Добри практики в образованието
по математика и ИТ
за развиване на

ключови компетентности

Тони Чехларова, Евгения Сендова
(редактори)

Lifelong
Learning
Programme

Comenius Multilateral Project: Developing Key Competences by Mathematics Education Project
(Развиване на ключови компетентности чрез математическото образование)

www.KeyCoMath.eu

Редактори: Тони Чехларова, Евгения Сендова
Художник на корицата: Калина Сотирова
Графично оформление: Калина Сотирова

ISBN 978-954-561-389-0

Проектът *KeyCoMath* е финансиран със съдействието на
програма "Учене през целия живот" на Европейския съюз.
Настоящият сборник отразява само личните виждания на авторите.
Европейската комисия и Изпълнителна агенция за образование, аудиовизия и култура не носят
отговорност за използването на информацията в сборника.

Lifelong
Learning
Programme

Developing by Key Competences Mathematics Education

СЪДЪРЖАНИЕ

Увод	4
Ангелова, Р. Паркетиране на равнината или диалози на математиката с изкуството	7
Браухле, М. Всичко започна с едно стихотворение и завърши с много усмивки	12
Вълкова, Д. Визуални феномени - интерактивно приложение на динамичен софтуер в училище	16
Зарева, Ц. Сечения и сенки с AutoCAD в дескриптивната геометрия	22
Илиева, Р. Моделиране на калейдоскоп	29
Кокинова, С. Предизвикателства в четириъгълник или експерименти по математика – защо не!	32
Коцева, М. Интерактивност чрез Excel	36
Кунчева, Д. С мишка в ръка	41
Куюмджиева, Б. Така го усещам	46
Пенчева, Г. Малките математици опазват природата	50
Петков, И. За общуването и изследователския подход в часовете по ИТ	55
Стефанова, Е. Всичко започна с триъгълника на Паскал	61
Стоянова, Н., Раданов Р. Как да използваме остатъка при деление	67
Христозова, Н. Геометрия и моден дизайн	72
Цветкова, Н. Динамична математика с *GeoGebra*	75
Цвятков, Д. Симетричните функции в помощ на физичните явления	78
Gortcheva, I. Visualizing mathematical word problems	83

Симетричните функции в помощ на физичните явления

Динко Цвятков
dinko_cvetkov@abv.bg
СОУ „Ив. Вазов“, гр. Стара Загора

Резюме: Динамиката на съвременния живот и бързата промяна на технологиите изисква нов начин на преподаване на знанието. Изследователският подход започва да намира все по-голямо приложение в съвременната класна стая, където учителят е медиаторът, който води класа си в откриване на новото знание. В настоящата статия ще разгледаме симетрични функции, с които ще направим препратка към физиката и физичните явления. Наш помощник ще бъде софтуерът за динамична математика *GeoGebra*.

Ключови думи: *изследователски подход, динамичен софтуер, физични явления, математическа компетентност, дигитална компетентност, социални компетентности*

Математиката не е всичко, но без математика всичко е нищо

Ханс Олаф Хенкел

1. Увод

Още в древността едно от най-важните достойнства за човека е владеенето на математически знания. Думата “математика” в превод от гръцки означава *знание*, *наука*. Ролята и значението на математиката в съвременния живот непрекъснато нараства. Тя става неотменна част от знанието за заобикалящия ни свят.

Съвременният учител по математика в България е добре да води часовете си, като съобразява и оценява начина си на работа в съответствие с Европейската референтна рамка за ключовите умения за учене през целия живот, разгледана в контекста на проекта *KeyCoMath*[1]. Дейностите в нея са съсредоточени върху основните ключови компетентности в основните и средните училища, а тези, които най-добре могат да се развият чрез математическото образование – в [2].

Математическата компетентност насърчава активното проучвателно обучение на учениците в открити и нетрадиционни ситуации. Използването на изследователския подход в обучението по математика е с цел задълбочаване на тяхната способност за математическо мислене и подпомагане развитието на математическото разбиране, връзката на математиката с останалите природни науки.

Общуването на роден език е неотменна част от образователния процес за всяко дете. Тук се констатира преплитане между изучаването на математика и общуването между учениците в устна или писмена форма. Учениците се насърчават да говорят за математика, за да обсъждат идеите си, да напишат мислите и разсъжденията си и да представят своите резултати.

По отношение на дигиталната компетентност в учебния процес по математика важно е насърчаването на учениците да работят с иновативни учебни среди, които включват цифрови носители на информация като електронни таблици, софтуер за динамична математика и т. н.

