

Национален семинар по образование
“Изследователският подход в математическото образование”

МАТЕМАТИЧЕСКИ КАЛЕЙДОСКОП

Таня Манолова
ПГ по туризъм “Александър Паскалев“
гр. Хасково

2 декември 2017г.



Математическа индукция

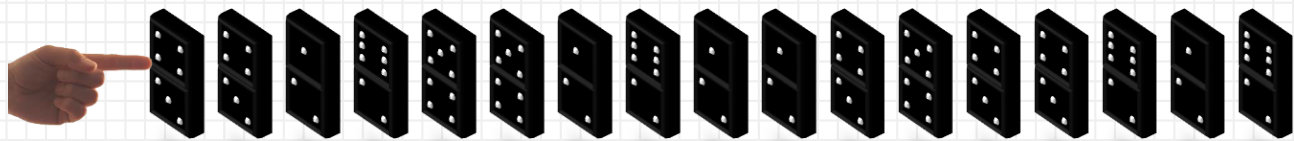
Проектна дейност на ученици от 11 клас
Кръжок по математика
2017г.



Целта на проекта бе да се запознаят учениците с принципа на математическата индукция и приложението му в решаване на различни задачи. Разгледани бяха задачи за доказване на твърдения и неравенства, а също и приложението на математическата индукция в геометрията. Учениците сами решаваха занимателни задачи и задачи за игри. Убедиха се в широкото приложение на този метод в теория на графите и алгоритмите, по които компютърът се състезава с човека.

Ролята на изследователи, която им бе възложена, ги ангажира и мотивира за активен образователен процес.

ЕФЕКТА НА ДОМИНОТО И МАТЕМАТИЧЕСКАТА ИНДУКЦИЯ






I. Нека падне първата плочка!

II. Предполагаме, че ще падне една от следващите плочки.

III. Тя ще бутне стоящата след нея плочка.

IV. Заключениеето е, че ще паднат всички плочки на доминото и този факт е безспорен.



Решаване на геометрични задачи чрез метода на математическата индукция- предизвикателство, отправено към един от екипите

Задача: Да се докаже, че във всеки изпъкнал n -ъгълник броят на всички диагонали е $S_n = \frac{n(n-3)}{2}$.

Разгледайте: <https://ggbm.at/JM5NWu7b>



Решение:

I. При $n=3$ $S=0$ и твърдението е вярно. (Можем да проверим още, че при $n=4$ $S_4=2$ и твърдението също е вярно, но от логична гледна точка това не се налага, тъй като многоъгълникът с най-малък брой страни е триъгълникът и следва, че всяко твърдение за многоъгълник се отнася и за триъгълника).

II. Нека твърдението е вярно при $n=k>3$, т. е. k -ъгълникът има всичко

$$S_k = \frac{k(k-3)}{2} \text{ диагонала.}$$

III. Ще до-кажем, че всеки $(k+1)$ -ъгълник има $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$ диагонала.

Да разгледаме произволен $(k+1)$ -ъгълник $ABCD \dots P$.

Ако начертаем например диагонала му AC ,

то многоъгълникът се разделя на един k -ъгълник $(ACD \dots P)$

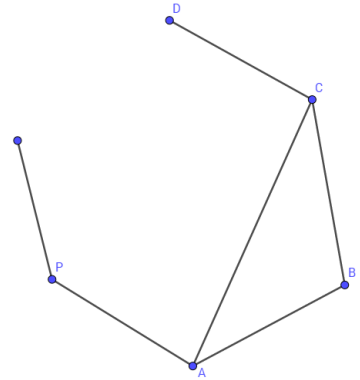
и триъгълник ABC . По предположение $ACD \dots P$ има $S_k = \frac{k(k-3)}{2}$ диагонала.

Но даденият многоъгълник има освен диагоналите на $ACD \dots P$ още един диагонал AC и $(k+1)-3$ диагонала през върха му B .

Следователно :

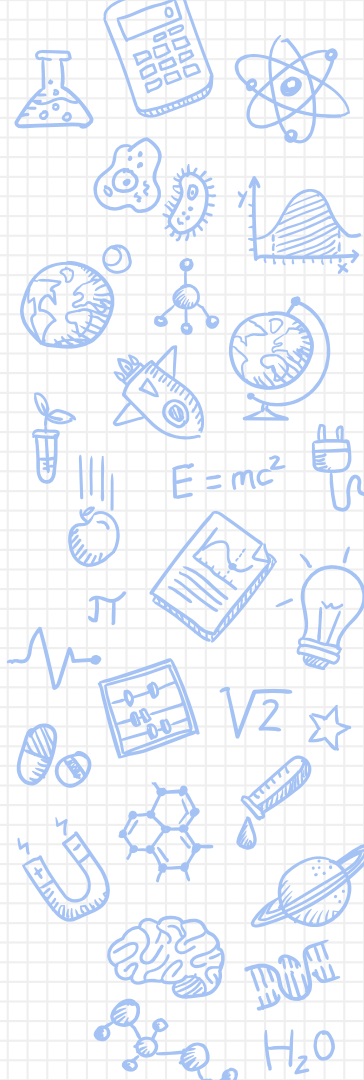
$$S_{k+1} = S_k + 1 + k - 2 = \frac{k(k-3)}{2} + k - 1 = \frac{k^2 - k - 2}{2} = \frac{k^2 + k - 2k - 2}{2} = \frac{k(k+1) - 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$$

IV. От I, II и III, принципа на математическата индукция следва, че твърдението е вярно за произволен многоъгълник.

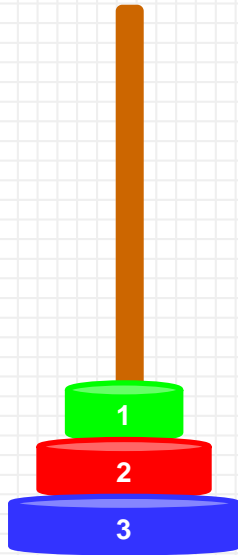


Занимателна задача, решена с метода на математическа индукция, представена ни от втори екип

Задача: Това е известната на всички деца игра „Ханойски кули“. Тя представлява три стълба. На единия има пирамида от няколко диска с различен диаметър, който намалява отдолу нагоре. Тази пирамида трябва да се премести на другия стълб, като се спазват следните правила: не може да се пренасят наведнъж няколко диска и не може да се слага по-голям диск върху по-малък.



Ханойски кули



Задачата е да докажем, че е възможно да се премести пирамида от n диска на другия прът. За целите на доказателството приемаме, че всички дискове са на първи стълб.

Решение:

I. Нека пирамидата има три диска. Временно поставяме диска с най-малък диаметър на втори стълб. Втория диск поставяме на трети стълб и местим над втори диск първия. След това местим трети диск на втори стълб, първия слагаме на първи стълб, втори поставяме над трети диск и първия над втори.

