

Динамичната система Sam в подкрепа на изследователския стил на студентите в синтетичната геометрия 2011

Бистра Царева

Увод

През последните десетилетия в света бяха направени забележителни опити в използването на компютърните алгебрични системи в учебния процес в училищата и университетите. Първият тип системи е общ и включва толкова инструменти за решаването на математическите задачи, колкото е възможно. Такива са Mathematica, Maple, MatLab. Вторият тип - Динамичните геометрични системи (Dynamic Geometry System DGS) са развити главно за удовлетворяване на нуждите на часовете по геометрия и алгебра. Много силни DGS са GeoGebra, Cinderella, GeoNext, Sketchpad. Друг тип е фамилията на специализираните системи, които са развити, за да подпомогнат учебния процес на специфичните математически курсове, като например РІАС. Към тази фамилия можем да причислим и специализирания образователен DGS Sam, създаден за нуждите на курса по Синтетична геометрия на Пловдивски университет "Паисий Хилендарски" от малък творчески колектив, включващ и студента Самет Караибрямов. Със своята нова функция "Размяна на крайна и безкрайна точки", вградена в менюто му, той оптимизира значително преподаването и изучаването на геометрията и обогатява възможностите на преподавателя да замени стария принцип "научи и повтори" с нов "научи и твори".

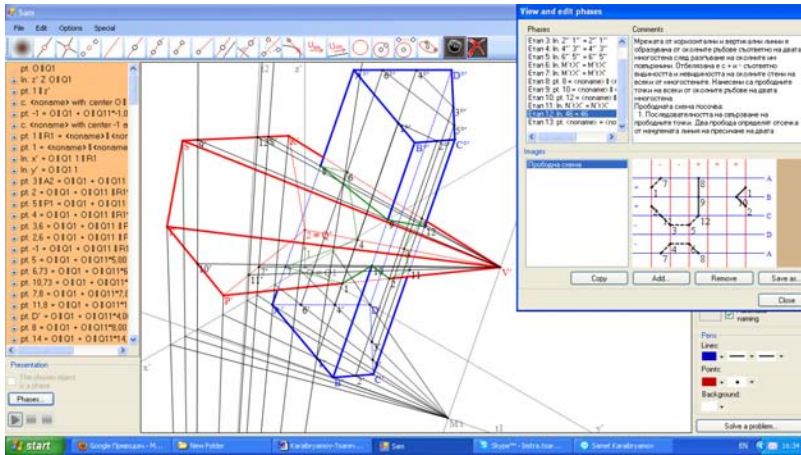
§1 Взаимно пресичане на мостени в аксонометрия

Първата версия на DGS Sam беше развита във връзка с интерактивното обучение на студентите по темата "Взаимно пресичане на мостени в аксонометрия" [1, 2]. Темата е не само обширна по съдържание, но процесът на преподаване както и процесът на научаване от студентите изисква много технологично време поради спецификата при решаването на задачите. Програмата Sam, написана на C#, използвайки .NET framework 4 предлага на ползвателя решението на задачата във всяка от петте популярни аксонометрични проекции (кабинетна проекция, кавалиерна или военна перспектива, правоъгълна изометрия, диметрия или триметрия). Студентът има възможност да ги разгледа, да направи своя избор и там да проследи детайлно всяка стъпка на решението и коментарите относно тях. Студентът може да манипулира всеки обект от чертежа или да приложи върху целия чертеж ротация, трансляция, разширяване, свиване и т.н. Той може да наблюдава от всички страни въртящото се 3D изображение на композицията на двата пресичащи се мостена както и на общата им част. Така за максимално кратко време студентът изучава задълбочено темата. С помощта на софтуера и нашата класификация на прободните точки на околните ръбове ние успяхме да превърнем обучението по темата в творчески процес. Курсовите работи на студентите съдържат техни импровизации върху конкретна задача. Ще илюстрираме тази възможност чрез една импровизация върху следната задача:

Задача 1. Представете взаимното пресичане на призмата $ABCD A^{\circ} B^{\circ} C^{\circ} D^{\circ}$ [$A(3; 1; 0)$, $B(5; 6,73; 0)$, $C(3,6; 7,8; 0)$, $D(0; 4; 0)$, $A^{\circ}(2; 5; 14)$] и пирамидата $VPQRST$ [$V(3; 15; 9)$, $P(5; 0; 1)$, $Q(0; 0; 2)$, $R(1; 0; 7,5)$, $S(7,5; 0; 10,5)$, $T(8,46; 0; 6,4)$].

