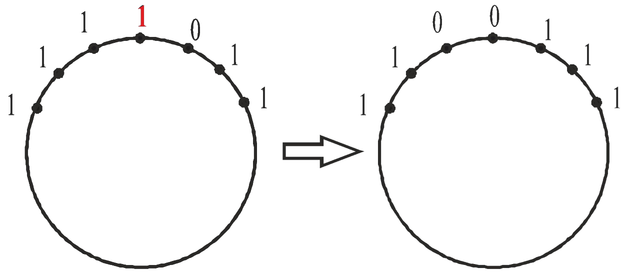
Съгласно казаното в предния слайд, може да получим такава наредба:



Имаме $3k$ единици и една 0. От свойство 1 – всички единици могат да се трансформират в нули.

Нека $n = 3k + 2$

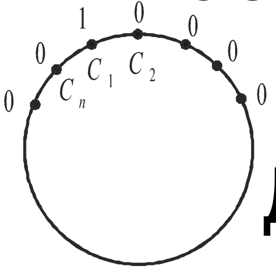
Последователното изпълняване на операцията дава следната наредба:



Имаме $3k$ единици и две 0. От свойство 1 – всички единици могат да се трансформират в нули

Нека $n = 3k$

Наблюдението подсказва, че не е възможно



Да означим с s_i броят на операциите, които са изпълнени в клетката C_i и с a_i броят на промените в C_i (т.е. когато операцията е извършена в C_i или в някоя от съседните клетки C_{i-1} или C_{i+1}).

$a_i = s_{i-1} + s_i + s_{i+1}$

Случая $n = 3k$ (продължение)

- Ако в получим нули във всички клетки, то a_1 е нечетно число и всички останали a_i са четни
- Числото $a_1+a_4+a_7+\ldots+a_{n-2}$ е **нечетни** и е равно на броя ***S*** на всички извършени операции
- Числото $a_2+a_5+a_8+\ldots+a_{n-1}$ е **четно** и също е равно на броя ***S*** на всички извършени операции

Задача 2

- Променяме първоначалната наредба
- **Първоначално във всички клетки е написано 1. Намерете всички стойности на n, за които е възможно с краен брой такива операции да се получи 0 във всички клетки?**
- Отговор: всички естествени числа по-големи от 2.

Случая $n = 3k$

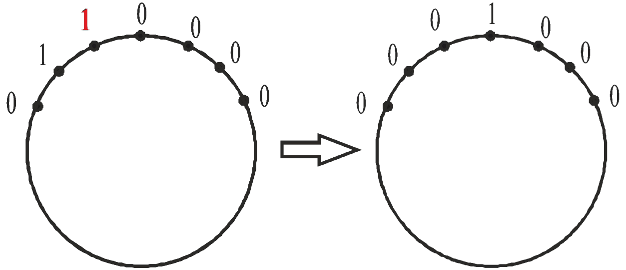
Прилагаме свойство 1

Случая $n = 3k + 1$

- Групираме единиците по тройки. След прилагане на свойство 1, получаваме единица в една от клетките и 0 във всички останали
- Прилагаме случая $n = 3k + 1$ от предишната задача

Случая $n = 3k + 2$

- Групираме единиците по тройки. След прилагане на свойство 1, получаваме единица в две съседни клетките и 0 във всички останали
- На следващата стъпка получаваме една единица и 0 във всички останали клетки



- Прилагаме случая $n = 3k + 2$ от предишната задача

БЛАГОДАРЯ!

НСО, София, 3 декември 2016