II. Допускаме, че сме успели да преместим k ($4 \leq k \leq n$ и $k \in \mathbb{N}$) диска върху някой от другите стълб. (В началото всички дискове са на първия стълб)

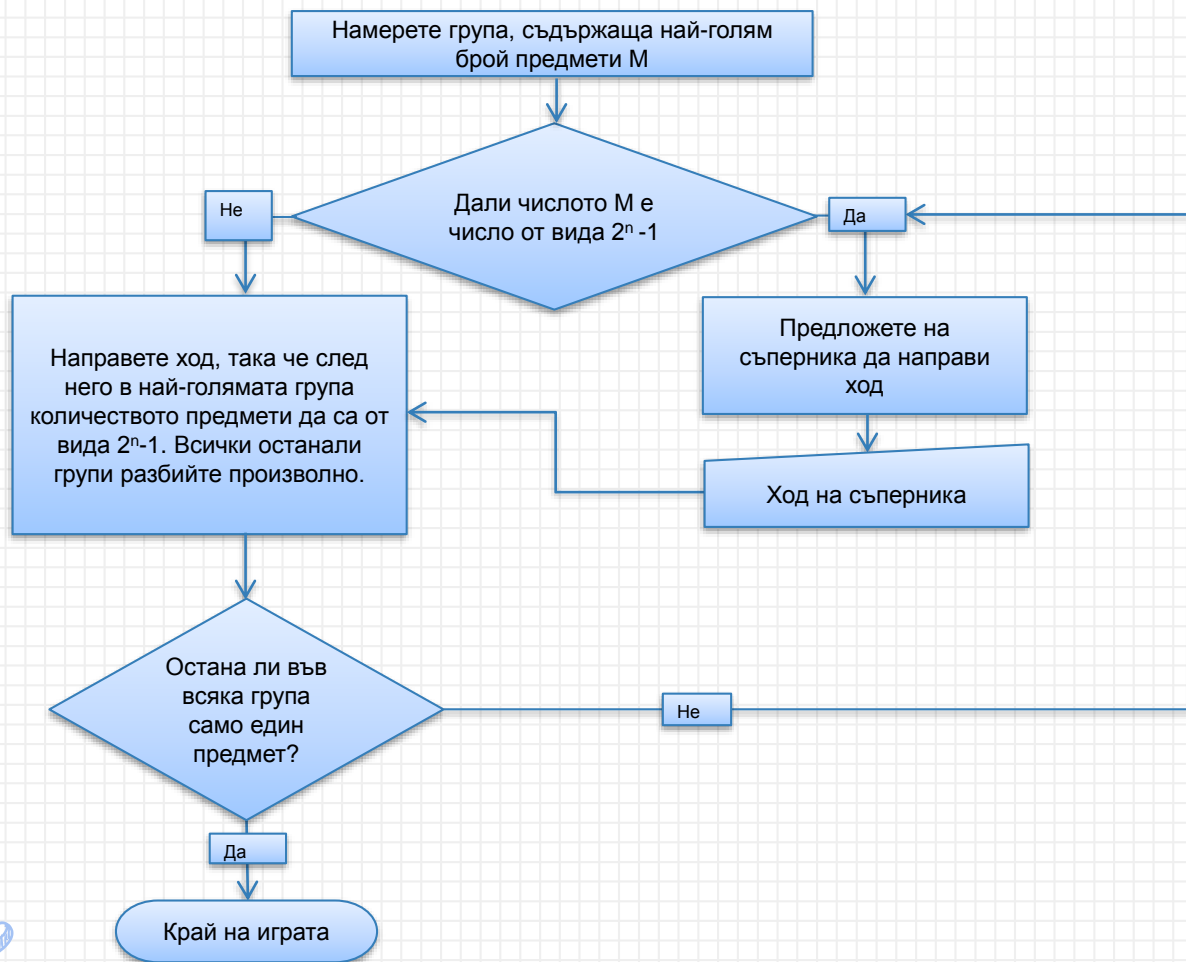
III. Ще докажем, че можем да преместим и $k+1$ -вия диск. k -тия диск местим на свободния стълб. След това първи диск местим върху k -тия. Втори местим на средния стълб. Първия диск връщаме над втори прът, третия диск слагаме над k -тия, първия диск се мести на стълба, на който бяха подредени k дискове, вторият диск над третия, първия над втория. И така докато достигнем до $k+1$ -вия диск.

IV. От I, II и III, съгласно принципа на математическата индукция следва, че всички n диска могат да бъдат преместени от един стълб на друг в изисканата подредба.

Алгоритми и игри- предизвикателство за третия екип

Задача: Преди началото на играта има K -групи предмети. Първата група съдържа m_1 предмета, втората- m_2 предмета, третата- m_3 предмета, k -тата група m_k предмета. Играят двама. Всеки от тях, когато е на ход, раздробява всяка група, състояща се от повече от един предмет, на две по-малки групи. Ходовете продължават дотогава, докато във всяка група не остане по един предмет. Победител е онзи, който успее да изпълни последното разбиване.





Основната идея се състои в това през цялото време съперникът да е поставен пред необходимостта да разбива групи, сред които най-голямата съдържа $2^n - 1$ предмета.

Хипотезата обаче все още е недоказана. Нейната вярност беше проверена само за три числа. От вида $2^n - 1$. Дали тя ще е в сила за такива числа като 31, 63, 255 или 1023, които също са от вида $2^n - 1$?

Доказателство:

I. Установихме, че хипотезата е вярна при $n=2, 3, 4$.

II. Да предположим, че хипотезата е вярна при $n=k$. Това означава, че ако голямата група съдържа $m=2^k - 1$ предмета, започващия губи.

III. Ще докажем че при $n=k+1$, започващият губи и това ще бъде доказателство за истинността на

хипотезата при $n=k+1$. Да изразим $n_{k+1} = 2^{k+1} - 1$ чрез n_k . Ще отбележим, че $2^k = n_k + 1$

Тогава $n_{k+1} = 2^{k+1} - 1 = 2 \cdot 2^k - 1 = 2(n_k + 1) - 1 = 2n_k + 1 = n_k + n_k + 1$

Оттук следва, че ако най-голямата група съдържа n_{k+1} предмета, започващия играта не може за един ход да направи разбиването на тази група на две, съдържащи по n_k предмета, или на две, от които едната съдържа n_k , а другата – по-малък брой предмети.

С други думи, започващият играта не може да постави съперника пред необходимостта да разбие най-голямата група от $(2^n - 1)$ предмета, той няма да успее да вземе инициативата. Приведените разсъждения показваха, че от предположението за вярност на хипотезата при $n=k$ следва верността и при $n=k+1$ и следователно принципа на математическата индукция при всяко естествено число n .