Особено важни са индивидуалните умения за самостоятелно учене на отделния ученик. Те са предпоставка за изграждане и развитие на умения за самостоятелното обучение. Динамиката на ежедневието изисква нашите ученици да могат самостоятелно да надграждат своите знания и умения и да продължават да учат през целия си живот. По този начин те развиват способности да управляват процесите в своя живот както индивидуално, така и в групи. Те трябва да знаят кого да потърсят за съвет и подкрепа и именно по този начин развиват своите социални компетенции.

В часовете по математика учениците трябва да се насърчават да бъдат креативни, активни и да превърнат идеите си в действие. Тук те развиват способности да планират, организират и ръководят работата си. Тези практически умения са важни не само за часовете по математика, но и за целия им съзнателен живот, като неотменна част от когнитивния процес.

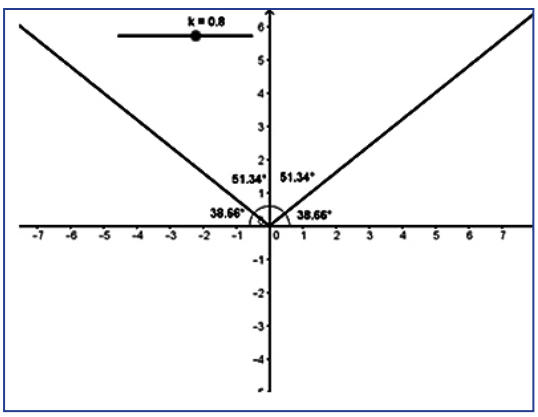
Езикът на математиката обяснява случващото се около нас. Всяко природно явление, всяка електронна „играчка" в джоба ни се основава на физично явление. По-долу ще разгледам симетрични функции, изучавани в 8. клас, които са идеален помощник за обяснението на редица физични явления.

2. Модулната функция y=|kx|.

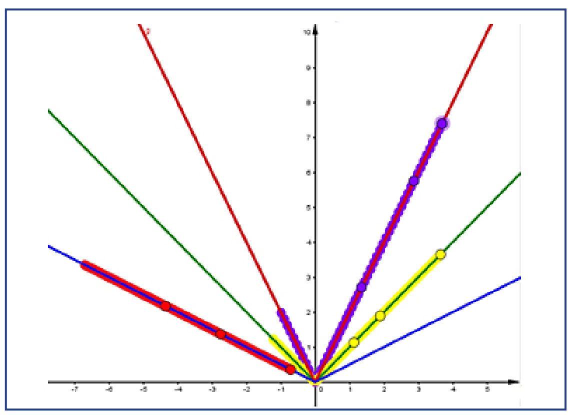
Модулната функция y=|kx| се оказа идеален помощник при обяснението на явлението "Отражение на светлината". С помощта на софтуера за динамична математика *GeoGebra* начертаваме графиката на функцията (Фигура 1). С помощта на плъзгач дефинираме стойносттите на k. Не бива да забравяме, че всяка точка в *GeoGebra* може да оставя следа при движението си [3]. В 8. клас децата не са учили за природата на светлината, за корпускулярно-вълновия дуализъм, но учителят по математика може да стъпи на чисто геометричния характер на отражението на светлината, а именно, че ъгълът на падане е равен на ъгъла на отражение. Самото изследване започва с въпроса:

Дали ъглите, които сключва графиката на модулната функция с абсцисната ос, са равни?

С помощта на плъзгача лесно се онагледява, че за произволна стойност на параметъра k, тези ъгли винаги са равни. Следва и самото онагледяване на явлението отражение на светлината. Начертаваме графиките на няколко модулни функции и избираме точки от техните графики. Пускаме точките в режим на анимация и показваме светлината като поток от точки, които падат на повърхността и се отразяват от нея (Фигура 2).



Фигура 1. Графика на модулна функция



Фигура 2. Светлината като поток от точки (корпускули)

3. Квадратната функция y=ax²+bx+c

Въпреки че в часовете по математика в 8. клас се изучава само функцията $y=ax^2$, учениците вече могат да решават квадратно уравнение и са учили по физика законите за движението, където законът за пътя при равноускорително или равнозакъснително движение се задава с функция.

Виждайки законите за пътя, учениците лесно могат да установят, че пътят S е представен като функция на времето t. С помощта на ресурса за квадратната функция от Виртуалния училищен кабинет по математика [4], учениците сами могат да открият при какви стойности на параметрите функцията се движи нагоре и надолу, наляво и надясно в координатната система, има ли забележителни точки от нейната графика, кои са техните характеристики, да открият симетрията в нейната графика и т. н.

