Добри практики в образованието
по математика и ИТ
за развиване на
ключови компетентности

Тони Чехларова, Евгения Сендова
(редактори)

Lifelong
Learning
Programme

Comenius Multilateral Project: Developing Key Competences by Mathematics Education Project
(Развиване на ключови компетентности чрез математическото образование)

www.KeyCoMath.eu

Редактори: Тони Чехларова, Евгения Сендова
Художник на корицата: Калина Сотирова
Графично оформление: Калина Сотирова

ISBN 978-954-561-389-0

Проектът *KeyCoMath* е финансиран със съдействието на
програма "Учене през целия живот" на Европейския съюз.

СЪДЪРЖАНИЕ

Всичко започна с триъгълника на Паскал...

Елисавета Стефанова
sou73sof@abv.bg
73.СОУ „Владислав Граматик“, София

Резюме: Това е разказ за много емоции и труд, които започват от една извънкласна задача – триъгълника на Паскал, и съпровождат един процес, в който действахме като изследователски екип с моите седмокласници. С помощта на електронните таблици и динамичния софтуер *GeoGebra* развихме идеите, повишихме някои ключови умения и успяхме да открием много красота в математиката. Работата ни, въпреки че на моменти приличаше на забавна игра и не беше по програмата в училище, затвърди важни математически знания, постави интересни въпроси и ни накара да се чувстваме творци.

Ключови думи: *изследователски подход, триъгълник на Паскал, триъгълник на Серпински, дигитална компетентност, математическа компетентност, усет за инициатива*

1. Когато не знаем отговора на въпроса

Един от моите седмокласници (Росен от 7а клас) ме попита за триъгълника на Паскал. Беше чел през ваканцията за него и имаше серия от въпроси, на които нямах готовност да отговоря. Затова прибегнах до познатия трик: „Хайде сега заедно да видим какво ще стане“.

Самата аз в момента не очаквах нищо интересно, но трябваше да пробваме.

Взехме листове на големи квадратчета и започнахме да пишем числата от триъгълника на Паскал. Признавам, че се изненадах, като познах коефициентите пред неизвестните от формулите на втора, трета и четвърта степени и понеже тази година по математика започнахме с формулите за съкратено умножение, реших, че трябва да разширя кръга на заинтересованите от конструкцията на Паскал деца... Появиха се и първите въпроси:

- Защо да събираме на ръка, като можем да използваме *Excel*?

Зарадвах се на прозрението и разбира се разреших.

- А може ли да използваме copy/paste?

Отново бях приятно изненадана и докато някои събираха клетка по клетка, други вече имаха доста големи попълнени таблици.

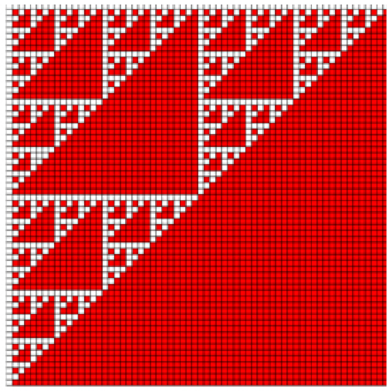
Споделих за коефициентите при втора, трета, четвърта и т.н степени на двучлен и всички много се зарадваха – дори някои споделиха, че ако се объркат и забравят някой коефициент, много бързо ще си го възстановят с триъгълника на Паскал.

Макар че все още не можех да отговоря на въпроса защо се получава така, вече имах следващо предизвикателство:

Да оцветим клетките, в които има четни числа с еднакъв цвят.

В първите клетки беше лесно – сравнително малки числа... и някои с изненада забелязаха интересна закономерност (Фигура 1).