Решение Основите на призмата и пирамидата лежат съответно в координатните равнини μ и ν . Ето защо на чертежа трябва да се появят първите и вторите дири на спомагателните равнини. Околните ръбове DD^0 , VS и VT няма да участват в пресичането, защото

техните стъпки са разположени в изолираните части. Тъй като има изолирани части върху всеки многостен, то имаме случай на зазъбване със следната линия на пресичане: 1, 10, 2, 11, 3, 5, 12, 9, 8, 6, 4, 7, 1. Решението на тази задача, както и на следващите четири е представено в увеличена правоъгълна изометрия.



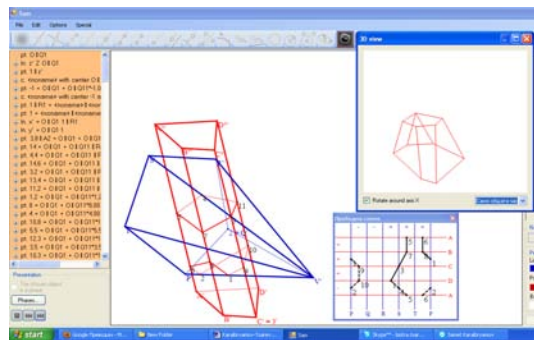
Фигура 1 **Задача 1.**

Ние можем да променим условието (координатите на върховете), за да получим друг тип на пресичане. С помощта на програмата Sam и нашата класификация на прободните точки ние съставихме няколко нови задачи, които представяме на вашето внимание.

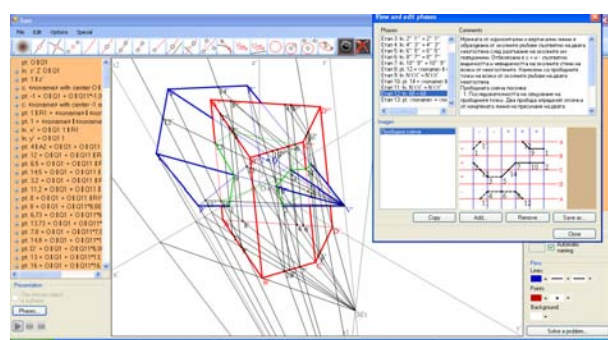
Като начало нека изискаме *проникване на призмата в пирамидата*. Това означава, че трябва да се разположат две изолирани части върху основата на пирамидата.

Задача 1. 2. Представете взаимното пресичане на призмата $ABCD A^0 B^0 C^0 D^0$ [$A(3,8; 1,2; 0)$, $B(4,4; 4; 0)$, $C(3,2; 5,5; 0)$, $D(1; 3,5; 0)$, $A^0(14; 8; 20,5)$] и пирамидата $VPQRST$ [$V(12; 19; 14)$, $P(3,5; 0; 0,5)$, $Q(0; 0; 2)$, $R(1; 0; 7,5)$, $S(6,5; 0; 10,5)$, $T(8,46; 0; 6,4)$].

Решение Нашият избор е околните ръбове VQ , VR и VT на пирамидата да не прободат призмата. Изискваме още околните ръбове CC^0 и VS да имат обща спомагателна равнина. Следователно те се пресичат и това е точка 3. Линията на пресичане се състои от две затворени начупени линии.



Фигура 2 **Задача 1.2**



Фигура 3 **Задача 1.3**

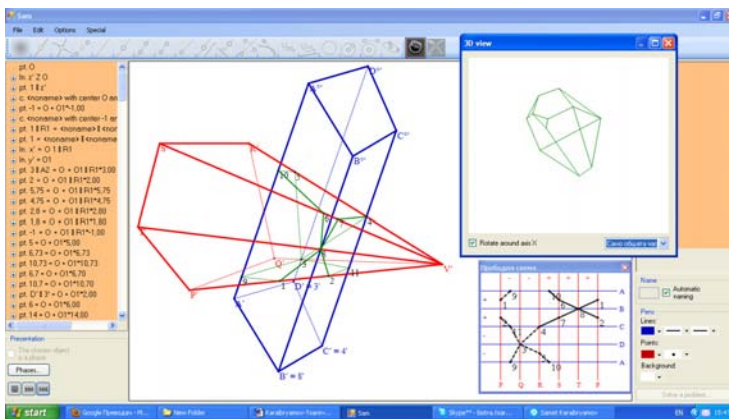
На Фигура 2 са представени двата пресичащи се многостена без дирите на спомагателните равнини, прободната схема и един изглед на общата част на двете тела.

В следващата Задача 1.3 запазваме вида на пресичане, но изискваме *проникване на пирамидата в призмата*. За постигане на тази цел е достатъчно да осигурим две изолирани части в основата на призмата.