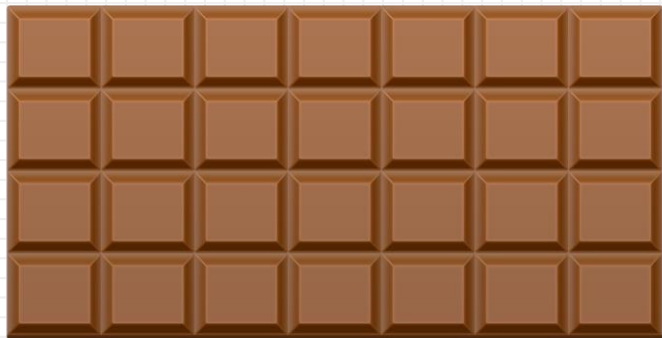
Чрез наблюдение на играта се намира
печелившия алгоритъм

Помага индукцията

Убеждава математическата индукция

Всички се убедиха, че с метода на математическата индукция се доказват закономерности и в ежедневието

Задача: Всички знаем как изглежда един вкусен шоколад. Множество квадратчета, разположени в правоъгълник. Колко разчупвания по линията между тях са необходими, за да го разделим на малки квадратчета?



Шегите на математическата индукция – винаги е приятно срещу себе си да виждаш усмихнати младежи

Опашка от вежливи чакащи

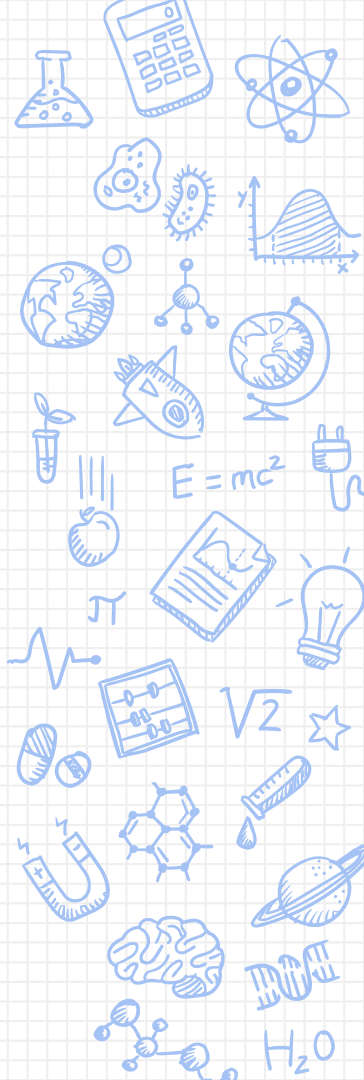
Добрите маниери забраняват един мъж да стои пред жена на опашка. Той трябва да ѝ отстъпи мястото си и да мине след нея. Следователно, ако първият човек в една опашка е мъж, то и останалите от опашката са мъже.



Разтегателен автобус

В един автобус се побира един човек. Ако допуснем, че k човека се побират в един автобус, практиката е доказала, че винаги се намира място за още един (автобус №12 през миналия век в гр. Бургас).

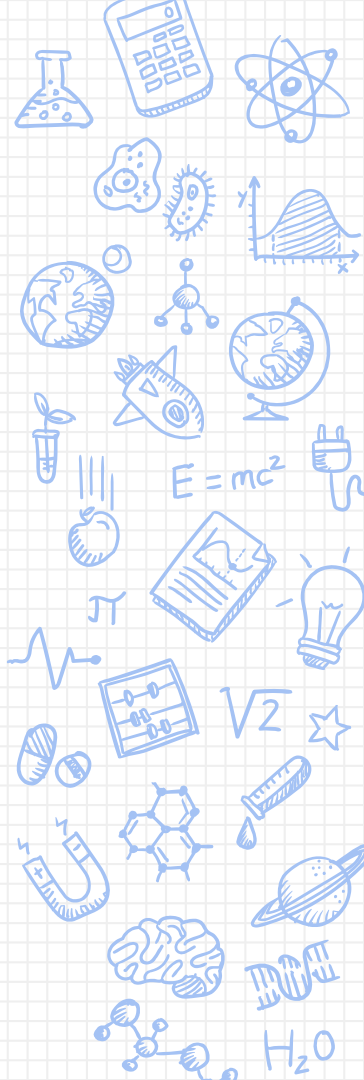
Следователно целият град може да се побере в един автобус.

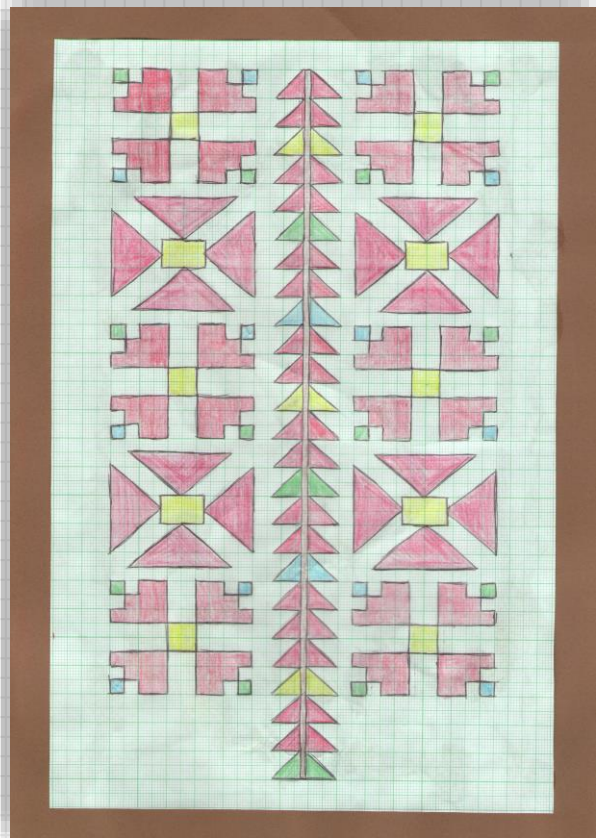
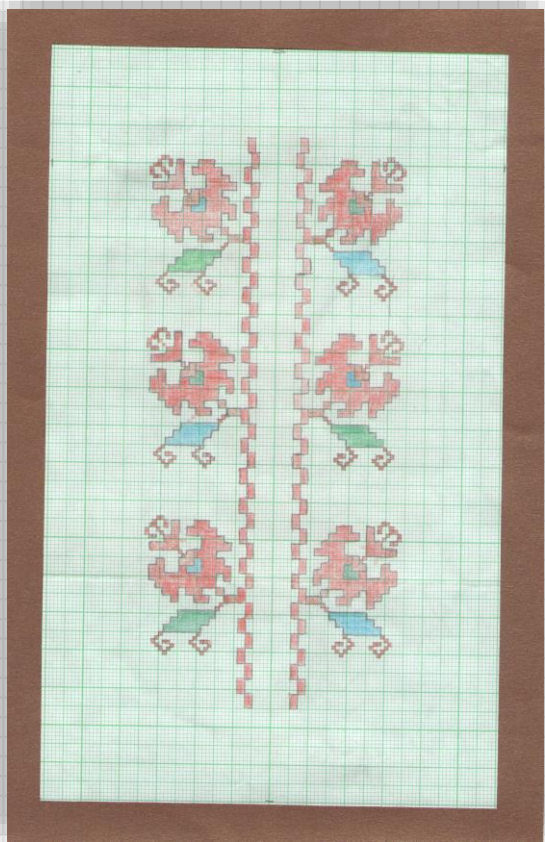


