Национален семинар по образование
“Изследователският подход в математическото образование”

МАТЕМАТИЧЕСКИ КАЛЕЙДОСКОП

Таня Манолова
ПГ по туризъм “Александър Паскалев“
гр. Хасково

2 декември 2017г.

Математическа индукция

Проектна дейност на ученици от 11 клас

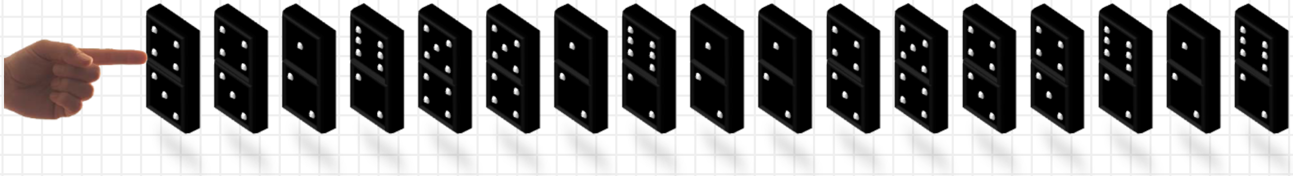
Кръжок по математика

2017г.

Целта на проекта бе да се запознаят учениците с принципа на математическата индукция и приложението му в решаване на различни задачи. Разгледани бяха задачи за доказване на тъждества и неравенства, а също и приложението на математическата индукция в геометрията. Учениците сами решаваха занимателни задачи и задачи за игри. Убедиха се в широкото приложение на този метод в теория на графите и алгоритмите, по които компютърът се състезава с човека.

Ролята на изследователи, която им бе възложена, ги ангажира и мотивира за активен образователен процес.

ЕФЕКТА НА ДОМИНОТО И МАТЕМАТИЧЕСКАТА ИНДУКЦИЯ



I. Нека падне първата плочка!

II. Предполагаме, че ще падне
една от следващите плочки.

III. Тя ще бутне стоящата след нея плочка.

IV. Заключението е, че ще паднат
всички плочки на доминото
и този факт е безспорен.

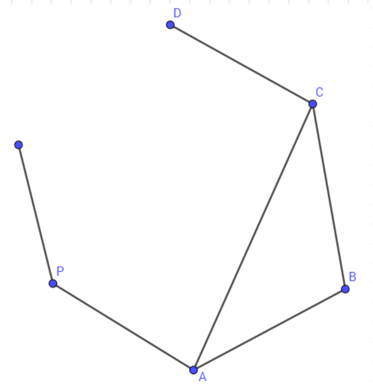
Решаване на геометрични задачи чрез метода на математическата индукция– предизвикателство, отправено към един от екипите

Задача: Да се докаже, че във всеки изпъкнал n–ъгълник броят на всички диагонали е $S_n = \frac{n(n-3)}{2}$.

Разгледайте: https://ggbm.at/JM5NWu7b

Решение:

I. При $n=3$ $S=0$ и твърдението е вярно. (Можем да проверим още, че при $n=4$ $S_4=2$ и твърдението също е вярно, но от логична гледна точка това не се налага, тъй като многоъгълникът с най-малък брой страни е триъгълникът и следва, че всяко твърдение за многоъгълник се отнася и за триъгълника).



II. Нека твърдението е вярно при $n=k>3$, т. е. k-ъгълникът има всичко $S_k = \frac{k(k-3)}{2}$ диагонала.

III. Ще до-кажем, че всеки (k + 1)-ъгълник има $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$ диагонала.

Да разгледаме произволен (k + 1) - ъгълник *ABCD* . . . P.

Ако начертаем например диагонала му *AC*,

то многоъгълникът се разделя на един k-ъгълник (*ACD* ... P)

и триъгълник *ABC*. По предположение ACD...P има $S_k = \frac{к(к-3)}{2}$ диагонала.

Но даденият многоъгълник има освен диагоналите на ACD …P още един диагонал *AC* и (k + 1)-3 диагонала през върха му B.

Следователно :

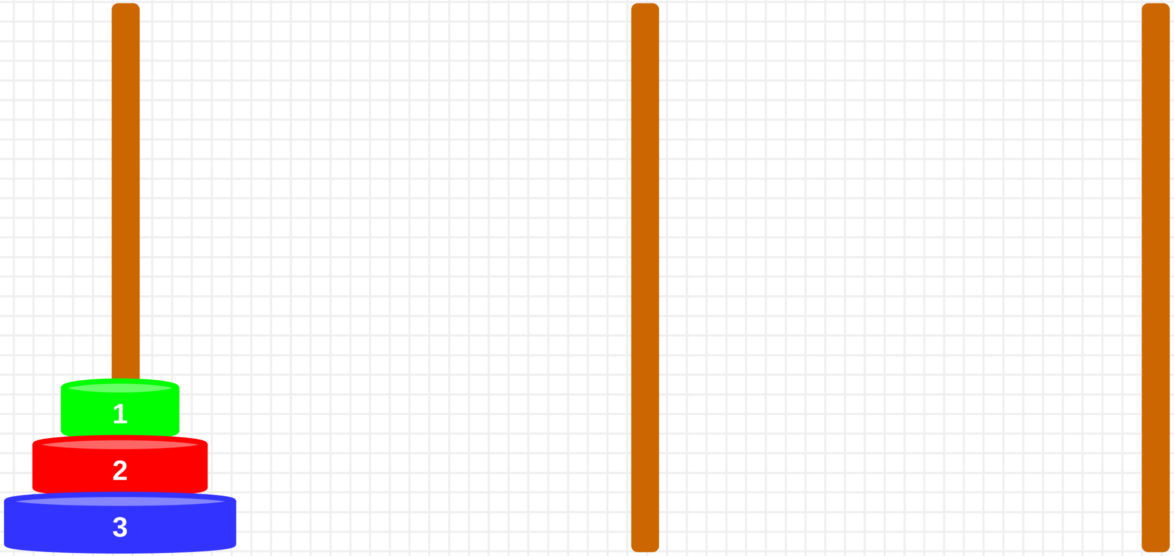
$$S_{k+1}=S_k+1+k-2=\frac{k(k-3)}{2}+k-1=\frac{k^2-k-2}{2}=\frac{k^2+k-2k-2}{2}=\frac{k\quad(k+1)-2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k-2)}{2}$$

IV. От I, II и III, принципа на математическата индукция следва, че твърдението е вярно за произволен многоъгълник.

Занимателна задача, решена с метода на математическа индукция, представена ни от втори екип

Задача: Това е известната на всички деца игра „Ханойски кули“. Тя представлява три стълба. На единия има пирамида от няколко диска с различен диаметър, който намаля отдолу нагоре. Тази пирамида трябва да се премести на другия стълб, като се спазват следните правила: не може да се пренасят наведнъж няколко диска и не може да се слага по-голям диск върху по-малък.

Ханойски кули



Задачата е да докажем, че е възможно да се премести пирамида от n диска на другия прът. За целите на доказателството приемаме, че всички дискове са на първи стълб.

Решение:

I.Нека пирамидата има три диска. Временно поставяме диска с най- малък диаметър на втори стълб. Втория диск поставяме на трети стълб и местим над втори диск първия. След това местим трети диск на втори стълб, първия слагаме на първи стълб, втори поставяме над трети диск и първия над втори.