Задача 1.3 Представете взаимното пресичане на призмата $ABCD A^{\circ} B^{\circ} C^{\circ} D^{\circ}$ [$A(4; 1; 0)$, $B(6,5; 6,73; 0)$, $C(3,2; 7,8; 0)$, $D(0; 6; 0)$, $A^{\circ}(12; 8; 16)$] и пирамидата $VPQRST$ [$V(12; 19; 14)$, $P(5; 0; 2)$, $Q(0; 0; 2)$, $R(1; 0; 7,5)$, $S(7,5; 0; 10,5)$, $T(8,46; 0; 6,4)$]. (Фигура 3)

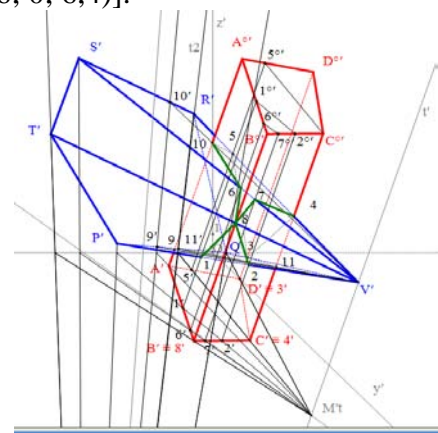
В следващата задача са включени две допирни точки.

Задача 1.4 Представете взаимното пресичане на призмата $ABCD A^{\circ} B^{\circ} C^{\circ} D^{\circ}$ [$A(3; 1; 0)$, $B(5,75; 6,73; 0)$, $C(2,8; 6,7; 0)$, $D(0; 2; 0)$, $A^{\circ}(2; 5; 14)$] и пирамидата $VPQRST$ [$V(3; 15; 9)$, $P(5; 0; 1)$, $Q(-0,7; 0; 0)$, $R(1; 0; 7,5)$, $S(7; 0; 10,5)$, $T(8,46; 0; 6,4)$].



Фигура 4

Задача 1.4

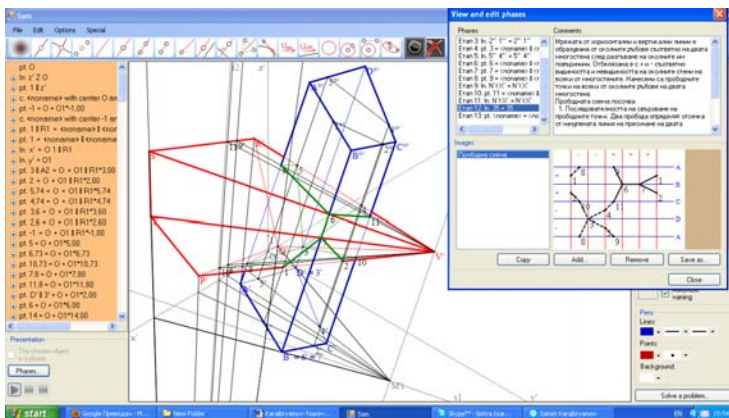


Решение Както е видно от

Фигура 4 двете допирни точки са : $8 = BB^{\circ} \cap VT$ и $3 = DD^{\circ} \cap VQ$. Това е постигнато чрез съвпадане на спомагателните равнини за двете двойки околни ръбове BB° , VT и DD° , VQ и едновременното изискване тези спомагателни равнини да са допирателни.

Продължаваме да разнообразяваме типа на пресичане, включвайки и допирна отсечка.

Задача 1.5 Представете взаимното пресичане на призмата $ABCD A^{\circ} B^{\circ} C^{\circ} D^{\circ}$ [$A(3; 1; 0)$, $B(5,74; 6,73; 0)$, $C(3,6; 7,8; 0)$, $D(0; 2; 0)$, $A^{\circ}(2; 5; 14)$] и пирамидата $VPQRST$ [$V(3; 15; 9)$, $P(5; 0; 1)$, $Q(-0,7; 0; 0)$, $R(1; 0; 7,5)$, $S(8,57; 0; 10,5)$, $T(8,46; 0; 6,4)$].



Фигура 5

Задача 1.5

Решение В тази задача сме включили една допирна точка и допирна отсечка .