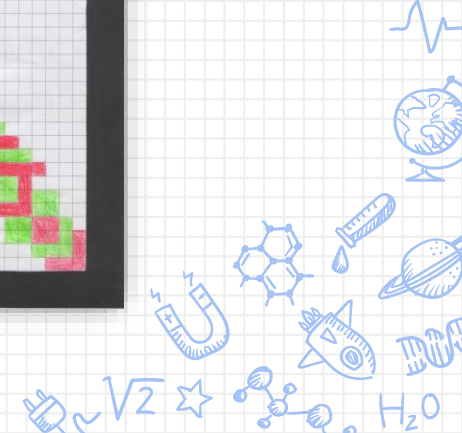
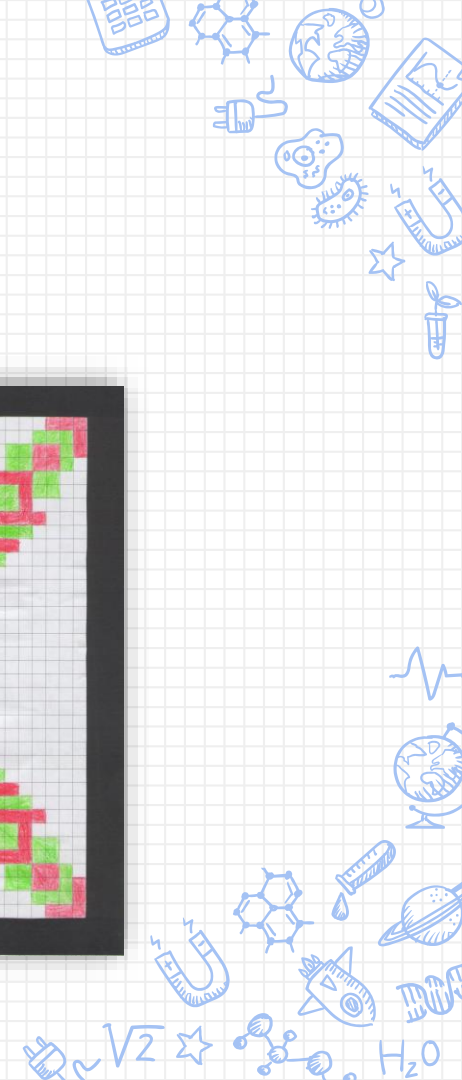
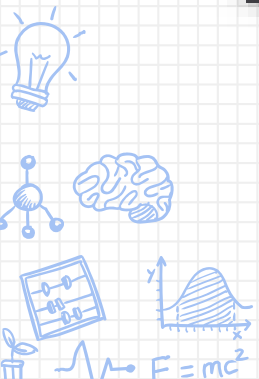
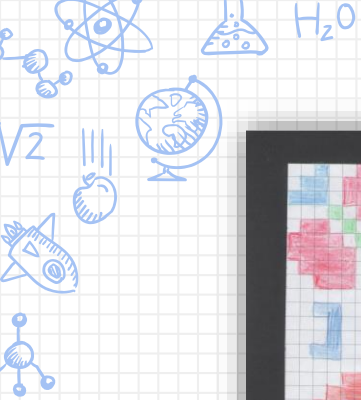
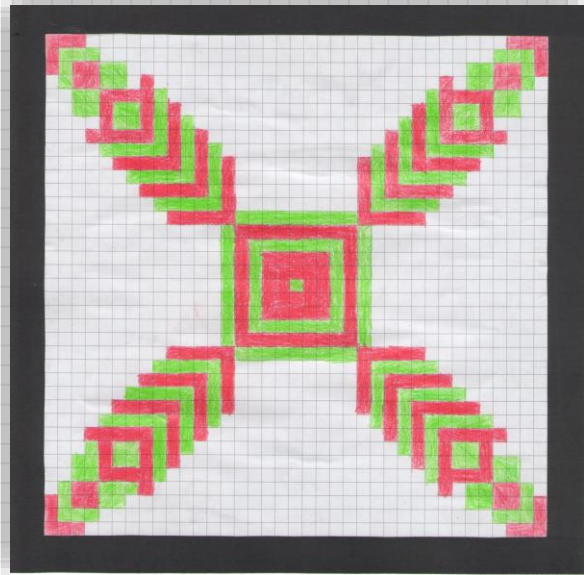
Математика от бабиния скрин

Проектна дейност на ученици от 8 клас

Някъде там на тавана, потънал в прах и охлузен по ръбовете, живее бабиният скрин. Скътан в забрава, той пази творчеството на много поколения българи. В него са надиплени цветни шевици, красиви дантели и тъкани платна. Да извадим от там българската шевица, да я докоснем и да почувстваме онова време. Нейните багри са магия, отразяваща цялата българска душевност. За да се слеем с миналото и насладим на настоящето, за да усетим това възшебство, ще я пресъздадем на лист хартия или на панама.







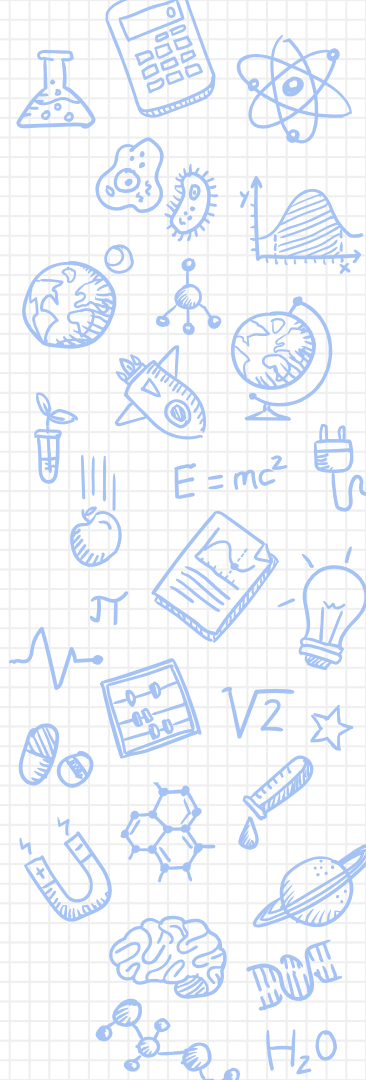
Вкусна ли е математиката?

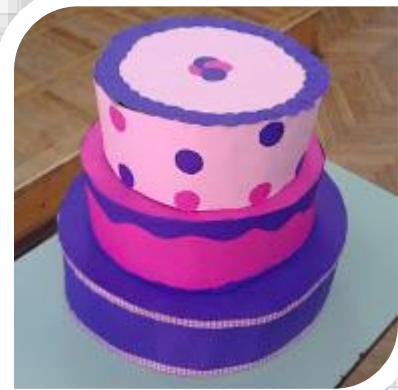
Проектна дейност на ученици от 8 клас

Може ли да бъде вкусна математиката?