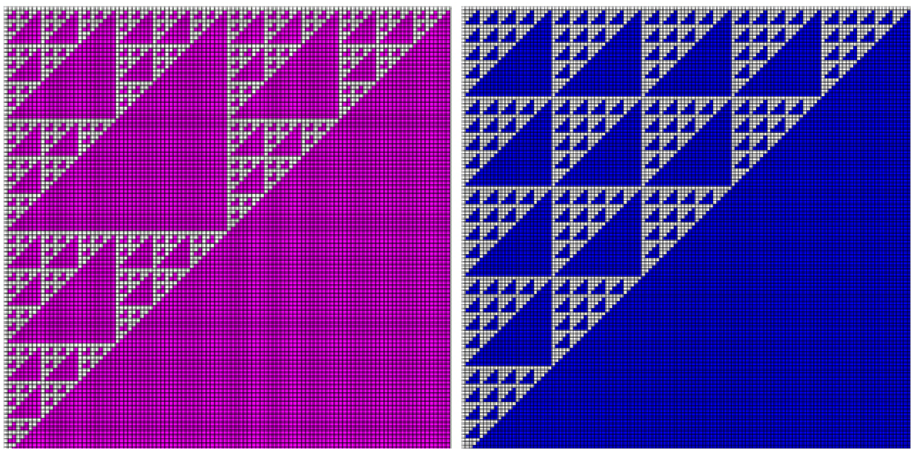
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3	6	10	15	21	28	36	45
1	4	10	20	35	56	84	120	165
1	5	15	35	70	126	210	330	495
1	6	21	56	126	252	462	792	1287
1	7	28	84	210	462	924	1716	3003
1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435
1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870



Фигура 1. Визуализация на четните числа в триъгълника на Паскал (в различен мащаб)

Веднага реших да обобщим за числата, делящи се на 3, 4, 5, 7 (тук реших да се възползвам от ентусиазма и да преговорим набързо делимостите…).

На този етап се включиха нови дечица и при деление съответно на 3 и на 5 получихме конфигурациите на Фигура 2:



Фигура 2. Визуализация на числата в триъгълника на Паскал: кратни на 3 (ляво) и на 5 (дясно)

Радвах се на многото трикове, през които минаха някои от децата, защото при големи числа разширяваха клетките, които им трябват, за да ги изследват, а после отново ги правеха малки, за да продължат. Направихме много изводи и аз самата почти бях сигурна какво ще се получи за 7.

Тук вече се сетих за функцията mod и споделих с децата, че ако бележим по някакъв начин клетките с остатък от делението 0, много лесно ще оцветим, без да проверяваме клетка по клетка, при това за делимост на произволно число.

Направихме го, а някои ми се разсърдиха, че толкова са се мъчили за нещо, което всъщност стана почти автоматично. Не ми повярваха, че и аз съм минала по техните стъпки... (А и че нов инструмент за изследване се оценява най-вече, когато е поднесен навреме.)

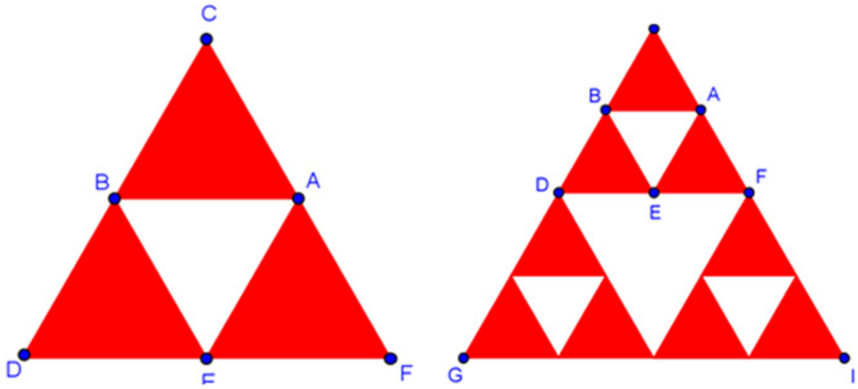
2. Нова песен на стар глас

Картинките се оказаха много интересни. Започнахме да четем в интернет и литературата за подобни на нашите резултати. Така попаднахме на понятието *триъгълник на Серпински*. В [1] той е реализиран в Comenius Logo с рекурсивна процедура, която отразява следната „динамична“ дефиниция:

Тръгваме от едноцветен триъгълник (в нашия случай червен) и изрязваме от него триъгълника с върхове средите на страните му. Прилагаме същата процедура към новополучените цветни триъгълници и т.н. Граничното множество, към което клони редицата от последователните итерации, се нарича „триъгълник на Серпински“.