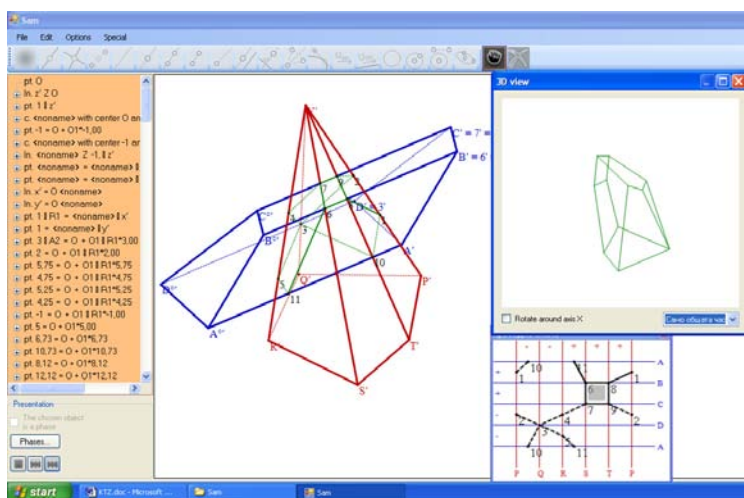
За целта допирната точка 3 от предходната задача е съхранена, но е осигурено спомагателните равнини на трите околни ръба VS , VT и BB° да съвпадат, което гарантира наличие на допирната отсечка 67, раз-

положена върху ръба BB° и в стената VST на пирамидата.

Задача 1.6 Представете взаимното пресичане на призмата $ABCD A^\circ B^\circ C^\circ D^\circ$ [$A(3; 1; 0)$, $B(5,75; 6,73; 0)$, $C(5,25; 8,12; 0)$, $D(0; 3,3; 0)$, $A^\circ(2; 5; 14)$] и пирамидата $VPQRST$ [$V(3; 15; 9)$, $P(5; 0; 1)$, $Q(-1,6; 0; 1,8)$, $R(1; 0; 7,5)$, $S(8,58; 0; 10,5)$, $T(8,46; 0; 6,4)$].

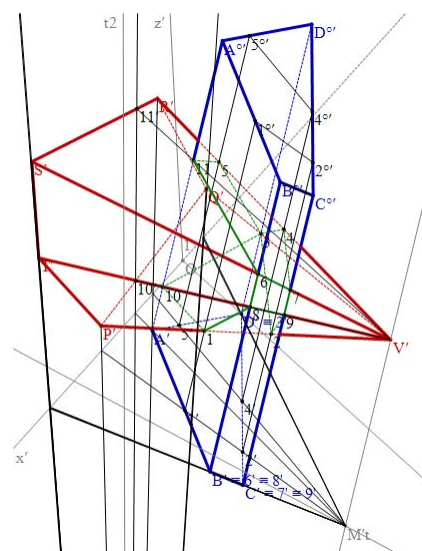
Решение В Задача 1.6 сме включили *допирна точка 3* и *допирна площ, представена чрез трапеца 6798*. Това се случва, защото двойките от съседни околни ръбове VS , VT и BB° , CC° имат обща спомагателна равнина.

Решението е представено във военна перспектива на Фигура 6 и след ротация на Фигура 7.



Фигура 6

Задача 1.6



Фигура 7

В приложението представяме курсовите работи на няколко студента.

Новият подход при изучаването на взаимното пресичане на призми и пирамиди превръща учебния процес по темата в умна и забавна игра. Той е подходящ и за специализираните средни училища по строителство и архитектура и приложим при дистанционно обучение.

1. Образователният софтуер Сам позволява да се предаде и изучи целия спектър от задачи по темата "Взаимно пресичане на пирамиди и призми в аксонометрия" за най-кратко време.
2. Представянето на решението на всяка задача с проследяване на всяка стъпка в изграждането на линията на пресичане на двата многостена е една чудесна възможност за студентите да се обучават самостоятелно.
3. Софтуерът Сам и класификацията на прободните точки на околните ръбове стимулира и улеснява творческа дейност на студентите. Учителите и учениците могат да създадат лесно и бързо не само стандартни задачи, но могат да съставят задачи с точки на допиране, сегмент на допиране, допирна площ или техни комбинации, които не присъстват в известните книги и учебници.
4. Въртенето на перспективните изображения на композицията на двата пресичащи се многостена както и на тяхната обща част и възможността за корекции на дизайнерските

решения при избора на цветовете на линиите и фона подобряват зрителното възприемане на 3D изображенията.

§ 2 Оптимизиране на обучението по синтетична геометрия чрез DGS Sam

Абстрактното аксиоматично изграждане на проективното пространство може да бъде реализирано в различни модели. Най-разпространеният модел е евклидовият и повечето чертежи се изпълняват там. Добре известно е, че безкрайните елементи (точки и права) играят важна роля в Евклидовия модел на проективното пространство. Ето защо DGS Sam School със своите нови обекти (произволна безкрайна точка и безкрайната точка на дадена права), включени като инструменти и новата функция “Размяна на крайна & безкрайна точки”, включена в менюто му, помага да се преодолеят обичайните затруднения в научаването на синтетичната геометрия, дава възможност за оптимизиране на учебния процес чрез спестяване на много чертожно време, за обобщаване на широки групи от задачи, за стимулиране и подпомагане на изследванията, за формиране на творчески стил на мислене, за осъществяване на вертикална интеграция на обучението по геометрия в университета и средното училище [3, 4, 5].