Въз основа на установените факти можем да решаваме в часовете по ЗИП математика в 8. клас задачи от вида:

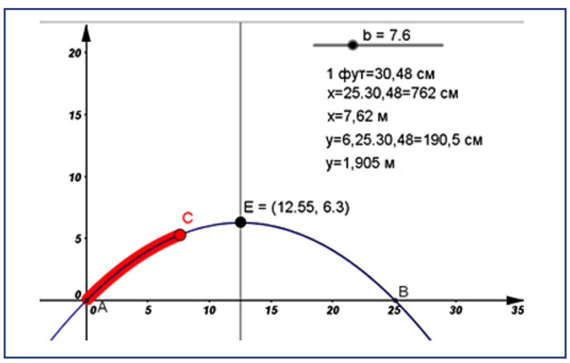
Задача 1: *Ана играе голф. На четвъртото място, където се поставя топката за удар, тя удря бавно по равната алея. Пътят на топката следва парабола, описана от уравнението: $y=x-0.04x^2$. С x означаваме разстоянието, което топката изминава по хоризонтала, а с y – височината, на която топката се издига. Разстоянията са измервани във футове. Колко далеч от мястото за удар топката ще удари земята? На какво разстояние x от мястото за удар топката ще достигне максимална височина? Каква е максималната височина*?

С помощта на *GeoGebra* правим динамичен файл, в който построяваме графиката на квадратната функция (Фигура 3). Точката С описва движението на топката за голф. Поставили сме началото на координатната система (т. А) в изходната позиция на топката, като крайната ѝ точка също лежи върху абсцисната ос (т. В). Разстоянието във футове превръщаме в метри. Учениците вече са установили, че върхът на параболата е най-ниската или най-високата точка от графиката на квадратната функция, която я описва, затова и максималната височина търсят във върха на параболата. Освен това те вече знаят, че оста на симетрия също минава през върха на параболата и лесно откриват, че в средата на отсечката между началната и крайната точка се достига максималната височина. Именно координатите на върха на параболата ни дават отговор на последните два въпроса от условието на задачата.

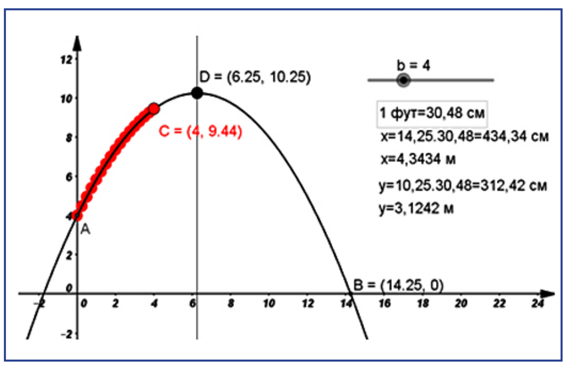
Да разгледаме една подобна ситуация.

Задача 2. *Надя хвърля топка на Петър във физкултурния салон на училището. Петър не хваща топката и тя пада на земята. Графиката показва пътя на топката, докато лети във въздуха. Уравнението, описващо пътя на топката, е: $y=4+2x-0.16x^2$. Тук y е височината на топката, а x е разстоянието ѝ до Надя по хоризонтала. Разстоянията се измерват във футове. Колко далеч от Надя топката ще удари земята? На какво разстояние от Надя топката ще достигне максимална височина? Каква е максималната височина, на която се издига топката*?

Аналогично *на Задача 1* построяваме графиката на квадратната функция (Фигура 4).



Фигура 3. Графика на функцията $y=x-0.04x^2$



Фигура 4. Графика на функцията $y=4+2x-0.16x^2$

Точката С описва движението на топката, хвърлена от Надя. Поставили сме Надя в началото на координатната система. Надя хвърля топката към Петър, като е застанала в точка А. Точката В, в която топката пада, също лежи върху абсцисната ос. Разстоянието във футове превръщаме в метри. Когато решавахме тази задача, началното положение на топката затрудни най-много учениците. Тук направихме някои препратки към физиката, за да можем да обясним началното положение на топката, пътя, който изминава и т.н. По аналогия с предходната задача дадохме отговор на последните два въпроса от задачата.

4. Как да изпаднем в състояние на безтегловност (микрогравитация)

В предишния раздел разгледахме две идеи за приложението на графиката на квадратната функция при решаването на някои задачи. Тук ще разгледаме нейното практическо приложение за симулиране на състояние на безтегловност. Учени от НАСА[1] са успели да предизвикат изкуствена микрогравитация в самолет, който извършва полети по параболична траектория над Мексиканския залив [6]. Безтегловността се изпитва в продължение на 30 секунди при всеки пик на параболата. По този начин бъдещите астронавти и космонавти могат да изпитат усещането за безтегловност. Самолетът излита над Мексиканския залив под ъгъл 45^0 със земната повърхност и е с максимална тяга на двигателите, за да влезе в параболична маневра. След достигане на височината, при която започва параболичната маневра, тягата на двигателя намалява, като ъгълът при носа на самолета се запазва. В края на маневрата пилотът отново засилва тягата на двигателите. След ”гмуркането” надолу отново подготвя самолета за нова маневра и така около 50 пъти.