Замисляте ли се, че докато си хапвате кръгла бисквитка, изяждате един цилиндър? Вкусната вафла е паралелепипед, а любимият крем карамел- пресечен конус.

Изработихме картонени макети на кетърингови изделия.



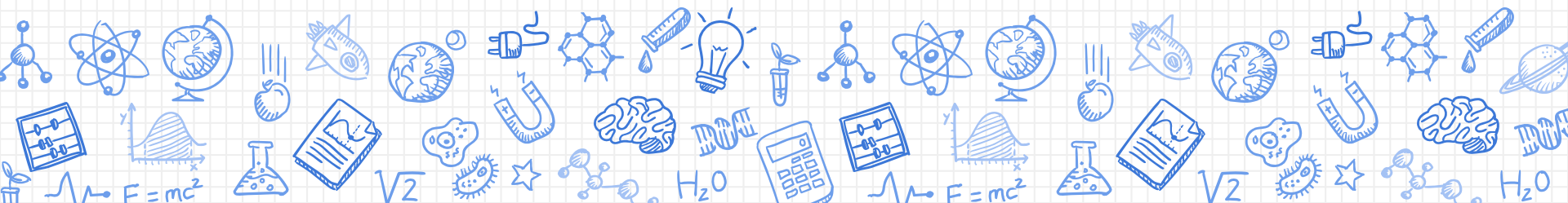


Образователен блог в помощ на учениците от ПГ по туризъм
„Александър Паскалев“ гр. Хасково

<http://taniamanolova.blogspot.bg/>



Сайтове за споделяне на уроци



www.blogspot.com

← taniamanolova.blogspot.bg/p/9.html

← МАТЕМАТИЧЕСКИ КАЛЕЙДОСКОП

АБОНИРАНЕ

НАЧАЛНА СТРАНИЦА МАТЕМАТИКА 9 КЛАС МАТЕМАТИКА 10 КЛАС МАТЕМАТИКА 11 КЛАС ЗА ВСЕКИ ПО НЕЩО

Математика 9 клас

ПОДОБИЕ

Отношение на отсечки. Пропорционални отсечки.

Подобни триъгълници. Определение.

Признаци за подобие на триъгълници.

Свойства на подобните триъгълници.

„Избери си приключение“ - Свойство на лицата на подобните триъгълници. код за активация 02369

Тригонометрични функции на ъгли от 0° до 180°

Единична окръжност

$$\sin \angle MOA = \sin \alpha = \frac{MA}{OM} = \frac{AM}{1} = AM$$

$$\cos \angle MOA = \cos \alpha = \frac{OA}{OM} = \frac{OA}{1} = OA$$



Косинус α

Абсцисата x на точка M , в която второто разсе на ъгъл α пресича единичната окръжност, се нарича косинус от ъгъл α и се означава $\cos \alpha = X_M$

Синус α

Ординатата y на точка M , в която второто разсе на ъгъл α пресича единичната окръжност, се нарича синус от ъгъл α и се означава $\sin \alpha = Y_M$

ДА СИ ПРИПОМНИМ

ИНТЕРЕСНО

ДА СИ ПРИПОМНИМ

ИНТЕРЕСНО

Тангенс α и котангенс α

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ при } \alpha \in [0^\circ; 90^\circ) \cup (90^\circ; 180^\circ]$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \text{ при } \alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$$

Тригонометрични тъждества

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ при } \alpha \in [0^\circ; 90^\circ) \cup (90^\circ; 180^\circ]$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \text{ при } \alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1 \text{ при } \alpha \in (0^\circ; 90^\circ) \cup (90^\circ; 180^\circ)$$

Стойности на тригонометричните функции на някои ъгли от 0° до 180°

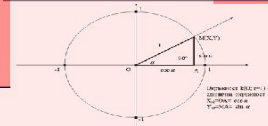
| α | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 120° | 135° | 150° | 180° |
|--------------|----|----------------------|----------------------|----------------------|-----|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------|
| sin α | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| cos α | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1 |
| tg α | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | - | $-\sqrt{3}$ | -1 | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0 |
| ctg α | - | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | -1 | $-\sqrt{3}$ | - |

ИНТЕРЕСНО

СЪСТЕЗАНИЕ

ИГРА

Единична окръжност



Тригонометрични тъждества

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Запомнете:

$$\sin \alpha = +\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \text{ при } \alpha \in [0^\circ; 180^\circ];$$

$$\cos \alpha = \begin{cases} +\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \text{ при } \alpha \in [0^\circ; 90^\circ] \\ -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \text{ при } \alpha \in [90^\circ; 180^\circ] \end{cases}$$

Тригонометрични тъждества

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha & \sin(90^\circ + \alpha) &= \cos \alpha \\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha & \cos(90^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha \\ \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha & \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha \\ \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha & \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

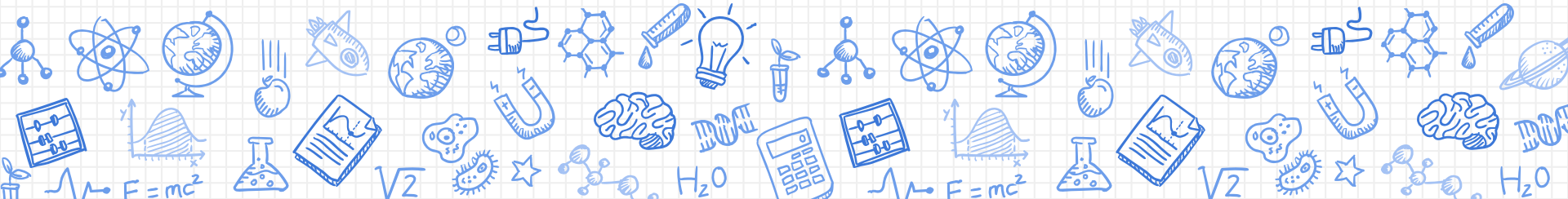
$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{ctg} \alpha \\ \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

www.noteboardapp.com

The screenshot displays the Noteboard app interface on a tablet. At the top, there is a navigation bar with icons for home, search, and settings, and the text "11 клас". Below this, a secondary bar shows "9 клас", "10 клас", "11 клас", "Board 5", and "Board 4". The main area is a corkboard with several notes and cards:

- 14 март 2017г.**
 - Основни тригонометрични тъждества на ъгли, различаващи се с кратно на 90°
Упражнение
 - 1. [Формули стр 92](#)
 - 2. [Задачи стр 96 учебника](#)
- 13 март 2017г.**
 - Основни тригонометрични тъждества на ъгли, различаващи се с кратно на 90°
 - СЪСТЕЗАНИЕ
 - СЪСТЕЗАНИЕ
- 20 март 2017**
 - Контролна работа
 - Игрите от 13 март.
 - 21, 22, 24 март 2017
 - Периодичност на тригонометричните функции
 - Задачите 14,15, 17 март.
- Игра** (yellow card)
- ИГРА** (pink card)
- МОГА САМ** (white card with cartoon character)
- ОПИТАЙ САМ** (pink card)
- ИЗТЕГЛЕТЕ ОТ ТУК ПРИЛОЖЕНИЕ ОТ ИНТЕРНЕТ И ИГРАЙТЕ ИГРА „ОСНОВНИ ПОНЯТИЯ В ГЕОМЕТРИЯТА“** (blue card)
- ИГРА** (pink card)
- 7,9,10 март 2017г.**
 - Основни тригонометрични тъждества на ъгли, различаващи се с кратно на 90°
 - 1. [Тъждества](#)
 - 2. [Формули](#)
 - 3. [стр 96 учебника](#)
- Игра** (dark green card)
- 6 март 2017г**
 - Тригонометрични функции на обобщен ъгъл
Упражнение
 - 1. [Клипче](#)
 - 2. [Презентация „Тригонометрични функции“](#)
 - 3. [Обобщение с Презентация и динамика на функциите](#)
 - 3. [Интерактивен урок](#)
 - 4. [Filiply](#)

Сайтове за визуализация и симулации



Values

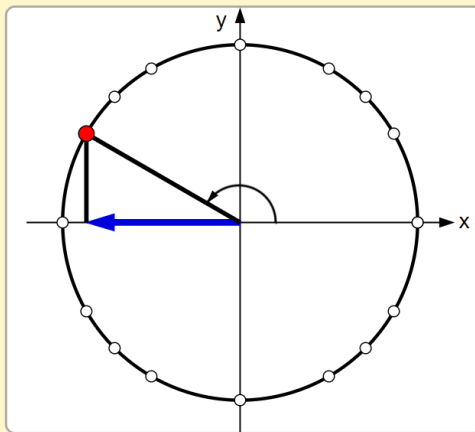
$$(x,y) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{angle} = 150^\circ$$