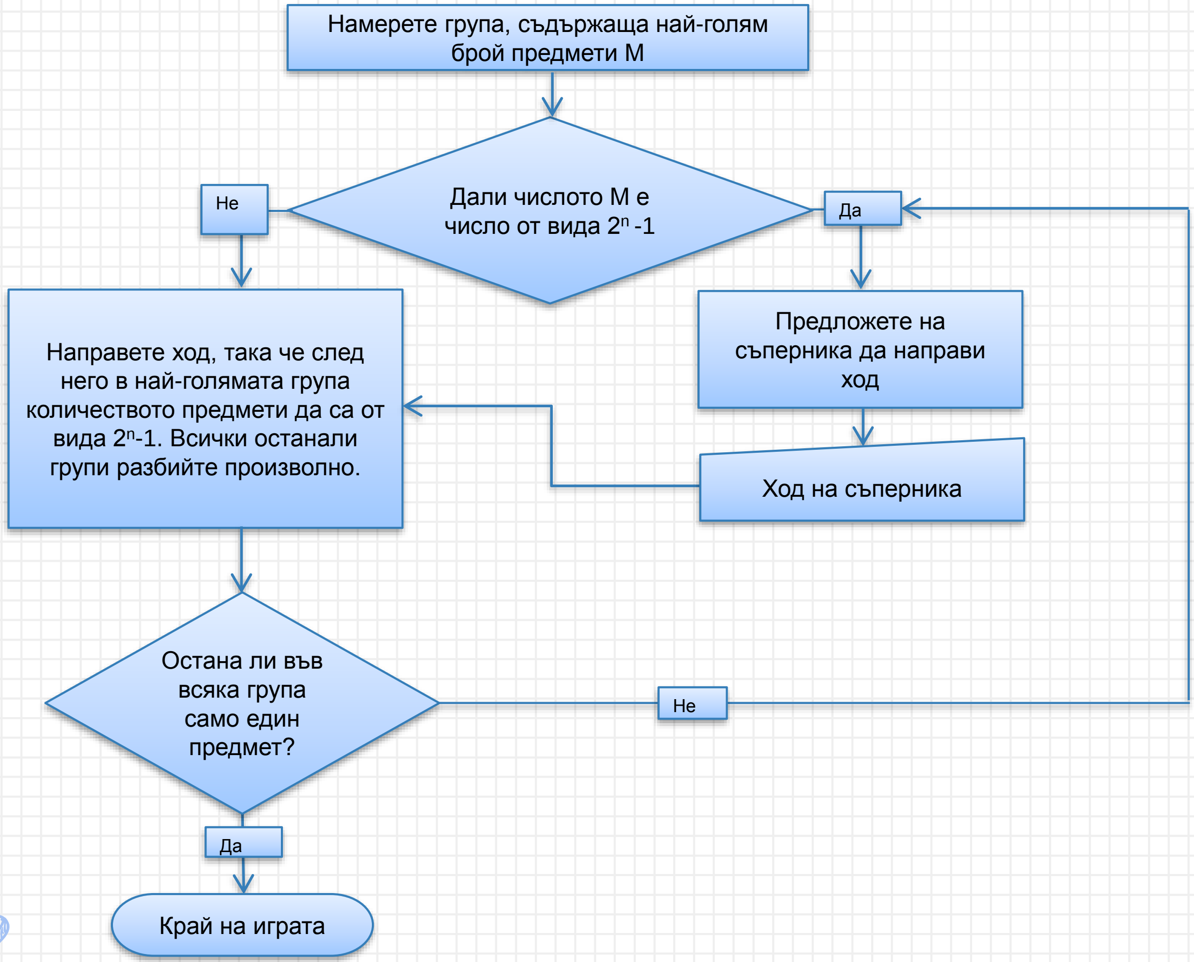
II.Допускаме, че сме успели да преместим k ($4 \leq k \leq n$ и $k \in N$) диска върху някой от другите стълб. (В началото всички дискове са на първия стълб)

III. Ще докажем, че можем да преместим и k+1-вия диск. K-тия диск местим на свободния стълб. След това първи диск местим върху k-тия. Втори местим на средния стълб. Първия диск връщаме над втори прът, третия диск слагаме над k-тия, първия диск се мести на стълба, на който бяха подредени k дискове, вторият диск над третия, първия над втория. И така докато достигнем до k+1-вия диск.

IV. От I, II и III, съгласно принципа на математическата индукция следва, че всички n диска могат да бъдат преместени от един стълб на друг в изисканата подредба.

Алгоритми и игри– предизвикателство за третия екип

<u>Задача:</u> Преди началото на играта има K-групи предмети. Първата група съдържа m_1 предмета, втората-m_2 предмета, третата- m_3 предмета, ...k-тата група m_k предмета. Играят двама. Всеки от тях, когато е на ход, раздробява всяка група, състояща се от повече от един предмет, на две по-малки групи. Ходовете продължават дотогава, докато във всяка група не остане по един предмет. Победител е онзи, който успее да изпълни последното разбиване.



Намерете група, съдържаща най-голям брой предмети М
Дали числото М е число от вида 2^n -1
Не
Да
Направете ход, така че след него в най-голямата група количеството предмети да са от вида 2^n-1. Всички останали групи разбийте произволно.
Предложете на съперника да направи ход
Ход на съперника
Остана ли във всяка група само един предмет?
Не
Да
Край на играта

Основната идея се състои в това през цялото време съперникът да е поставен пред необходимостта да разбива групи, сред които най-голямата съдържа 2^n-1 предмета.

Хипотезата обаче все още е недоказана. Нейната вярност беше проверена само за три числа. От вида 2^n-1. Дали тя ще е в сила за такива числа като 31, 63, 255 или 1023, които също са от вида 2^n-1?

Доказателство:

I.Установихме, че хипотезата е вярна при n=2, 3, 4.

II.Да предположим, че хипотезата е вярна при n=k. Това означава, че ако голямата група съдържа m=$2^к$-1 предмета, започващия губи.

III.Ще докажем че при n=k+1, започващият губи и това ще бъде доказателство за истинността на хипотезата при n=k+1. Да изразим $n_{k+1}=2^{k+1}-1$ чрез n_k. Ще отбележим, че $2^k = n_k+1$

Тогава $n_{k+1}=2^{k+1}-1=2.2^k-1=2(n_k+1)-1=2n_k+1=n_k+n_k+1$

Оттук следва, че ако най-голямата група съдържа n_{k+1} предмета, започващия играта не може за един ход да направи разбиването на тази група на две, съдържащи по n_k предмета, или на две, от които едната съдържа $_k$, а другата – по-малък брой предмети.

С други думи, започващият играта не може да постави съперника пред необходимостта да разбие най- голямата група от (2^n-1) предмета, той няма да успее да вземе инициативата. Приведените разсъждения показаха, че от предположението за вярност на хипотезата при n=k следва верността и при n=k+1 и следователно принципа на математическата индукция при всяко естествено число n.

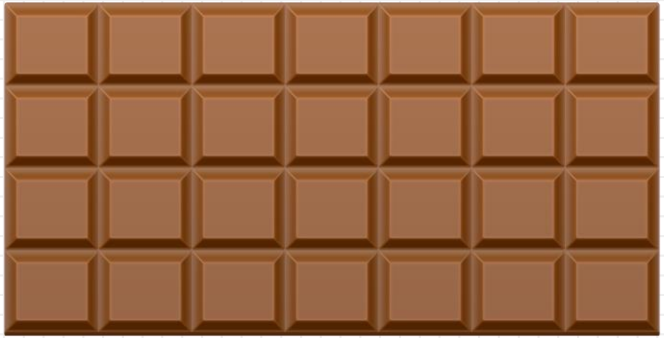
Чрез наблюдение на играта се намира печелившия алгоритъм

Помага индукцията

Убеждава математическата индукция

Всички се убедиха, че с метода на математическата индукция се доказват закономерности и в ежедневието

Задача: Всички знаем как изглежда един вкусен шоколад. Множество квадратчета, разположени в правоъгълник. Колко разчупвания по линията между тях са необходими, за да го разделим на малки квадратчета?



Шегите на математическата индукция – винаги е приятно срещу себе си да виждаш усмихнати младежи

Опашка от вежливи чакащи

Добрите маниери забраняват един мъж да стои пред жена на опашка. Той трябва да ѝ отстъпи мястото си и да мине след нея. Следователно, ако първият човек в една опашка е мъж, то и останалите от опашката са мъже.