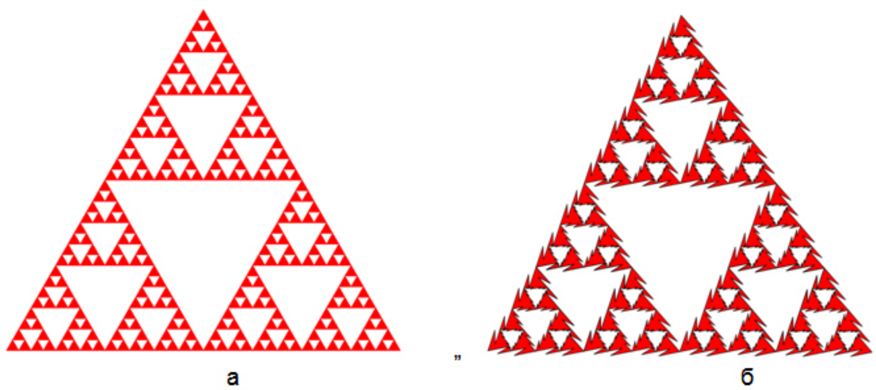
Ние решихме да реализираме последователните стъпки от този процес в познати конструкции с динамични точки в Геогебра. Ето как:

- Първоначално използвахме равностранен триъгълник ABC, който завъртяхме на 120 градуса по посока на часовниковата стрелка около точките A и B (Фигура 3а).
- След като понатрупахме опит и продължихме въртенето, забелязахме повторение.
- Следващата стъпка беше да завъртим по същия начин цялата фигура около точките D и F (Фигура 3б)



Фигура. 3 Динамичен триъгълник на Серпински: (а) първа итерация; (б) втора итерация

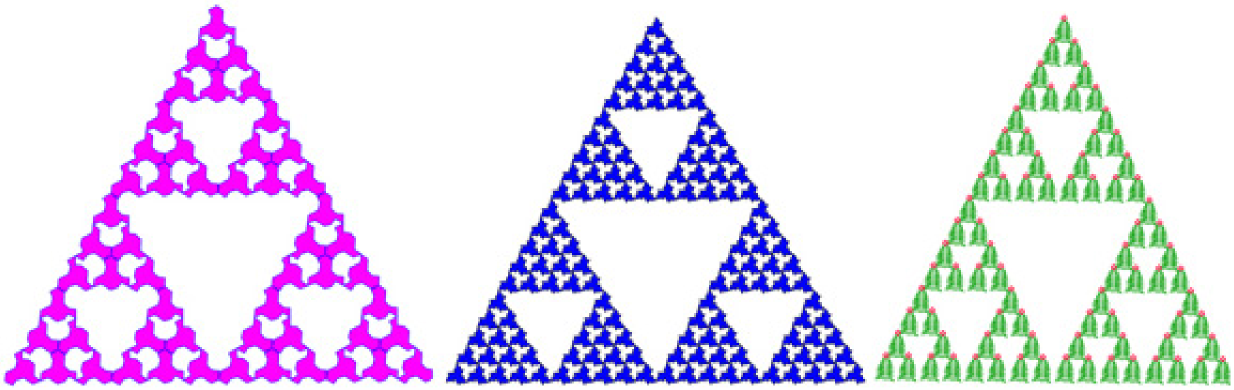
- След няколко такива стъпки стигнахме до Фигура 4а.
- Поставихме върху страните на равностранните триъгълници динамични точки, раздвижихме ги и получихме «вариация на тема» (Фигура 4б)



Фигура 4. Динамичен триъгълник на Серпински: а) след повече итерации; б) след раздвижване на върховете на изходния триъгълник