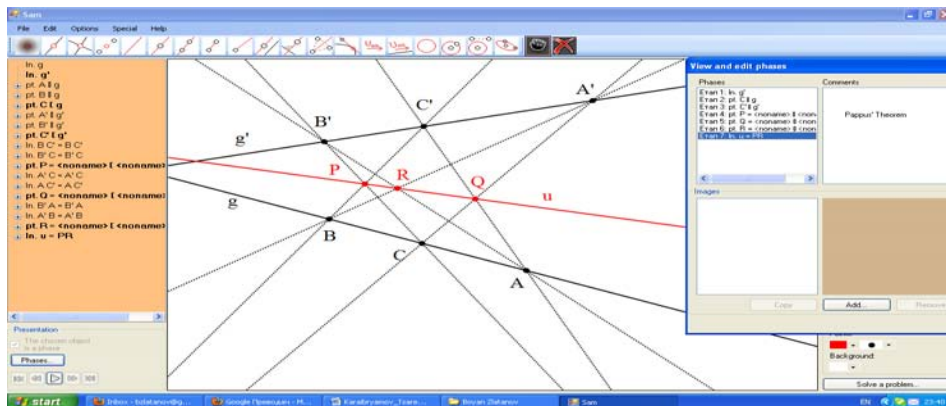
Определение 1 Задачите, които се генерират от Задача А с помощта на функцията “Размяна на крайна & безкрайна точки” ще наричаме *стътници на Задача А*.

Определение 2 Фигурите, които се получават една от друга чрез прилагане на функцията “Размяна на крайна & безкрайна точки” ще наричаме *свързани фигури*.

В DGS Sam School е затворена програмата за взаимно пресичане на пирамиди и призми в аксонометрия за улеснение на ползвателя, който не се интересува от тази тема.

Ще илюстрираме ползите от прилагане на DGS Sam School чрез една конкретна задача, която се решава с помощта на една от основните теореми на проективната геометрия

Теорема на Пап: Нека са дадени две прави g и g' . Ако $A, B, C \in g$ и $A', B', C' \in g'$, то точките $P=BC' \cap CB'$, $Q=AC' \cap CA'$, $R=AB' \cap BA'$ са колинеарни.



Фигура 8 (Теорема на Пап)

Основна теорема на проективната геометрия: Ако A, B, C са три различни обекта от едноизмеримата фигура f и A', B', C' са три различни обекта от едноизмеримата фигура f' , то съществува точно една проективност $\varphi: f \rightarrow f'$ така че $\varphi(ABC) = A'B'C'$.

Фигурите f и f' могат да бъдат редове точки или снопове прави. Те могат да бъдат различни или да съвпадат. Студентите трябва да знаят да намират обектите

$$X' = \varphi(X) \text{ и } Y' = \varphi^{-1}(Y'), \text{ където } X \in f \text{ и } Y' \in f'.$$

Задача 2. Нека φ е проективност на реда точки g върху реда точки g' , така че $\varphi(A B C) = A' B' C'$, където A, B, C са точки от реда точки g и A', B', C' са точки от реда точки g' .

- i) Намерете точките $X' = \varphi(X)$ и $Y = \varphi^{-1}(Y')$, където $X \in g$ и $Y' \in g'$ са произволни точки;
- ii) Опишете кривите от втори клас, породени от проективността $\varphi: g \rightarrow g'$, когато $X \in g$ е произволна.

Решение : Добре известно е, че Теоремата на Пап и нейната дуална теорема предлагат най-симетричната конструкция за намирането на точките X' и Y . Ето защо ние ще представим решение, където конструкцията се основава на Теоремата на Пап. Съществен елемент в тази конструкция е оста на проективността

$u = (AB' \cap A'B) (BC' \cap B'C) = 1-2$ (Фигура 8). Тъй като $\varphi = \pi_2 \circ \pi_1$, където $\pi_1: g \xrightarrow{B'} u$ и

$\pi_2: u \xrightarrow{B} g'$ са перспективности, то

$\varphi(X) = \pi_2 \circ \pi_1(X) = \pi_2(3) = X'$ или $X' = 3B' \cap g'$, където $3 = XB' \cap u$;