Разтегателен автобус

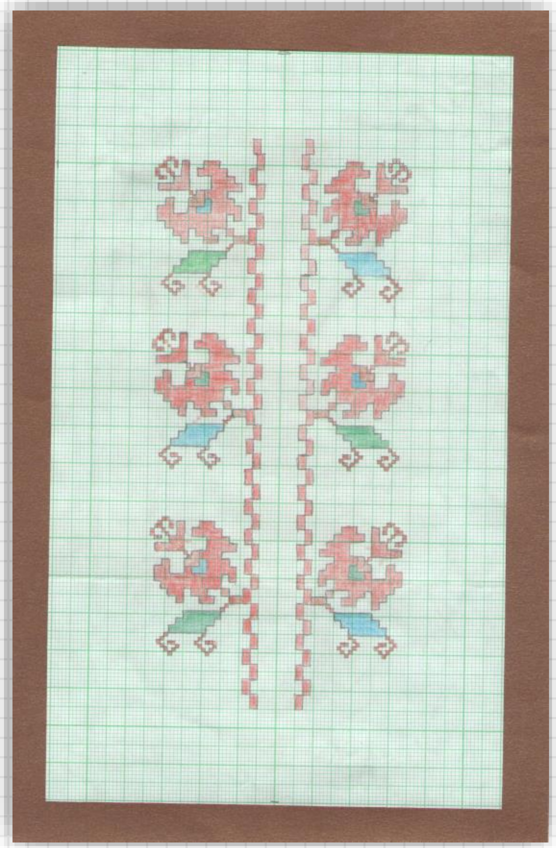
В един автобус се побира един човек. Ако допуснем, че k човека се побират в един автобус, практиката е доказала, че винаги се намира място за още един (автобус №12 през миналия век в гр. Бургас).

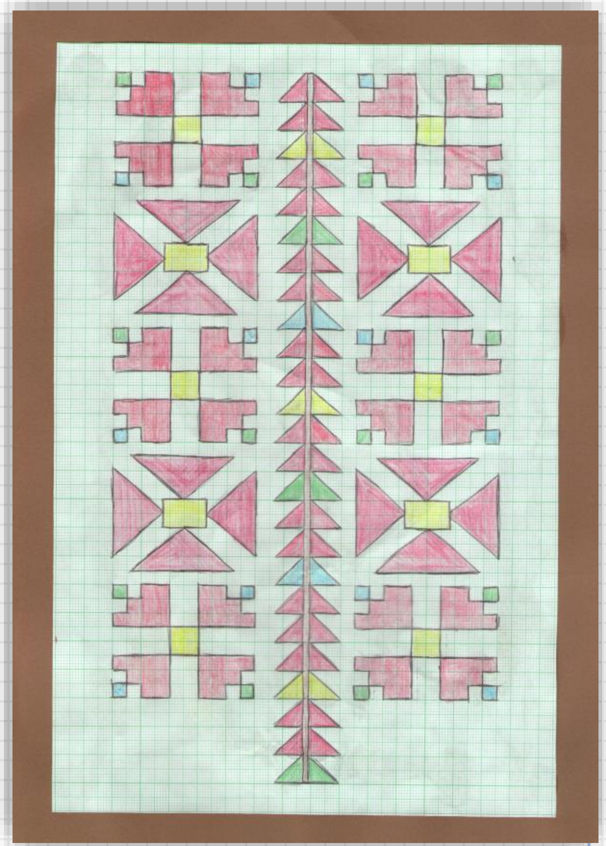
Следователно целият град може да се побере в един автобус.

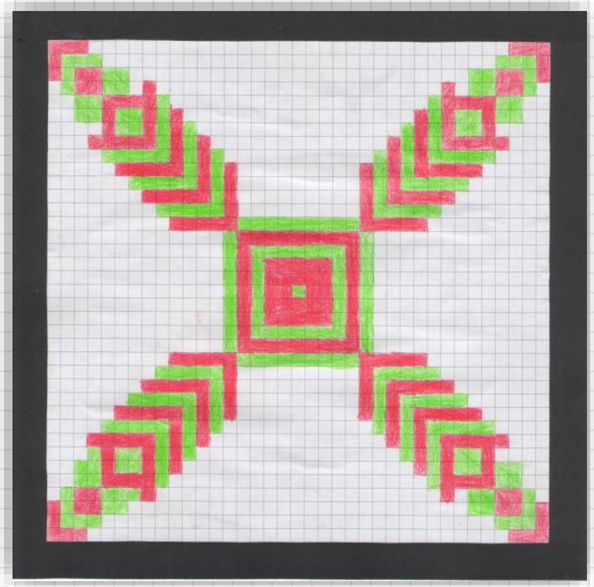
Математика от бабиния скрин

Проектна дейност на ученици от 8 клас

Някъде там на тавана, потънал в прах и охлузен по ръбовете, живее бабиният скрин. Скътан в забрава, той пази творчеството на много поколения българи. В него са надиплени цветни шевици, красиви дантели и тъкани платна. Да извадим от там българската шевица, да я докоснем и да почувстваме онова време. Нейните багри са магия, отразяваща цялата българска душевност. За да се слеем с миналото и насладим на настоящето, за да усетим това вълшебство, ще я пресъздадем на лист хартия или на панама.







Вкусна ли е математиката?

Проектна дейност на ученици от 8 клас

Може ли да бъде вкусна математиката?
Замисляте ли се, че докато си хапвате кръгла бисквитка, изяждате един цилиндър? Вкусната вафла е паралелепипед, а любимият крем карамел- пресечен конус.
Изработихме картонени макети на кетърингови изделия.

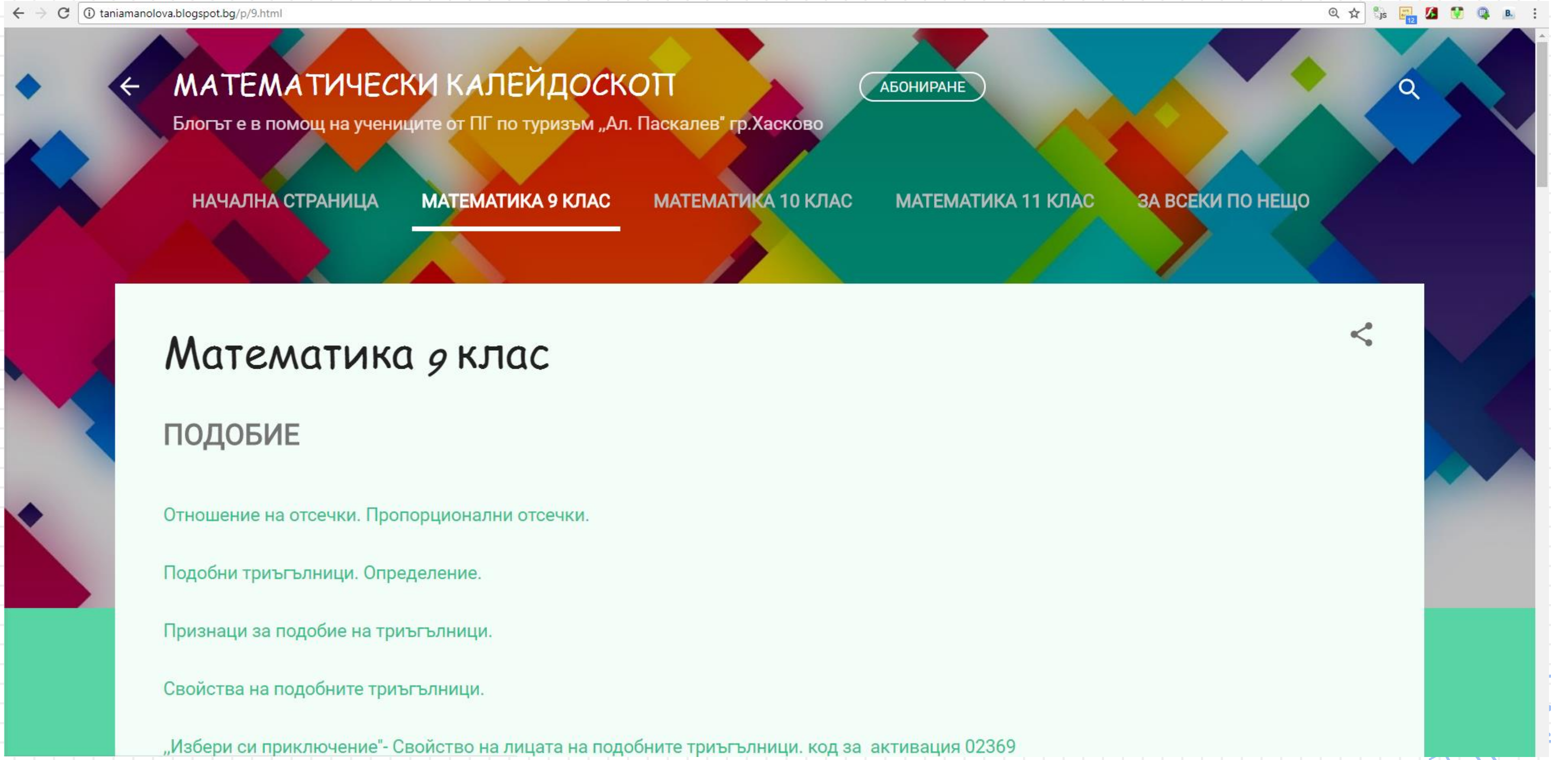
Образователен блог в помощ на учениците от ПГ по туризъм „Александър Паскалев“, гр. Хасково