$$\cos\theta = \frac{x}{1} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

degrees

radians



cos

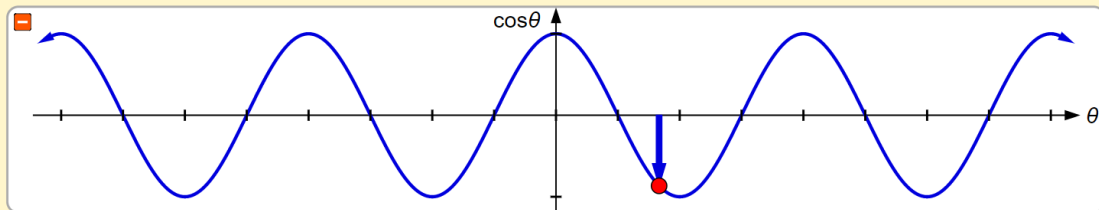
sin

tan

Special angles

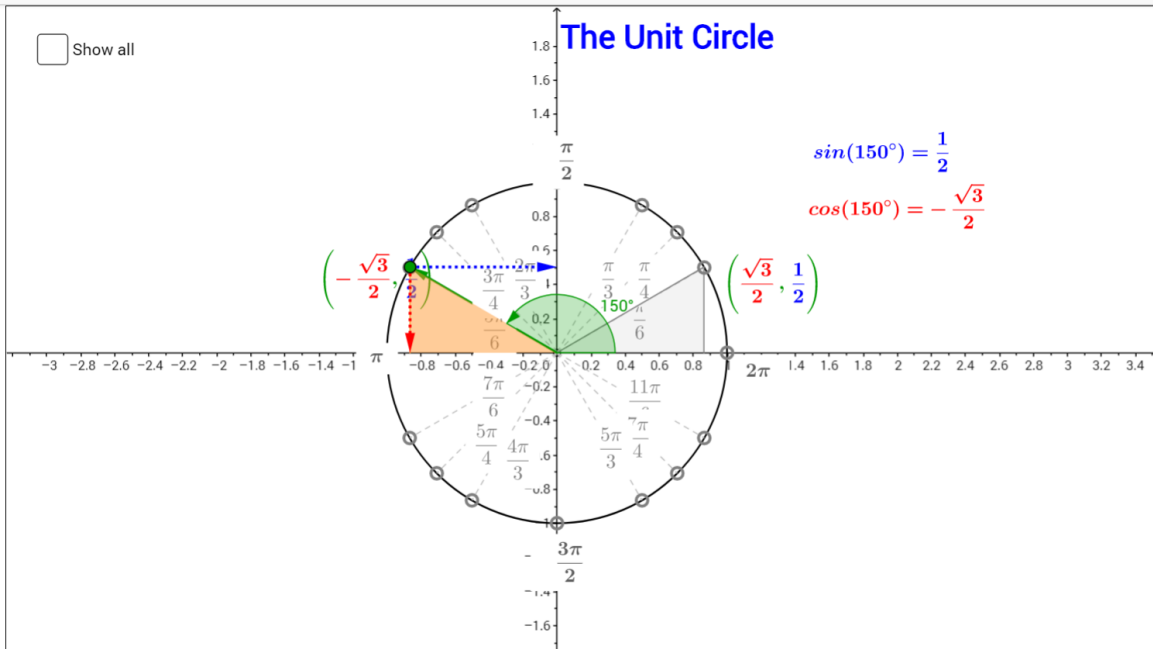
Labels

Grid

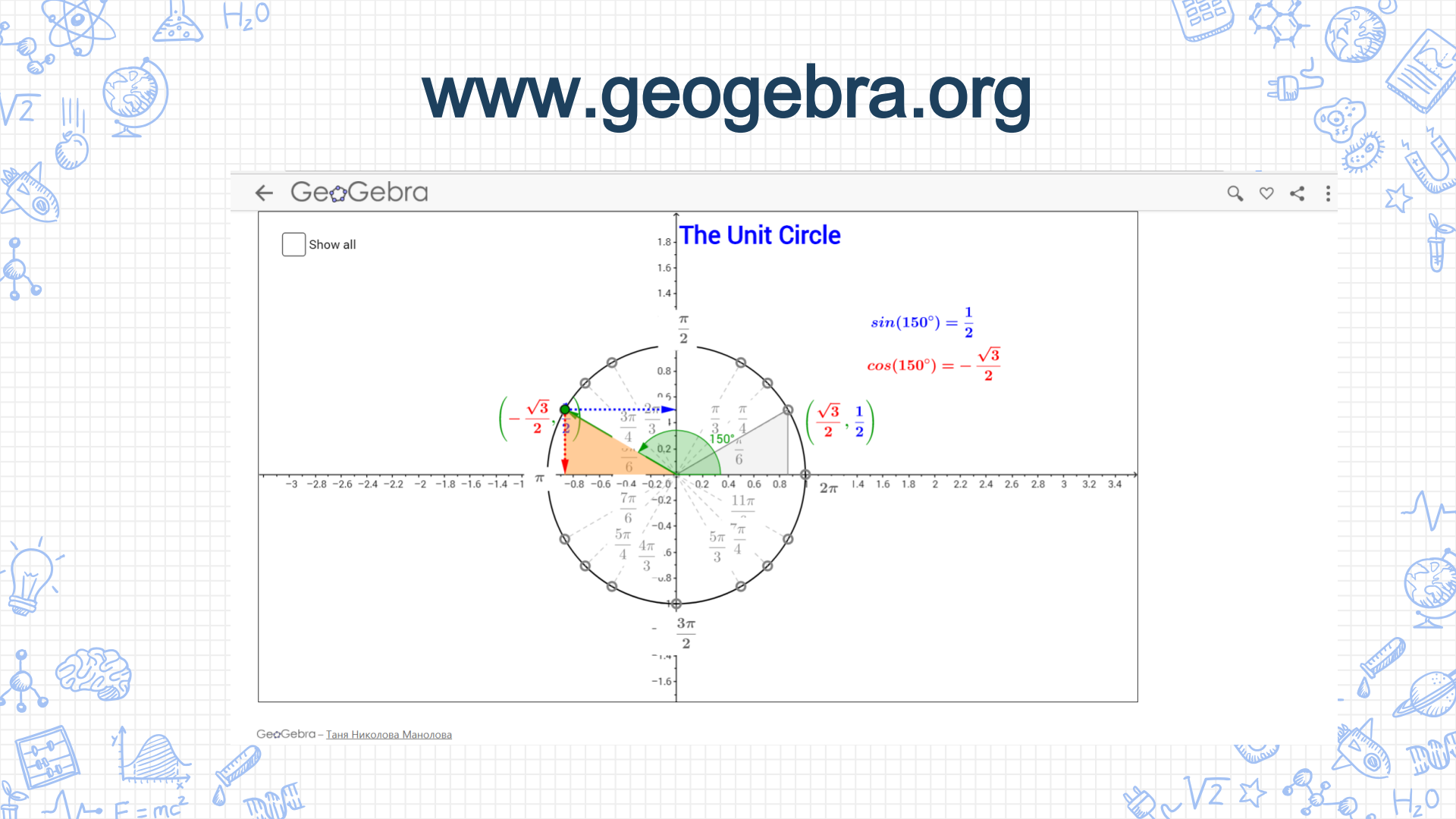


www.geogebra.org

← GeoGebra



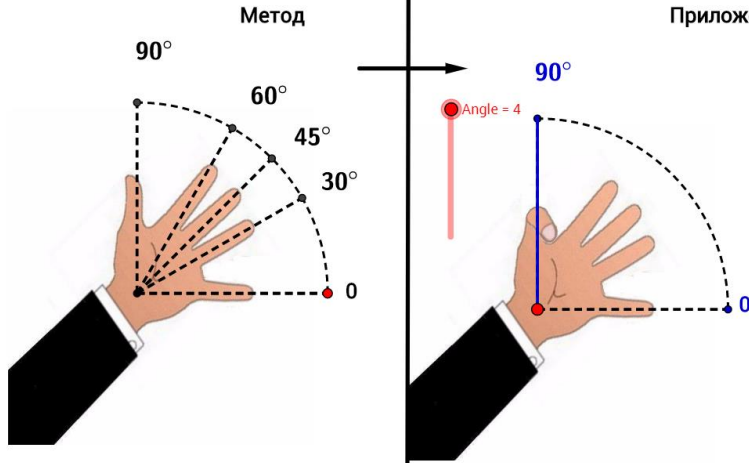
GeoGebra – Таня Николова Манолова



Choose language here

Български

Английски



Синусът от ъгъла е $\frac{\sqrt{\text{Броят на пръстите от долу}}}{2}$

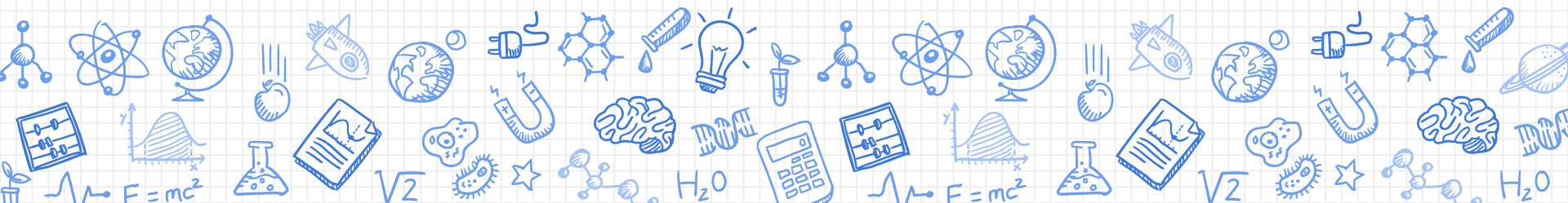
Косинусът на ъгъла е $\frac{\sqrt{\text{Броят на пръстите от горе}}}{2}$

Няма пръсти над

Sinus

Cosinus

Сайтове за игри и състезания



www.cram.com

SCORE
0

II PAUSE



TIME
3:14.5



Триъгълник

Квадрат

Равнобедрен
трапец

Отсечката, която дели
съответният ъгъл на
две равни части.

Периметър P на $\triangle ABC$
е сбор от страните му.
 $P_{\triangle ABC} = a + b + c$

Трапец с
равни бедра

Разностранен
триъгълник

Ромб

Симетрала

Отсечка, която е
перпендикулярна на
страна и минава през
срещуположната връх

Триъгълник с
различни страни

Отсечката, която съединява
връх със средата на
срещуположната му страна

Периметър на
триъгълник

Успоредник

Трапец

Успоредник с
равни съседни
страни

Четириъгълник, на които
срещуположните страни
са успоредни

Геометрична фигура, която
се състои от три точки,
нележащи на една права,
и съединяващите ги три...

Връхни
(противоположни)
ъгли

Височина

Ъглополовяща

Два ъгъла, които имат
общо рамо, а другите им
рамене са
противоположни лъчи

Права, която минава
през средата на
отсечката и е
перпендикулярна на нея

Четириъгълник, на който
само една двойка
срещуположни страни са
успоредни

Медиана

Медицентър


Външен ъгъл

Правоъгълник с равни
съседни страни или ромб
с прав ъгъл се нарича
квадрат

Пресечната точка
на трите медиани
в триъгълника.

Ъгъл, който е
съседен на вътрешен
ъгъл на триъгълника

CARD 1 OF 15

LIVES 

Пресечната точка на трите медиани в триъгълника.