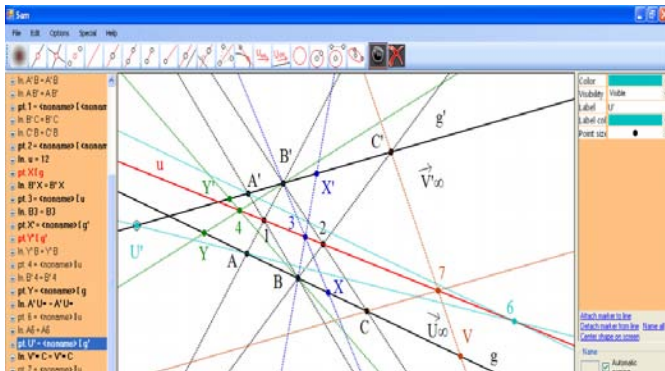
$\varphi^{-1}(Y') = (\pi_1)^{-1} \circ (\pi_2)^{-1}(Y') = (\pi_1)^{-1}(4) = Y$ или $Y = 4B' \cap g$, където $4 = BY' \cap u$.

Ние ще намерим също и убежните точки $U' = \varphi(U_\infty) = 6A' \cap g'$, където $6 = U_\infty A' \cap u$ и

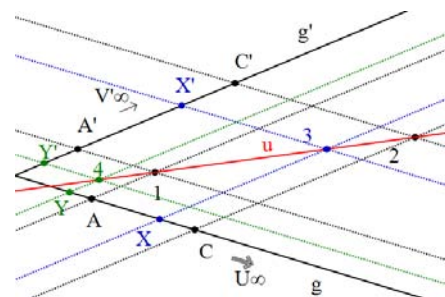
$V = \varphi^{-1}(V'_\infty) = 7C' \cap g$, където $7 = V'_\infty C' \cap u$.

Конструкциите могат да бъдат проследени чрез динамичния чертеж Фигура 8.

Движейки точката X върху правата g (или точката Y' върху правата g'), студентите наблюдават намирането на образа X' (или първообраза Y) за произволна точка. \square



Фигура 9



Фигура 10

Чрез размяна на крайната точка B с безкрайната точка U_∞ на правата g и на крайната точка B' с безкрайната точка V'_∞ на правата g' получаваме следните спътници на Задача 2 с техните решения:

Задача 2.1 Нека φ е проективност на реда точки g върху реда точки g' , като φ е зададена чрез едно от следните условия:

- a) $\varphi(A U_\infty C) = A' B' C'$;
- b) $\varphi(A B C) = A' V'_\infty C'$;
- c) $\varphi(A U_\infty C) = A' V'_\infty C'$ (Фигура 10).
- i) Намерете точките $X' = \varphi(X)$ и $Y = \varphi^{-1}(Y')$, където $X \in g$ и $Y' \in g'$ са произволни точки;
- ii) Опишете кривите от втори клас, породени от проективността $\varphi: g \rightarrow g'$, когато X е произволна.

Преподавателят (използвайки проектор) и студентите (всеки използва компютър) решават Задача 2 заедно. На края студентите представят решението, прилагайки динамика върху свободните обекти и коментират стратегията на избора на свободните обекти. Те генерират задачи-спътници чрез функцията “Размяна на крайна & безкрайна точки” и само проследяват и обясняват конструкциите, които вече Sam е направил. Те движат някои от свободните обекти $g, g', A, B, C, A', B', C'$ и получават различен изглед на чертежите, но конструкцията е една и съща.

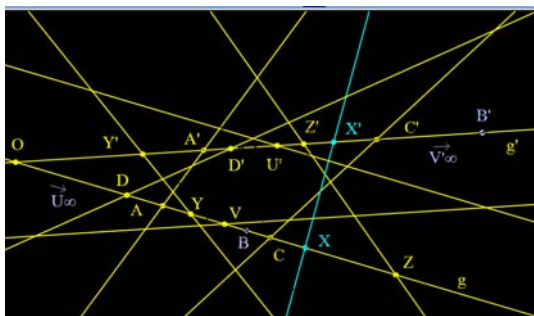
Преди да се въведе функцията “Размяна на крайна & безкрайна точки” бе необходимо решението на всяка от задачите спътници да бъде чертано отново, започвайки се от бяло поле.

Изготвените динамични чертежи, изработени по темата „Допълване на проективност между редове точки” могат да се допълнят със съединителните прави на двойките съответни точки, за да се визуализират неизродените и изродените криви от втори клас. Такава визуализация липсва в учебниците по проективна геометрия. Ние развихме тази идея, предложена ни от проф. П. Русев. Фигури 11, 12, 13, 14 са кадри от едноименните динамични чертежи.