http://taniamanolova.blogspot.bg/

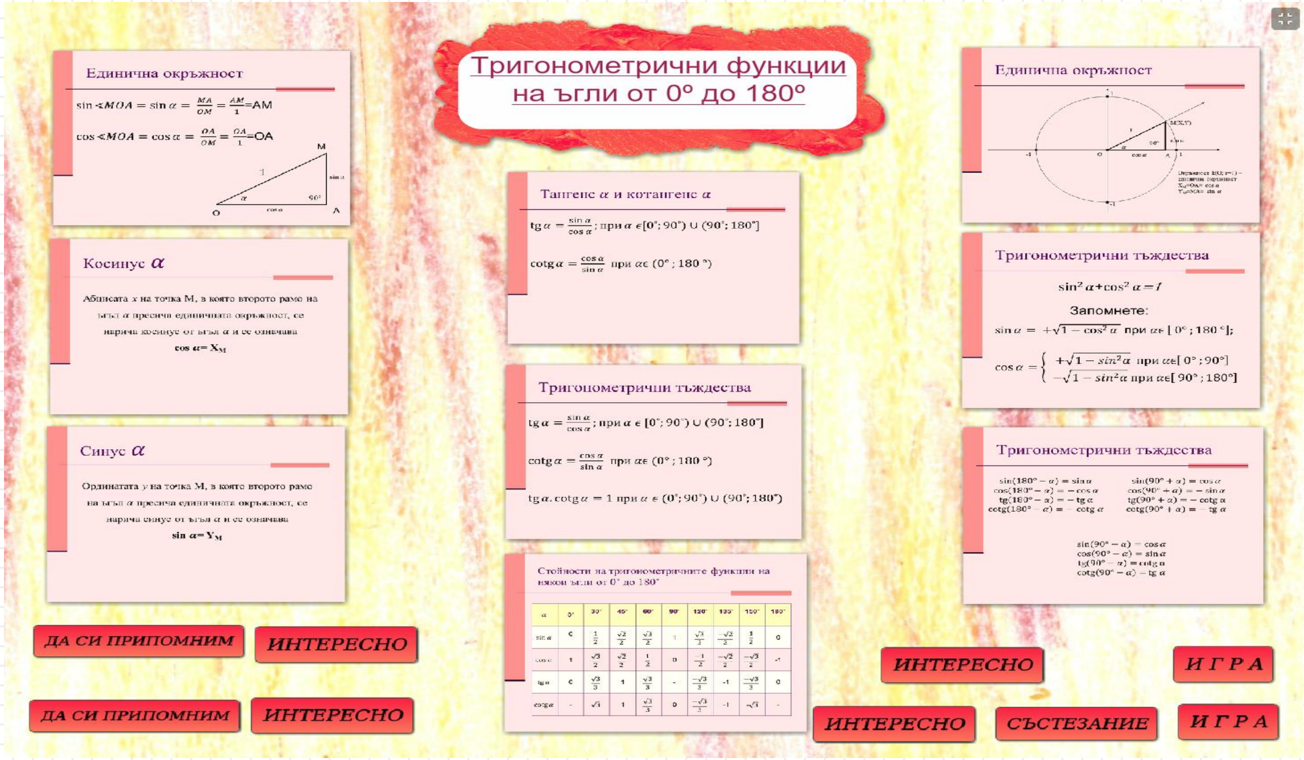
МАТЕМАТИЧЕСКИ КАЛЕЙДОСКОП

Сайтове за споделяне на уроци

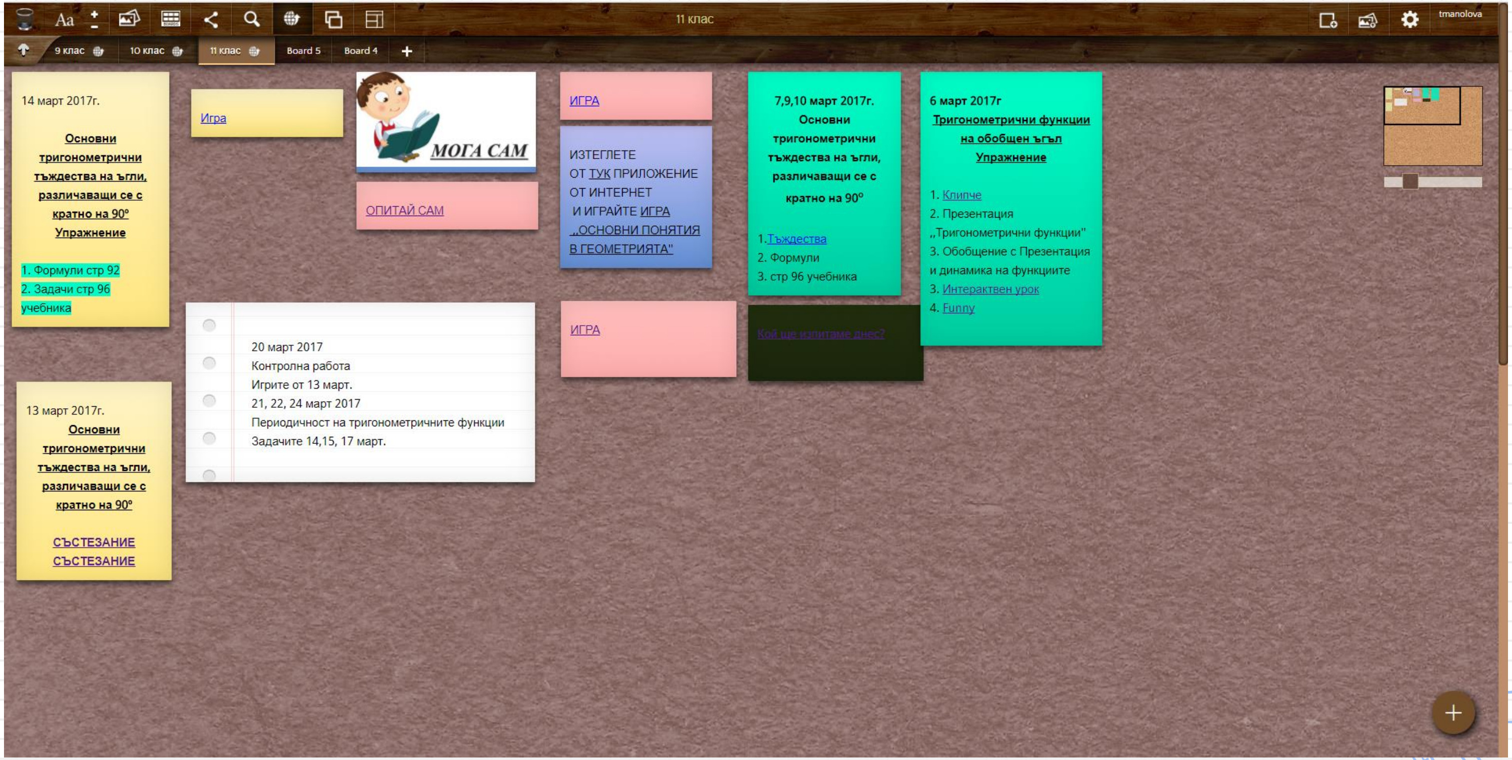
www.blogspot.com



www.glogster.com

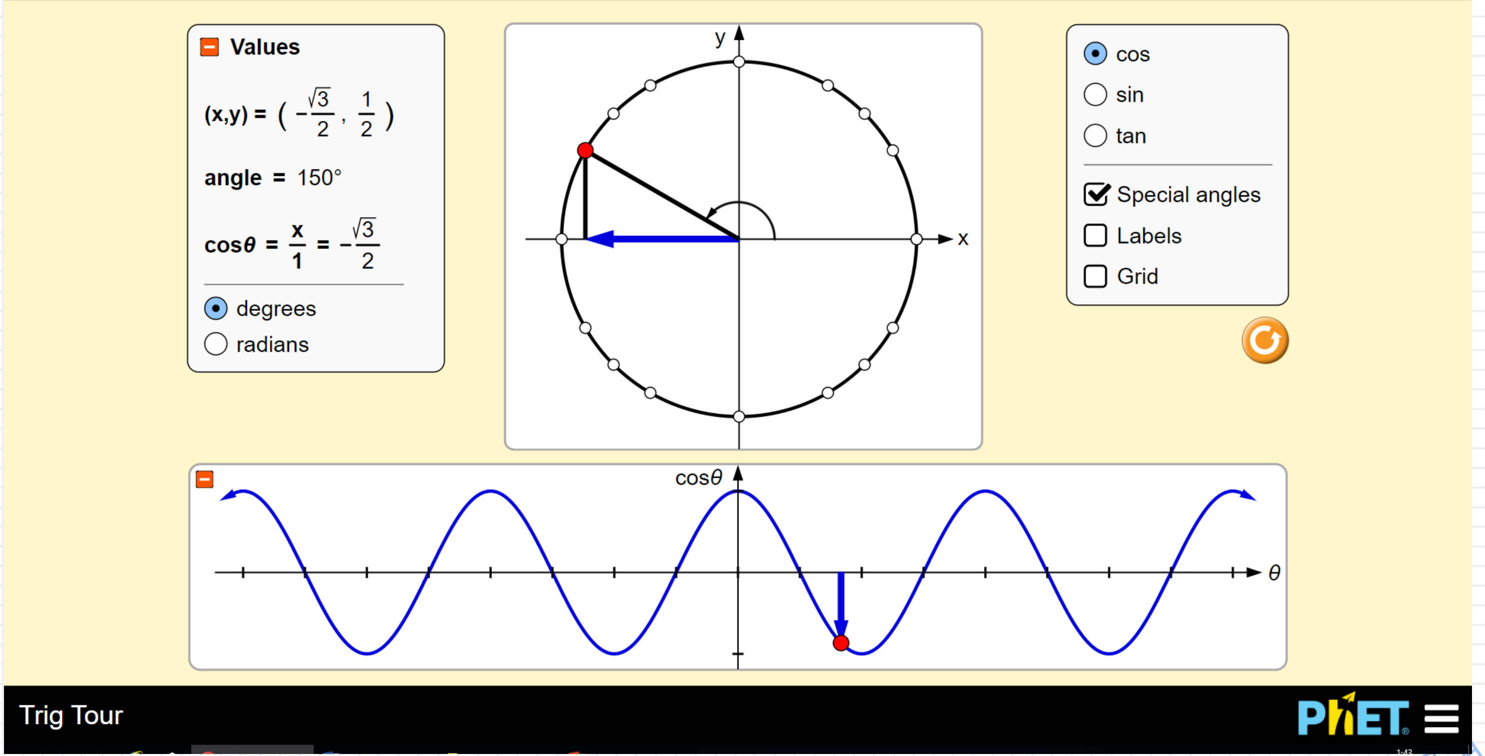


www.noteboardapp.com

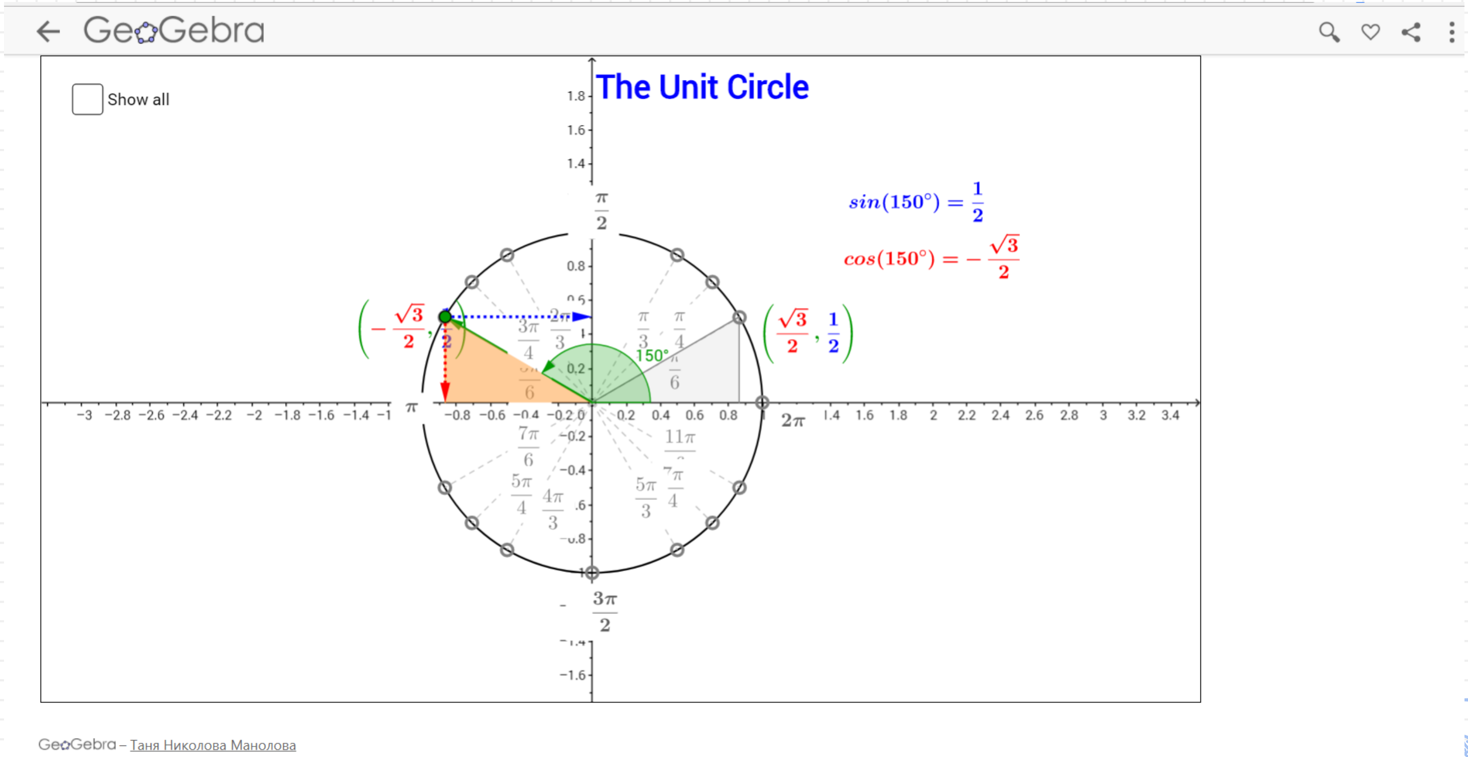


Сайтове за визуализация и симулации

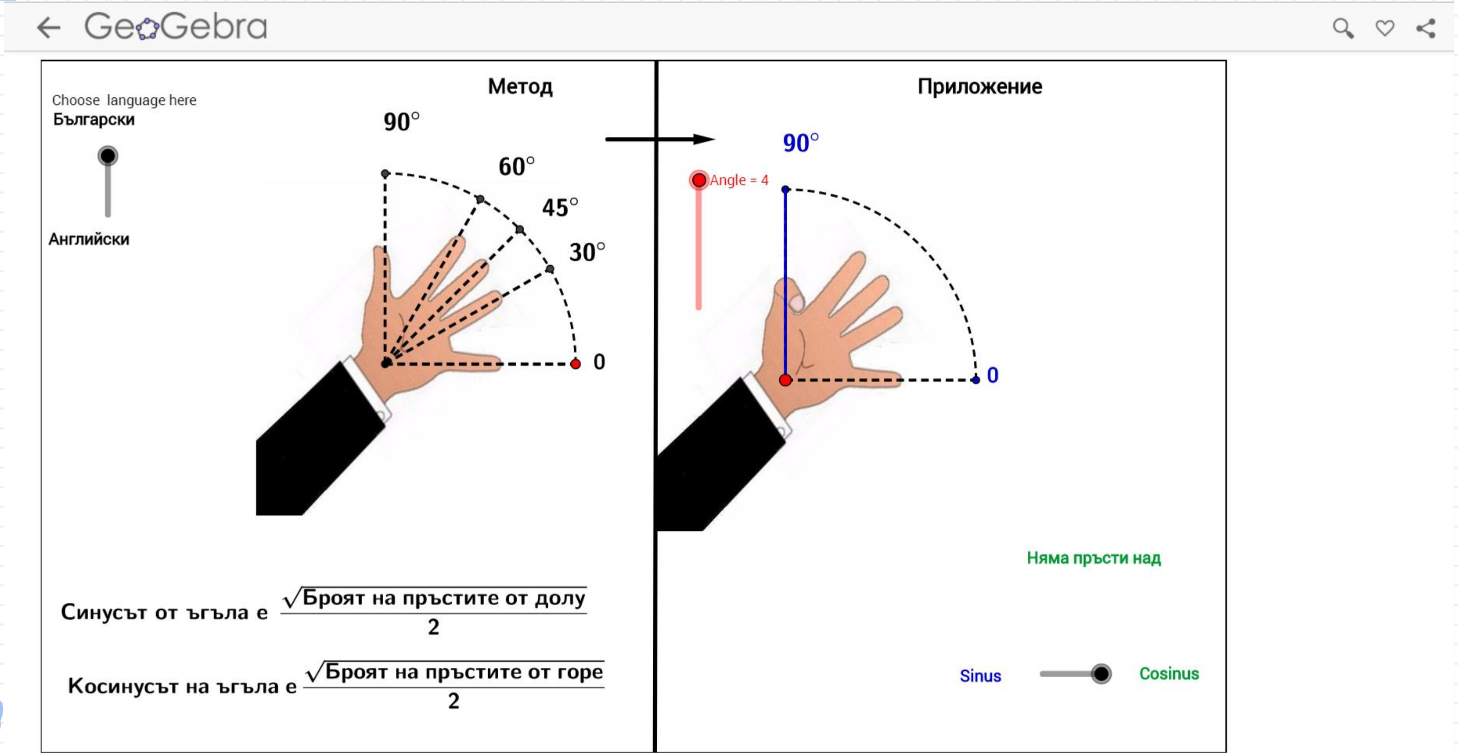
www.phet.colorado.edu



www.geogebra.org

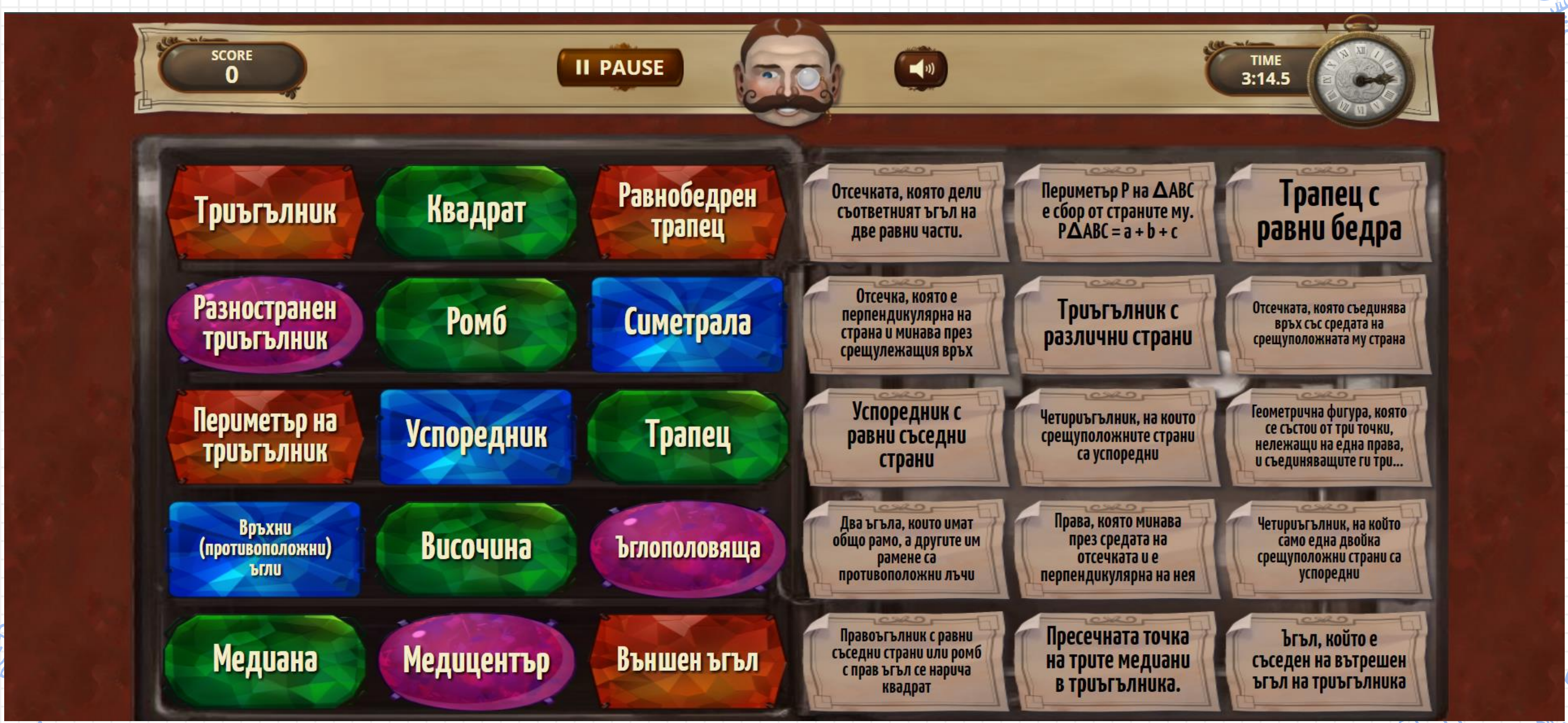