МЕДИЦЕНТ



MENU

MUTE

SCORE

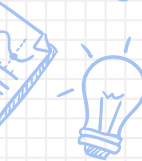
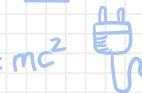
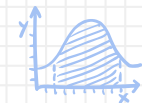
383

www.symbaloo.com



My Learning Paths Marketplace

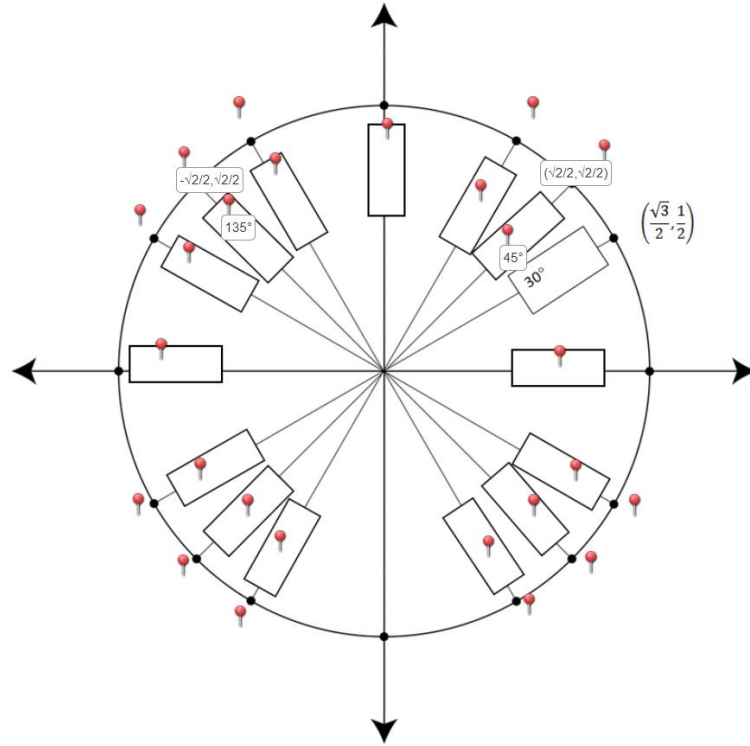
Подобие



0%

Start →

www.learningapps.org



www.quizizz.com

QUIZZZ

Search for questions... [Go!](#) ✓ Saved! [Tutorial](#) [Finish](#)



[Edit Quiz Info](#)

1. На колко е равно x ?

2. На колко е равно x ?

3. Намерете липсващата стран

4. Коя страна кореспондира с A

5. Двойката фигури на картинката  

6. Двойката фигури на картинката




7. Двойката правоъгълни триъг

8. Двойката фигури на картинката

9. Двойката фигури на картинката

10. Двойката фигури на картинката

[+ New Question](#)

T^2 T_2    € NEW Time: 60 sec [Remove Image](#)

Двойката фигури на картинката са подобни. Намерете липсващата страна.

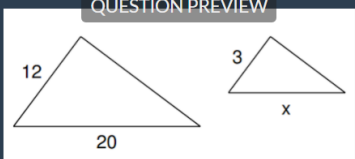
$x = 20$ ✗ incorrect

$x = 12$ ✗ incorrect

$x = 5$ ✓ correct

$x = 4$ ✗ incorrect

QUESTION PREVIEW



Двойката фигури на картинката са подобни. Намерете липсващата страна.

$x = 20$ $x = 12$

$x = 5$ $x = 4$ [Help](#)

www.kahoot.it

Има защита | <https://create.kahoot.it/#quiz/9536f1e2-fc24-4e5e-9878-2f1ed42fc820>

New K! My Kahoots Find Kahoots FAQ Support

L_manolova Kahoot!

Back

Статистика-обобщение [Edit](#)

Обобщение

Play Challenge

Preview Favorite Duplicate Share

f t p g+ e

Or, copy & share this link: <https://play.kahoot.it/#/k/9536f1e2-fc24-4e5e-9878-2f1ed42fc820>

Type: Quiz Visibility: Public Created: 8 months ago By: t_manolova Audience: School Language: български език

| | | | | |
|--------------|----------|------------|-------------|----------|
| 14 Questions | 22 Plays | 79 Players | 0 Favorites | 0 Shares |
|--------------|----------|------------|-------------|----------|

Questions [Show ALL answers](#)

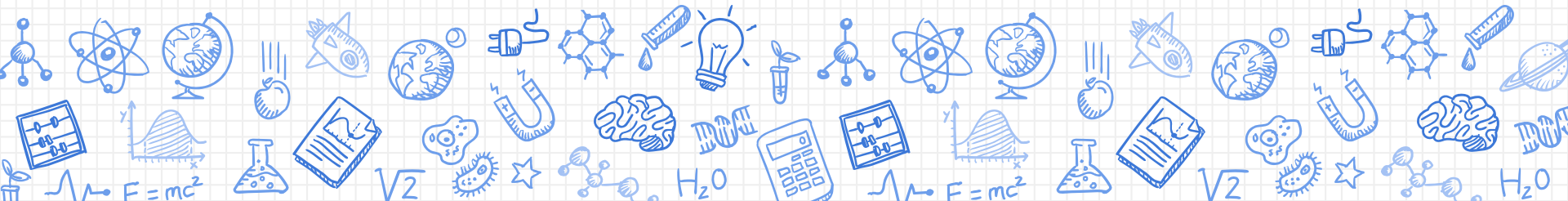
1. Числото, което показва колко пъти дадена стойност се среща измежду данните, се нарича: [Show answers](#)

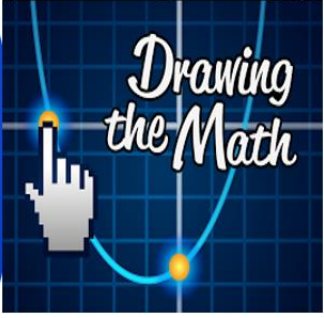
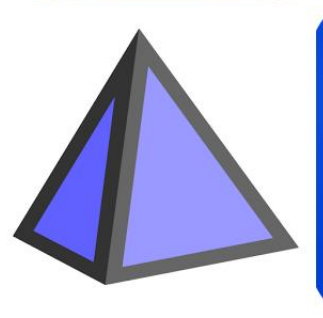
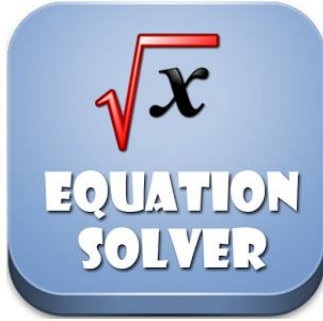
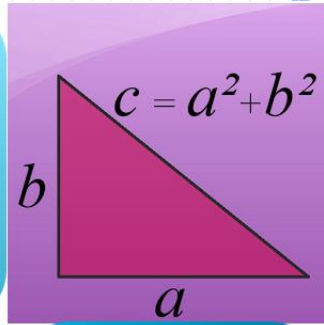
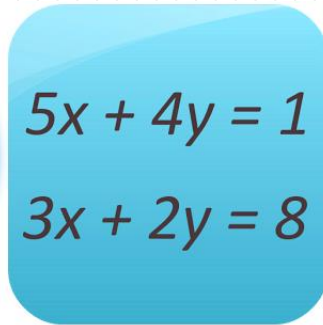
30 Seconds 4 Choices

2. Абсолютната честота, разделена на общия брой данни, които имаме, се нарича: [Show answers](#)

30 Seconds 4 Choices

Мобилни приложения





Trigonometry. Unit circle.