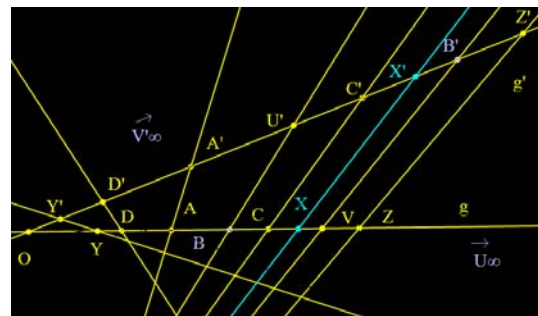
Съгласно Дефиницията на Щайнер точно съединителните прави на двойките съответни точки описват кривата от втори клас $K(g, g'; \varphi)$, когато точката X описва реда точки g (Фигура 11). В случая с) на Задача 2.1 проективността φ е подобност и кривата от втори клас K е множеството от допирателните към парабола (Фигура 12). Естествено следващият интересен момент да се илюстрира пред студентите е процесът на генериране на изродените криви от втори клас. Ние леко и бързо показваме на студентите случаите, когато проективностите $\varphi: g \rightarrow g'$ от Фигури 11 и 12 се трансформират в перспективности. За това е достатъчно да изберем $A=A'=g \cap g'=O$. Така пред очите на студентите от Фигури 11 и 12 се получават съответно Фигури 13 и 14. Следват самостоятелните опити на студентите да генерират изродените криви от втори клас на персоналните си компютри.

Възможно е да се скрият част от конструктивните линии, за да се акцентира върху кривите от втори клас и само те да останат на екрана. Това се постига чрез подходящ избор на линиите и фона. Чрез Фигури 11, 12, 13 и 14 е посочено едно решение на този проблем.

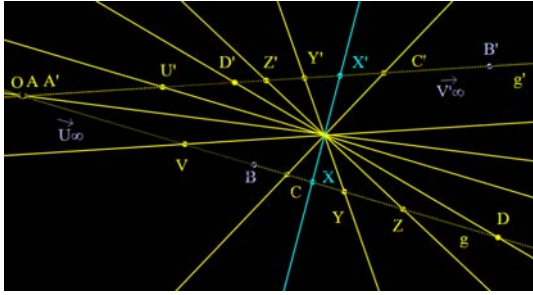
Функцията “Размяна на крайна & безкрайна точки” на DGS Sam предлага възможност за кратко по време изчерпателно и задълбочено изследване и визуализиране на кривите от втори клас.



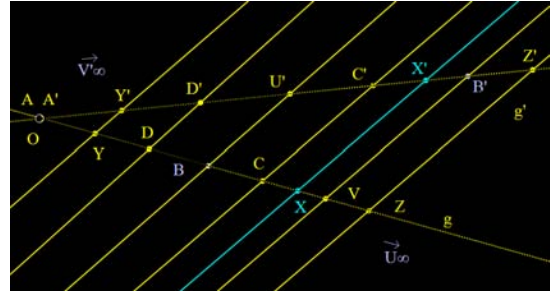
Фигура 11



Фигура 12



Фигура 13



Фигура 14

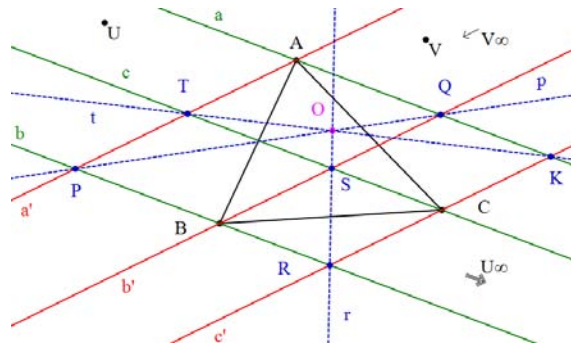
§3 Приложение на Теоремата на Пап за решаване на задачи от училищния курс по геометрия.

Използването на специализирания софтуер Sam в часовете по синтетична геометрия подпомага осъществяването на вертикална интеграция на обучението в университета и средното училище. Предлагаме на вашето внимание само един пример

Задача 3 През върховете на триъгълника ABC са построени три двойки прави (a, a') , (b, b') и (c, c') , така че $a \parallel b \parallel c$ и $a' \parallel b' \parallel c'$. Сред успоредниците, които се образуват чрез тези прави има три, за които AB, BC, CA са диагонали. Докажете, че вторите диагонали на тези три успоредника минават през една точка.

Решение: При означенията на Фигура 15.1 успоредниците, за които AB, BC, CA са диагонали са $AQBP, BRCS, ATCK$. Нека означим с U_∞ общата точка на успоредните прави a, b, c и с V_∞ общата точка на успоредните прави a', b', c' .