www.geogebra.org



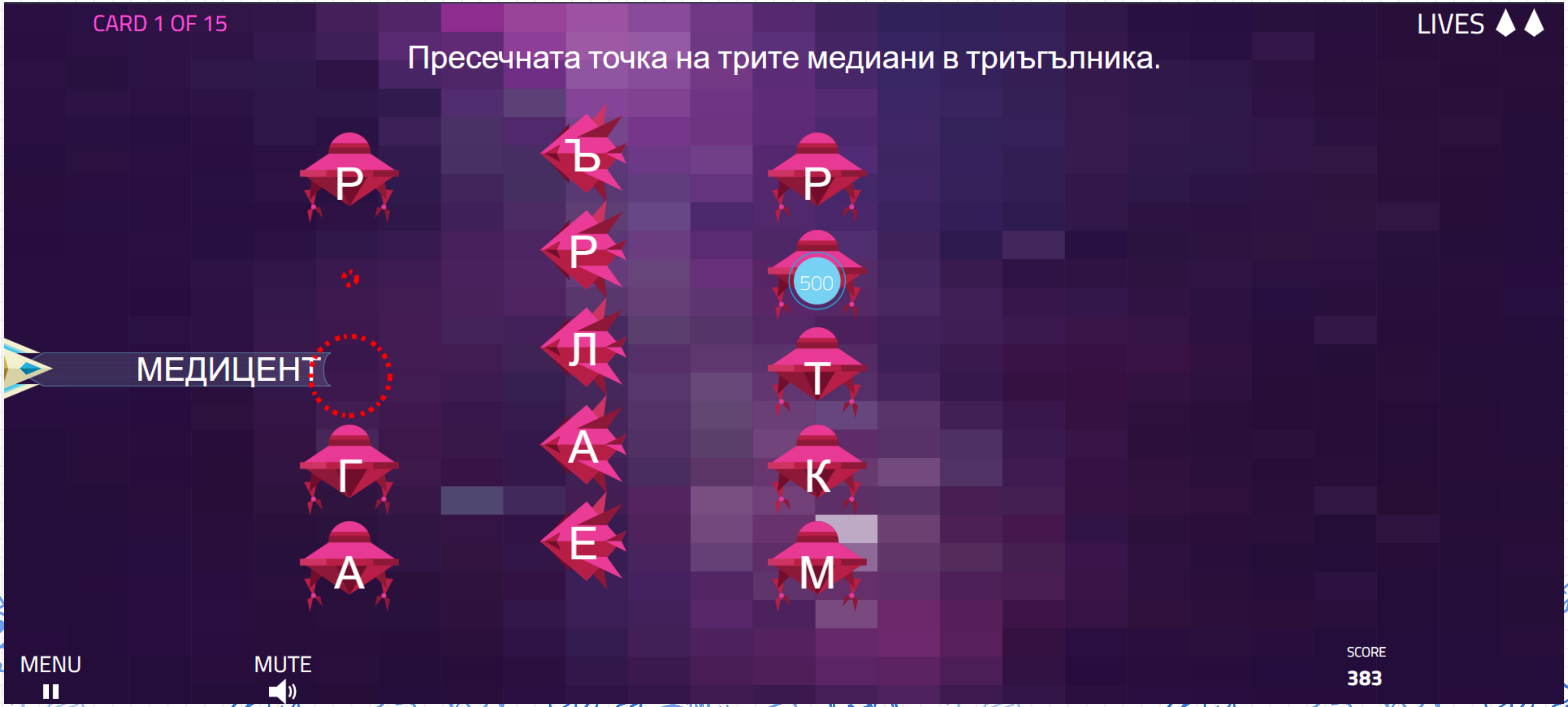
Сайтове за игри и състезания

www.cram.com



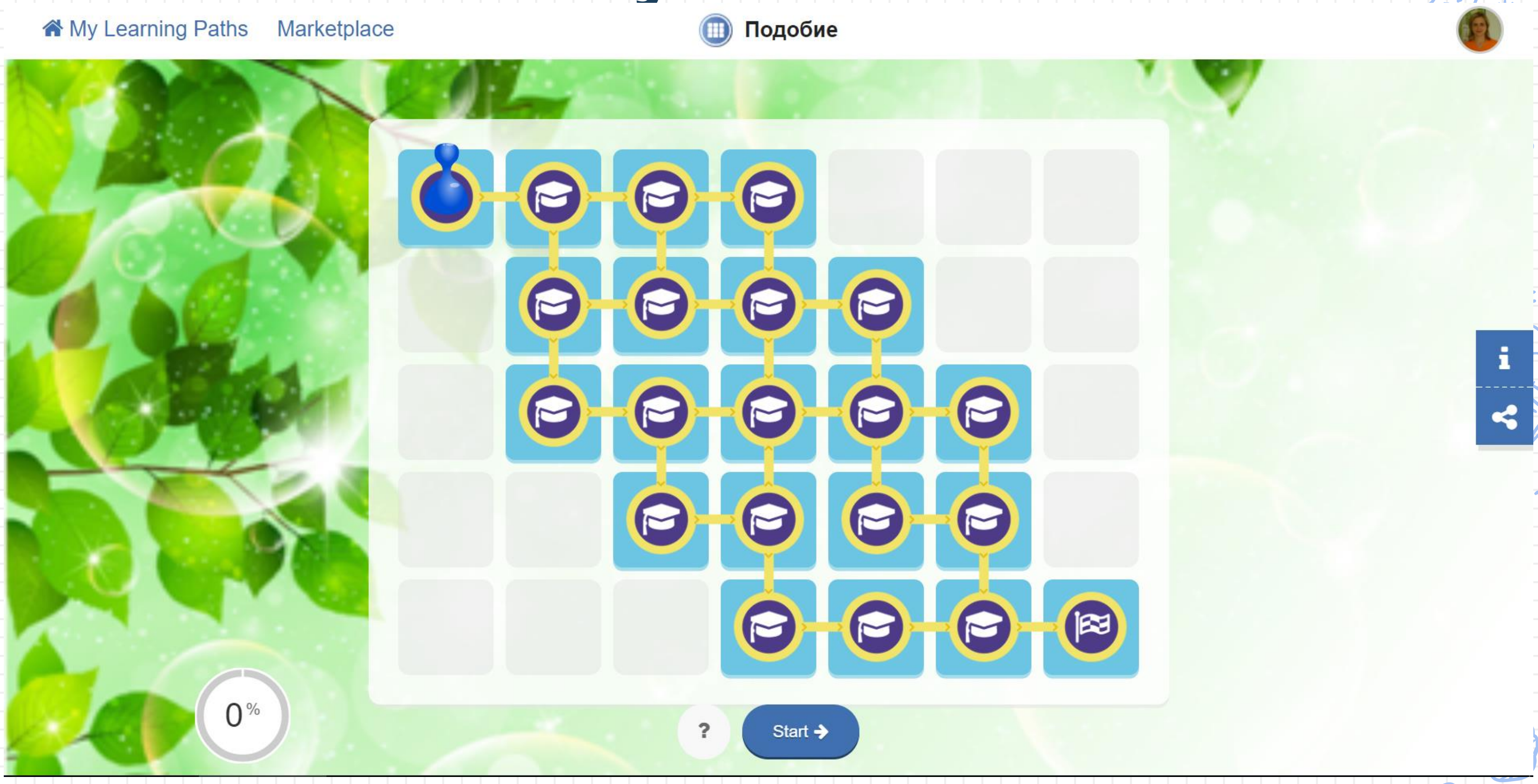
SCORE
0
II PAUSE
TIME
3:14.5
Триъгълник
Квадрат
Равнобедрен трапец
Разностранен триъгълник
Ромб
Симетрала
Периметър на триъгълник
Успоредник
Трапец
Връхни (противоположни) ъгли
Височина
Ъглополовяща
Медиана
Медицентър
Външен ъгъл
Отсечката, която дели съответният ъгъл на две равни части.
Периметър P на ΔABC е сбор от страните му. PΔABC = a + b + c