Схема на такава маневра е показана в ресурса [6, с.7].

Параболата, по-която се движи самолетът, е описана със следната функция: $H=-4{,}9t^2+87{,}21t+9144$, където **H** е надморската височина в метри, а **t** е времето в секунди.

Използвайки квадратната функция, всеки ученик може да даде отговор на следните въпроси:

- *Колко време продължава полетът?*
- *Каква е максималната височина, на която се издига самолетът?*
- *Каква е височината, от която започва усещането за безтегловност?*
- *На същата височина ли свършва усещането за безтегловност?*
- *Каква част от полета е времето, прекарано в безтегловност?*

В нашия случай функцията $f(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t+h_0$ описва надморската височина на самолета по време на един параболичен полет по отношение на времето, през което трае този полет. Тази функция често се използва във физиката и може да се прилага към всеки обект в състояние на свободно падане.

Коефициентът a е земното ускорение.

Коефициентът v_0 е вертикалната скорост на самолета, при която той започва параболичната маневра. Вертикалната скорост на самолета при започване на параболична маневра варира от 90 m/s до 115 m/s.

Коефициентът h_0 е надморската височина, при която самолетът започва своята параболична маневра (височината, при която започва състоянието на безтегловност). Надморската височина, при която самолетът започва да маневрира, е между 8600 и 9200 метра.

[1] **Бел. ред.** В ресурс [6] от литературата е приложена форма за обратна връзка от учителите, които го използват. Насърчаваме ви да я попълните и изпратите на авторите на ресурса, за което ще ви съдействаме.

Като променят коефициентите на квадратната функция с помощта на плъзгачите, учениците могат да влязат в ролята на изследователи и да дадат отговор на следните въпроси:

- *Как се променя максималната височина на полета?*
- *Отразява ли се промяната във времето на полета?*
- *Променя ли се графиката на функцията при промяна на параметрите?*
- *Има ли промяна във времето, в което сме в състояние на микрогравитация?*
- *Колко дълго трае самият полет?*
- *При кои стойности на параметрите усещането за микрогравитция е най-голямо?*

Получените стойности учениците могат да обобщят в таблица и да направят съответните изводи.

5. Заключение

Съвременният български учител е изправен пред предизвикателството да прави науката, която преподава, по-интересна и по-достъпна за своите ученици. Той не трябва да престава да показва връзките между отделните науки и техните практични и житейски приложения. За мен истината е, че науката може да бъде изучавана по-добре, ако на учениците са известни „механизмите" за нейното създаване и ако по-често им се дава ролята на изследователи независимо дали са в класната стая или извън нея [7, 8]. Все повече трябва да оставяме учениците сами да достигат до конкретно знание и да виждат неговото практическо приложение в реалният им живот. Въпреки че те са заобиколени от електронни играчки, които ги отвеждат в един виртуален свят, аз искам те да се докоснат до науката, която е превърнала едни добри идеи в неща от тяхното ежедневие.

Литература

1. Ключовите компетентности и Европейската референтна рамка [http://procedures.uni-plovdiv.bg/docs/acrediation/1837/12336835241581592117.pdf] Последно посетена на 1.11.2015 г.
2. Кендеров, П., Сендова, Е., Чехларова, Т. (2014) Развиване на ключови компетентности чрез образованието по математика: Европейският проект KeyCoMath. Математика и математическо образование, т. 43, с. 99–105
3. Чехларова, Т. Следата. сп. Математика, бр. 6., с. 7-11. 2012
4. Chehlarova, T., G. Gachev, P. Kenderov, E. Sendova. (2014) A Virtual School Mathematics Laboratory. В: V-а Национална конференция по електронно обучение. Русе, 16-17. 06.2014. pp.146-151
5. (http://www.algebra.com/algebra/homework/quadratic/Quadratic_Equations.faq.question.56231.html) Последно посетен на 1.11.2015 г.
6. NASA – Exploring Space through MATH, Algebra 1 Series, Weightless Wonder Problem (http://www.nasa.gov/pdf/514492main_AL_ED_WW_12-04-09.pdf) Последно посетен на 1.11.2015 г.
7. Сендова, Е., Т. Чехларова. (2011) Общото в различията или Да влезеш в ролята на учен. сп. Математика и информатика, бр.5, с. 17-29
8. Цвятков, Д., (2015) Експериментът по математика – виртуален и реален. сп. Педагогически форум, бр.2, с.88-95