Добри практики в образованието по математика и ИТ за развиване на ключови компетентности

Тони Чехларова, Евгения Сендова
(редактори)

Lifelong
Learning
Programme

Comenius Multilateral Project: Developing Key Competences by Mathematics Education Project
(Развиване на ключови компетентности чрез математическото образование)

www.KeyCoMath.eu

Редактори: Тони Чехларова, Евгения Сендова
Художник на корицата: Калина Сотирова
Графично оформление: Калина Сотирова

ISBN 978-954-561-389-0

Проектът *KeyCoMath* е финансиран със съдействието на
програма "Учене през целия живот" на Европейския съюз.

Lifelong Learning Programme

Developing Key Competences by Mathematics Education

СЪДЪРЖАНИЕ

Предизвикателства в четириъгълник или експерименти по математика – защо не!

Стелиана Кокинова

skokinova@abv.bg

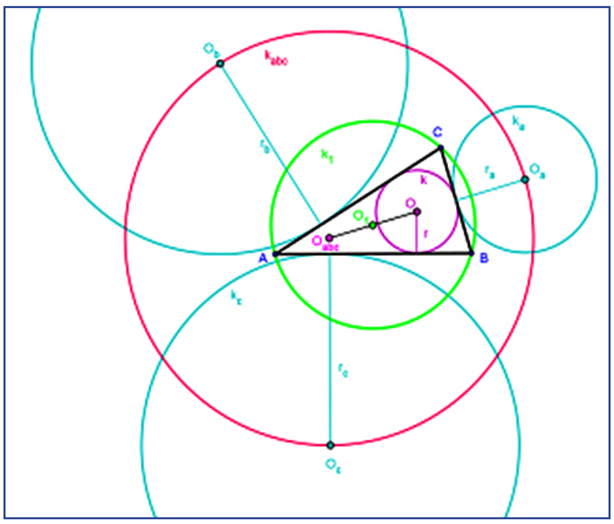
Първа английска езикова гимназия, София

Резюме: С тази разработка показваме как чрез използване на динамичен софтуер *GeoGebra* лесно може да бъде показано (и след това - доказано) едно познато твърдение и да бъдат генерирани две хипотези.

Ключови думи: *изследователски подход, динамичен софтуер , математическа компетентност, дигитална компетентност*

1. Увод

Известно е, че във всеки триъгълник може да се впише и около всеки триъгълник да се опише окръжност. Освен това се знае, че за всеки триъгълник има 3 външно вписани окръжности, чиито върхове са пресечните точки на две външни и една вътрешна ъглополовяща. (Центровете на тези окръжности лежат на една окръжност). Освен това се знае, че ако $k\,(O, r)$ е вписаната в триъгълника окръжност, $k_1\,(O_1,R)$ - описаната около триъгълника окръжност и $k_{O_aO_bO_c}\,(O_{abc}, R_{abc})$- окръжността, която минава през центровете на външно вписаните окръжности, то O_{abc} е образ на O при централна симетрия с център точката O_1 [1].



Фигура 1. Външно вписани, описана и вписана окръжности за $\Delta\, ABC$

2. Изследване

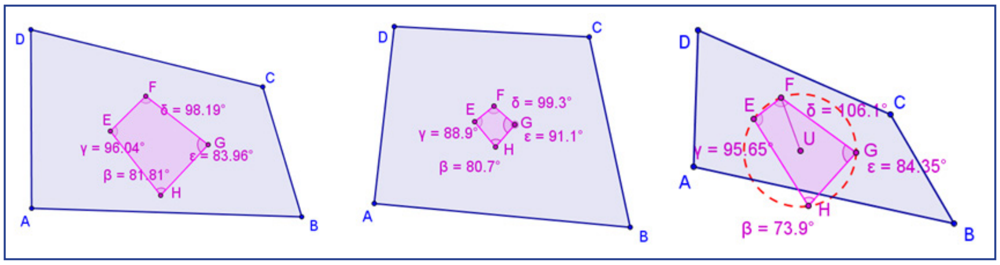
При разглеждане на аналогична ситуация в четириъгълник възникват следните въпроси:

Въпрос 1. Ако четириъгълник ABCD е произволен и в него не може да се впише окръжност, то какво можем да кажем за ъглите на четириъгълник с върхове пресечните точки на вътрешните ъглополовящи?

Въпрос 2. Ако четириъгълник ABCD е произволен и в него не може да се впише окръжност, то какво можем да кажем за ъглите на четириъгълник с върхове пресечните точки на външните ъглополовящи? (Не сме открили до момента такава формулировка.)