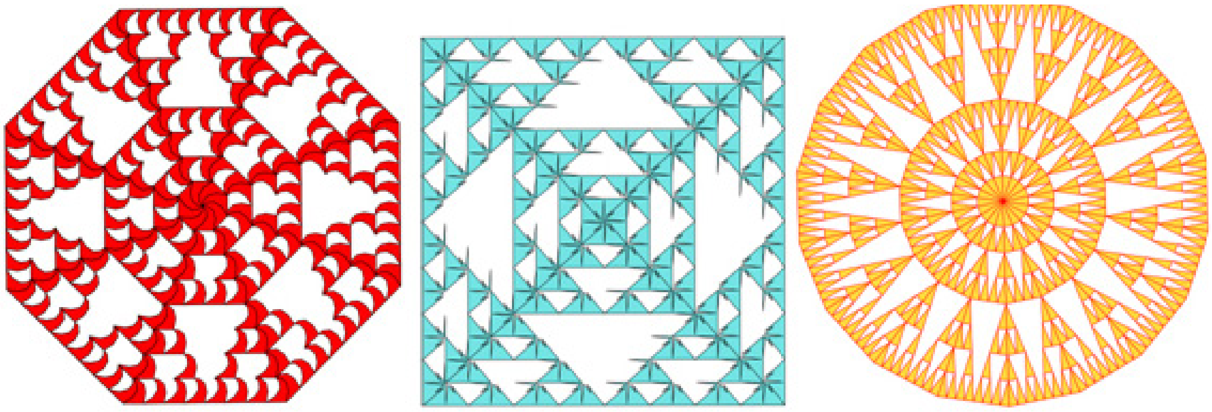
3. Вариациите на тема продължават

Но наша сила е да работим с динамични точки до получаване на красиви картинки, затова експериментирахме и със *собствени конструкции* от триъгълници, които подложихме на *ешеризация* (Фигура 5). Опитът ни в тази област е свързан идеите, изразени в [2-4].



Фигура 5.„Ешерезирани“ триъгълници на Серпински

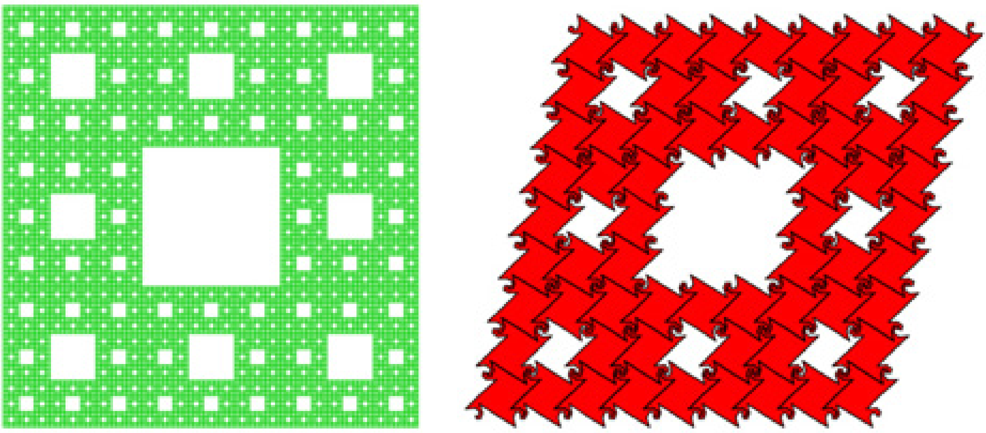
Някои ученици просто «завъртяха триъгълника на Серпински», а други създадоха още по-сложни конструкции, стъпвайки на този триъгълник (Фигура 6).



Фигура 6. Конструкции върху основата на триъгълника на Серпински

Някои ученици просто «завъртяха триъгълника на Серпински», а други създадоха още по-сложни конструкции, стъпвайки на този триъгълник (Фигура 6)

Трети приложиха процеса по аналогия, този път с квадрат. Така създадоха „динамичен килим на Серпински“ (Фигура 7а) и го ешеризираха (Фигура 7б).



Фигура 7. Динамичен килим на Серпински: а) след няколко итерации;
б) след раздвижване на върховете на изходния квадрат

4. Защо да оставаме в равнината?

Имахме вече двумерната конструкция на Серпински за триъгълник и квадрат. Всички решиха, че трябва да направим и пирамида на Серпински, а защо не и куб на Серпински

Изпробвахме с хартиени пирамидки – триъгълни и четириъгълни... Получи се първата голяма пирамида – сглобките много ни затрудниха, защото тя беше много голяма и не минаваше през вратата на класната стая.

Но дойдоха много нови идеи – пирамиди от магнитни пръчици и топчета. Тяхното неудобство идва от тежестта и понеже търсехме нещо по-леко, пробвахме със сламки за сок. Слава Богу – евтин и лек за работа материал. Разнообразието на сламки на пазара е голямо – остана проблема със свързването. Пробвахме различни начини, но най-лесно се оказа да ги шием с конци.