Трапец с равни бедра
Отсечка, която е перпендикулярна на страна и минава през срещулежащия връх
Триъгълник с различни страни
Отсечката, която съединява връх със средата на срещуположната му страна
Успоредник с равни съседни страни
Четириъгълник, на които срещуположните страни са успоредни
Геометрична фигура, която се състои от три точки, нележащи на една права, и съединяващите ги три...
Два ъгъла, които имат общо рамо, а другите им рамене са противоположни лъчи
Права, която минава през средата на отсечката и е перпендикулярна на нея
Четириъгълник, на който само една двойка срещуположни страни са успоредни
Правоъгълник с равни съседни страни или ромб с прав ъгъл се нарича квадрат
Пресечната точка на трите медиани в триъгълника.
Ъгъл, който е съседен на вътрешен ъгъл на триъгълника

www.cram.com

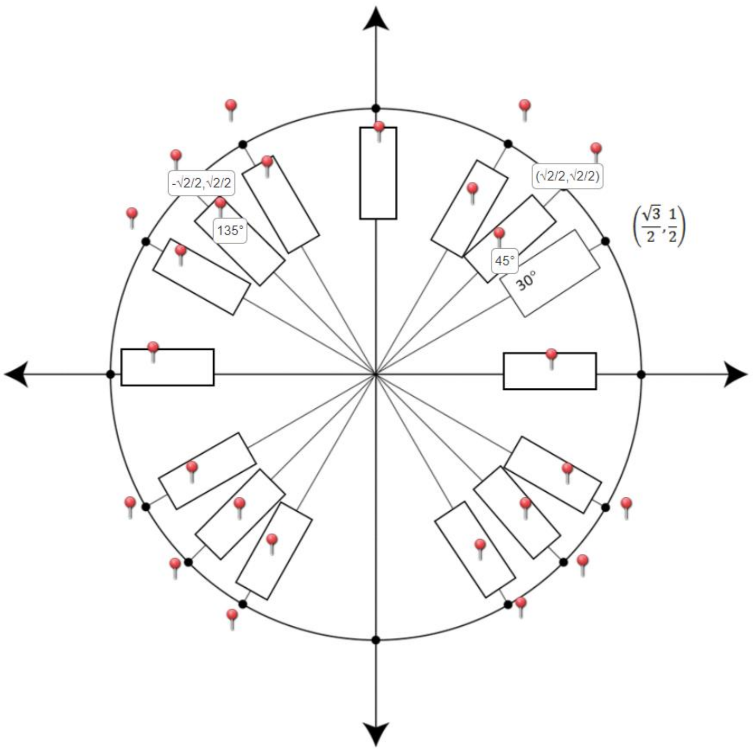


CARD 1 OF 15
LIVES
Пресечната точка на трите медиани в триъгълника.
Р
Ъ
Р
Р
500
МЕДИЦЕНТ
Л
Т
А
Г
К
Е
А
М
MENU
MUTE
SCORE
383