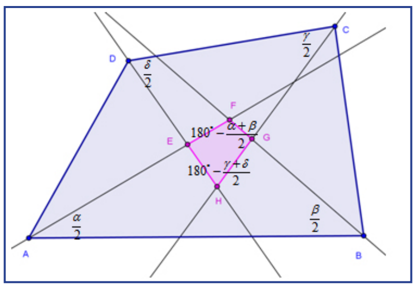
Въпрос 3. Ако ABCD е четириъгълник, в който може да се впише окръжност, то може ли да се намери аналогична симетрия (както при произволен триъгълник), при която центровете на окръжностите, описани около четириъгълника с върхове пресечните точки на вътрешните ъглополовящи и около четириъгълника с върхове пресечните точки на външните ъглополовящи, да са симетрични спрямо центъра на описаната около ABCD окръжност? (Не сме открили до момента такава задача.)

Въпрос 1 изследвахме с динамичен файл в *GeoGebra,* като проследихме как се изменят ъглите на четириъгълник EHGF (Фигура 2).



Фигура 2. Динамика на ъглите в EHGF - www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/html/d18421.html

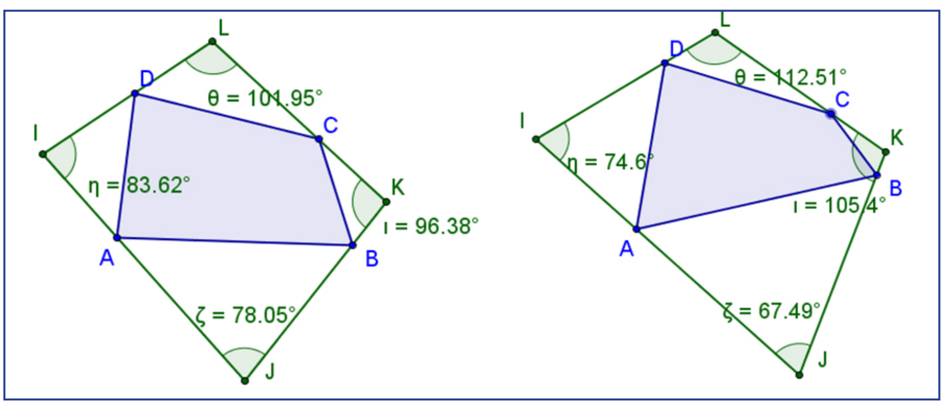
Забелязва се, че сумата от градусните мерки на срещуположните ъгли винаги е 180º и от това следва, че около EHGF винаги може да се опише окръжност. Верността на това предположение може да бъде лесно установена и по аналитичен път: От Δ *ABF* следва $\angle F = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ \frac{\alpha+\beta}{2}$ (Фигура 3).



Фигура 3. Визуализиране на едно свойство на ъглите в EHGF

Аналогично от Δ *CDH* следва $\angle H = 180^\circ - (\angle C + \angle D) = 180^\circ - \frac{\gamma+\delta}{2}$. Следователно е изпълнено $\angle H + \angle F = \angle E + \angle G = 180^\circ$ и оттук заключаваме, че около EHGF може да се опише окръжност.

На Фигура 4 е проследено как се променят стойностите на ъглите на четириъгълник IJKL. От фигурите се забелязва, че сумата от градусните мерки на срещуположните ъгли винаги е 180° и от това следва, че около IJKL винаги може да се опише окръжност.



Фигура 4. Динамика на ъглите в IJKL - www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/html/d18421.html

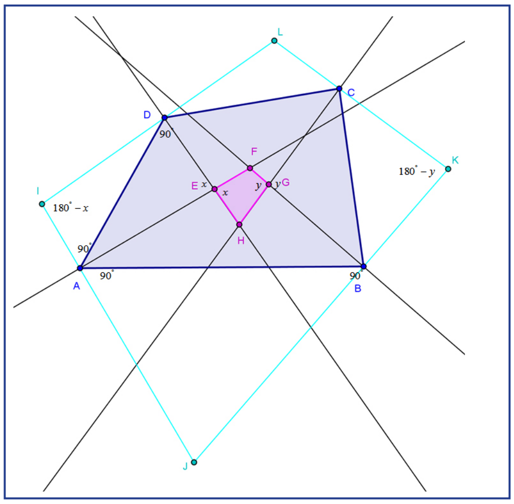
Отново верността на това предположение може да бъде установена и по аналитичен път:

За мерките на ъглите на четириъгълник AEDI получаваме $\angle A + \angle E + \angle D + \angle I = 360^\circ$.