Първата пирамидка, която направихме, се оказа много здрава като конструкция (уж сламки, а съшити са много стабилни). Днес пирамиди на на Серпински, разработени от учениците ми красят класни стаи, кабинети, библиотеки и Заседателната зала на ИМИ-БАН (Фигура 8).

Фигура 8. Пирамиди на Серпински, разработени от учениците

Разочаровахме се, като видяхме, че куб, съшит по подобен начин, е много нестабилен – все му се иска да полегне нанякъде. Направихме «наши открития» и бяхме много щастливи. Интересното е, че и много малки дечица – втори, трети клас (братчета и сестричета на моите ученици) се включиха в шиенето. Оказа се, че се справят с лекота и са много горди да помогнат на големите в тази «интересна игра».

5. Заключение

Сега рисуваме салфетки, покривки и дори се опитваме върху плат да направим наша истинска покривка – съвсем в духа на идеята да прилагаме математиката в «професионалната сфера» в изследователски стил. Впрочем това е съвсем в хармония с идеите на проекта Mascil [5].

С една реч, голямо забавление стана, а тръгнахме от едни “нищо и никакви” числа...

Моето огромно удовлетворение идва от това, че в подобен изследователски процес моите ученици тръгнаха от въпрос, който ги бе заинтересувал, развиха математическата и дигиталната си компетентност, усета си за инициатива, уменията си да общуват както помежду си, така и с родителите си на „професионално равнище“. Не на последно място те се научиха да представят идеите си и продуктите на творчеството си пред публика - все важни комуникативни и социални компетентности [6, 7].

Благодарности

Сърдечни благодарности на Жени, Тони и акад. Кендеров за ценните им съвети на всяка стъпка.

Благодаря и на моите ученици – емоционални, мислещи творци, които не спират да ме провокират, показвайки ми, че винаги мога да открия нещо ново и… вълнуващо.

Литература

1. Сендова, Е. (2002) Да разчупим традицията с малко хаос (някои нестандартни за училището теми по информатика и математика, които са без праг и без таван), Математика и математическо образование, т. 31, с. 35-47
2. Чехларова, Т., Сендова, Е., (2011). Динамично паркетиране. сп. Математика и информатика, бр. 6, с. 5-17
3. Chehlarova, T., Sendova, E., (2012) IBME in the secondary school: Overview and examples in a Bulgarian context. In: Baptist, P., D. Raab (eds.): Implementing Inquiry in Mathematics Education, Bayreuth pp. 114-124
4. Chehlarova, T., Sendova, E., Stefanova, E., (2012) Dynamic tessellations insupport of the inquiry-based learning of mathematics and arts, in Kynigos, C., Clayson, J., Yiannoutsou, N. (Eds) Theory, Practice and Impact - Proceedings of Constructionism, pp. 570-574
5. Кендеров, П., Сендова, Е., Чехларова. Т. (2013) Европейският проект MaSciL - математика и природни науки за цял живот!, Математика и математическо образование, т. 42, с. 183-186
6. Кендеров, П., Сендова, Е., Чехларова, Т. (2014) Развиване на ключови компетентности чрез образованието по математика: Европейският проект KeyCoMath. Математика и математическо образование, т. 43, с. 99–105
7. Кендеров, П., Чехларова, Т., Сендова,. Е. (2015) Европейският проект KeyCoMath и ориентираното към усвояване на ключовите компетентности образование по математика, Математика и математическо образование, т. 44, с. 155–157

[1] **Бел. ред.** Най-хубавото в цялата история е, че авторката е открила с учениците си връзка на нечетните числа в триъгълника на Паскал и триъгълника на Серпински, която е известна сравнително отскоро. Известният учен Stephen Wolfram в книгата си A New Kind of Science от 2002 г. отбелязва на 870 стр., че въпросният факт не е бил забелязан („широко отбелязван”), преди той самият да го изтъкне през 1982 г. като пример на клетъчен автомат. Пак там Wolfram пише, че триъгълникът на Паскал е известен вероятно още от древността; че със сигурност е бил познат в Китай през 1200г. и е разглеждан в детайли от Блез Паскал през 1654 г. в контекста на Теория на вероятностите. Закономерности в редиците от биномни коефициенти, сравними по модул k, са откривани независимо от Lucas (1877) и Glaisher (1899).