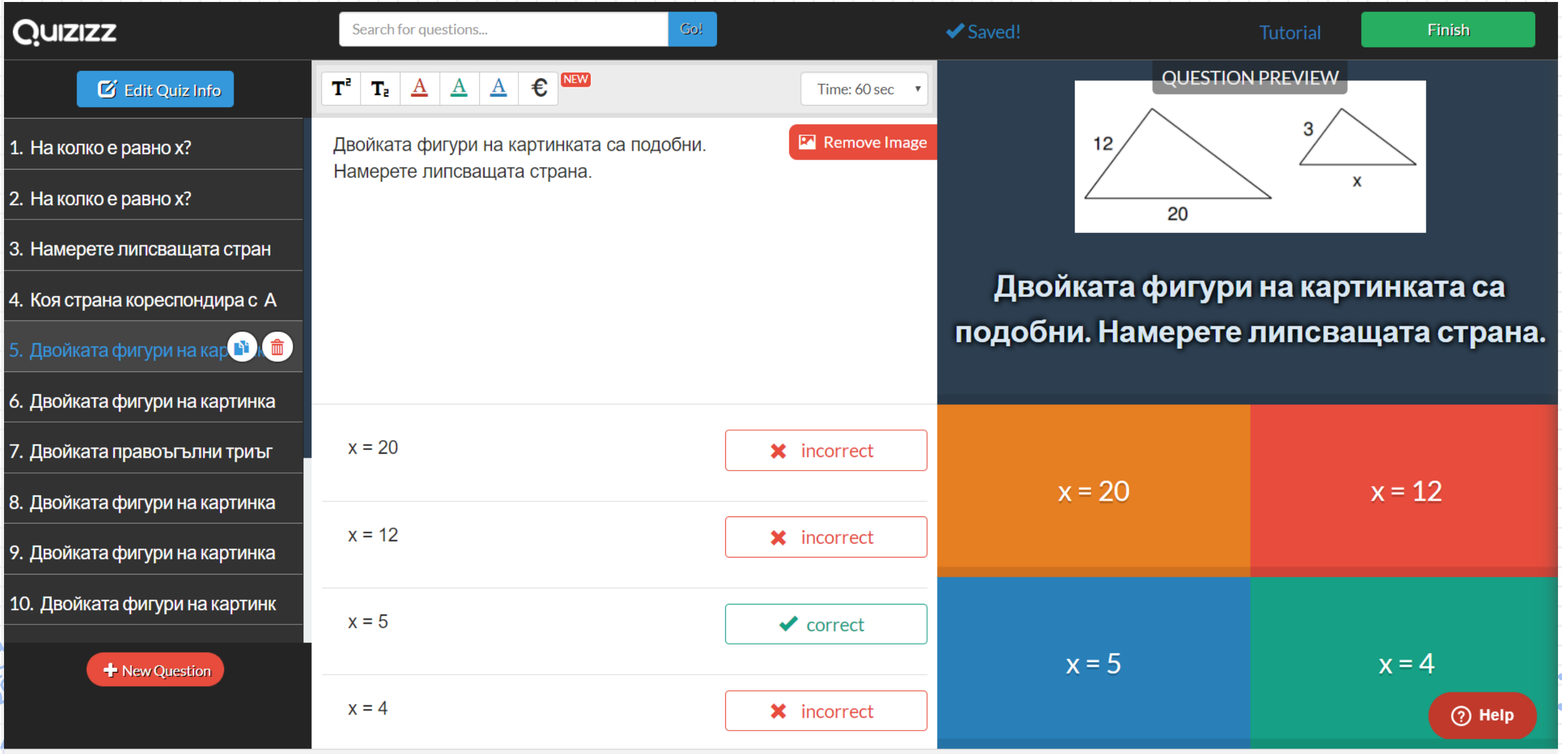
www.symbaloo.com



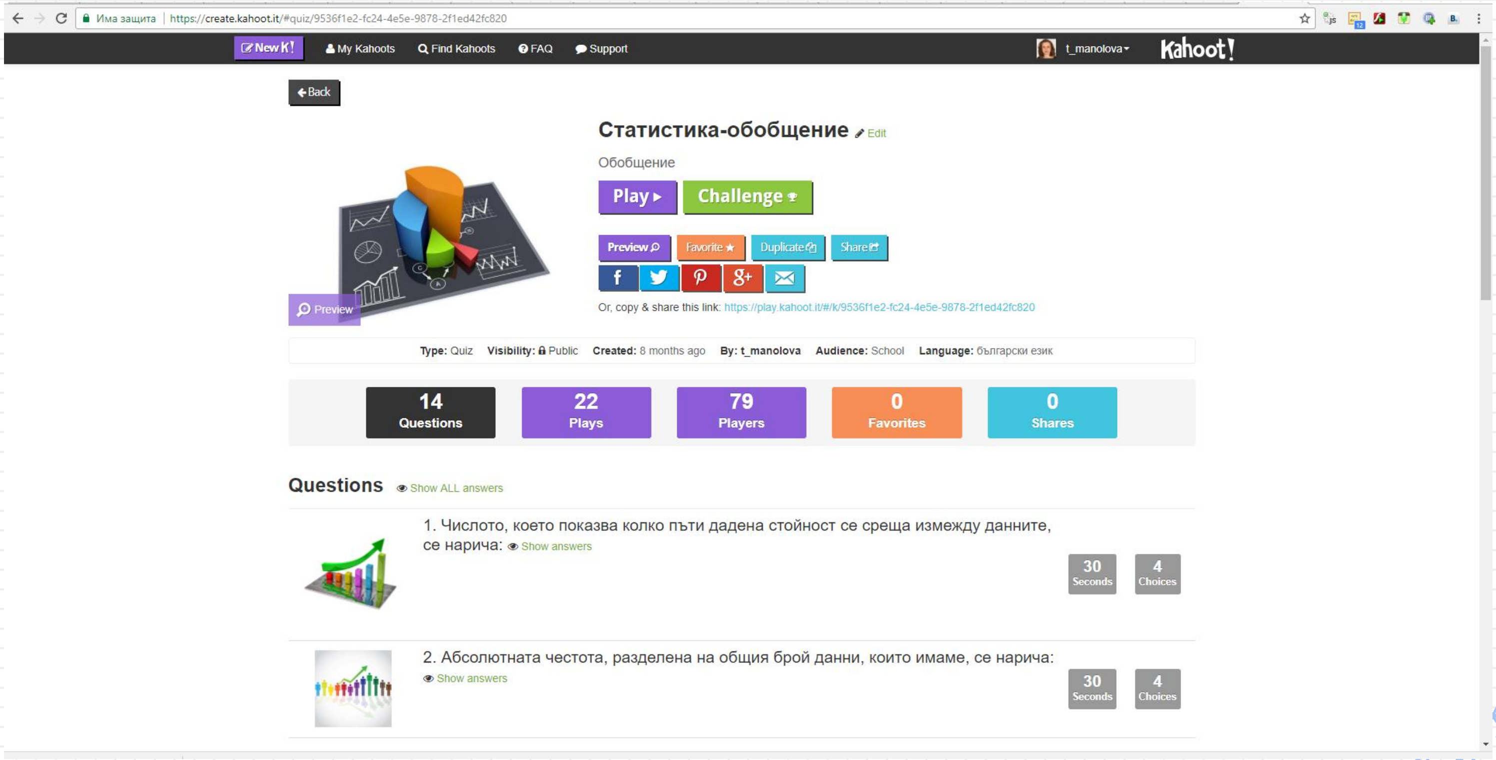
www.learningapps.org



www.quizizz.com



www.kahoot.it



Мобилни приложения


NOTE BOARD
a_n
$5x + 4y = 1$
$3x + 2y = 8$
$c = a^2 + b^2$
b
a
x^2+2x-3
$\sqrt{x}$
EQUATION SOLVER
X
Y
2,4,8,?
x2 x2
Drawing the Math

Trigonometry. Unit circle.