Най-краткото решение на тази задача е чрез прилагане на Теоремата на Пап за тройките от колинеарни точки P, T, V_∞ и K, Q, U_∞ . Веднага получаваме, че точките $O = TK \cap PQ, S = TU_\infty \cap QV_\infty, R = KV_\infty \cap PU_\infty$ са колинеарни, т.е. правите TK, PQ, SR са конкурантни. \square



Фигура 15.1

Функцията “Размяна на крайна & безкрайна точки” на DGS Sam не само ни провокира да формулираме две нови задачи спътници, разменяйки U_∞ с U и V_∞ с V , но също така ни предлага веднага съответните чертежи.

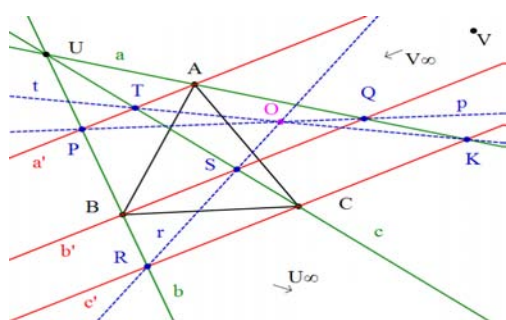
Задача 3.1 През върховете на триъгълника ABC са построени три двойки прави (a, a') , (b, b') и (c, c') , така че a, b, c са инцидентни с произволна точка U и $a' \parallel b' \parallel c'$. Сред трапезите, които се образуват чрез тези прави има три, за които AB, BC, CA са диагонали. Докажете, че вторите диагонали на тези три трапеца минават през една точка (Фигура 15.2).

Доказателството за това твърдение е буквално същото. Трябва просто да се приложи Теоремата на Пап за тройките колинеарни точки P, T, V_∞ и K, Q, U .

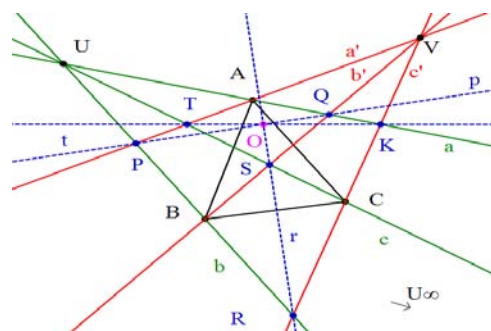
Задача 3.2 През върховете на триъгълника ABC са построени три двойки прави (a, a') , (b, b') и (c, c') , така че a, b, c са инцидентни с произволна точка U и a', b', c' са инцидентни с произволна точка V . Сред четириъгълниците, които се образуват чрез тези прави има три, за които AB, BC, CA са диагонали. Докажете, че вторите диагонали на тези три четириъгълника минават през една точка (Фигура 15.3).

Доказателството е същото като сега трябва да се приложи Теоремата на Пап за тройките колинеарни точки P, T, V и K, Q, U .

Учениците могат да прилагат динамика върху свободните точки $(A, B, C, U_\infty, V_\infty, U, V)$ и да наблюдават съхраняването на конкурантността на правите TK, PQ, SR .



Фигура 15.2



Фигура 15.3

Динамичните чертежи и двата софтуера DGS *Sam full* и DGS *Sam school* можете да изтеглете от следния адрес <http://fmi-plovdiv.org/GetResource?id=1786>.

References

- [1] Samet Karaibryamov, Bistra Tsareva, One application of the informatics in the descriptive geometry, *REMIA, 2010, Proceedings of the Anniversary International Conference, 10-12 Decembre, 2010*, 355-362.
- [2] Samet Karaibryamov, Bistra Tsareva, Boyan Zlatanov, Educational software for interactive training of students on the theme “Mutual intersecting of pyramids and prisms in axonometry”, *Acta Didactica Napocensia, Volume 5, Number 1, 2012*, 29-43.
- [3] Боян Златанов, Самет Караибрямов, Бистра Царева, [Вертикална интеграция на обучението в средното училище и университета чрез проективни методи в динамична среда](#), *Математика +*, **1**, 2012, 50-60.
- [4] Boyan Zlatanov, Samet Karaibryamov, Bistra Tsareva, [On a New Function in the Dynamic Software, Software and Sketches \(Чертежи\)](#), Практически семинар по проекта Fibonacci, Боровец 9-12.04.2012.
- [5] Бистра Царева. Интерактивно обучение по синтетична геометрия в динамична среда. МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКО ОБРАЗОВАНИЕ, Proceedings of the Forty First Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians Borovetz, April 9–12, 2012, 401-407.