Ако означим $\angle HEF = x$, то и $\angle AED = x$ (Фигура 5).

Освен това $\angle A + \angle D = 90^\circ$ (ъгли между вътрешни и външни ъглополовящи). Следователно $\angle I = 360^\circ - 180^\circ - x = 180^\circ - x$.

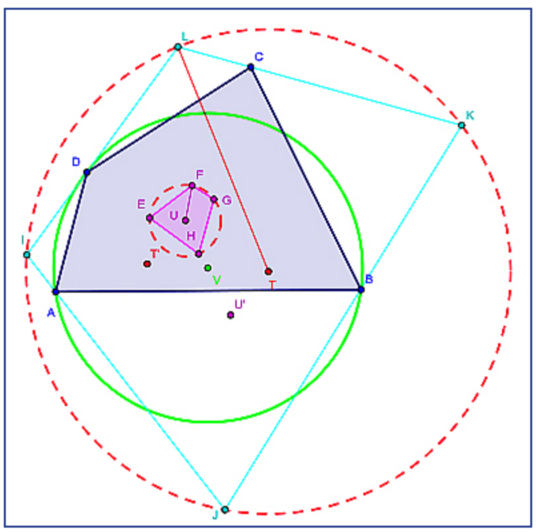
Ако означим $\angle HGF = y$, аналогично за GBKC получаваме $\angle K = 360^\circ - 180^\circ - y = 180^\circ - y$. Следователно, $\angle I + \angle K = 180^\circ - x + 180^\circ - y = 360^\circ - \underbrace{(x + y)}_{180^\circ} = 180^\circ$, т.е. около IJKL може да се опише окръжност.



Фигура 5. Визуализиране на едно свойство на ъглите в AEDI

При решаването на *Въпрос 3* отново използвахме *GeoGebra*. Като начало искахме да проверим дали условието ABCD да е вписан в окръжност четириъгълник, е съществено. За целта построихме окръжност K_{ABD} само около върховете A, B и D, с център V. След това намерихме образа на точка T - център на описаната около IJKL окръжност при симетрия с център точката V, и това беше точката T'; постъпихме по същия начин и с точката U - център на описаната около EHGF окръжност и получихме точката U' (Фигура 6).

Установихме, че точките са различни. Проследихме динамиката на точките T' и U. Така установи-



Фигура 6. Симетрични точки T и T' спрямо V и U и U' спрямо V
www.math.bas.bg/omi/cabinet/content/bg/html/d18422.html

хме, че $T' \equiv U$ и $T \equiv U$ само когато точката C лежи на окръжността K_{ABD}.

Постъпихме по аналогичен начин с окръжността K_{ABC}, описана само около ΔABC, и наблюдавахме динамиката на точките T'' и U'', които бяха съответни при централна симетрия с център точката W. Така установихме, че $T'' \equiv U$ и $T \equiv U''$ само когато точката лежи на окръжността K_{ABC}. От направеното наблюдение следва, че условието ABCD да е вписан в окръжност четириъгълник, е съществено.

Но това беше само началото. Проверихме дали има аналог от задачата в началото на статията за четириъгълник с описаните по-горе свойства, наблюдавахме още редица интригуващи свойства:

- Диагоналите на четириъгълник IJKL са перпендикулярни;
- Диагоналите на четириъгълник EHGF са перпендикулярни;
- Диагоналите на четириъгълник EHGF лежат върху диагоналите на четириъгълник IJKL;
- Центровете на описаните окръжности около най-външния и най-вътрешния четириъгълник са централно симетрични спрямо центъра на описаната около основния.

Предстои всички тези хипотези да се проверят с аналитично доказателство, но това ще е тема на друга статия.

3. Заключение

Настоящата статия акцентира върху една възможна методология за формулиране на интересни математически твърдения [3]. Тази методология всъщност показва, че в математиката може да се въведе идеята за експерименти, въпреки че това противоречи на класическите разбирания за математиката като откъсната от реалния свят и следователно – неподвластна на експериментална проверка. Тук идеята е, че с помощта на съвременните информационни технологии, предоставящи среди, в които хората могат да извършват „физически" действия и следователно да експериментират, експериментите могат да бъдат полезно средство за формулиране на нови математически твърдения, които след това да се доказват с традиционните логически средства. По този начин учениците могат да развиват и дигиталната, и математическата си компетентност [4].

Литература

1. Запрянов, З. и колектив, Сборник задачи и тестове по математика -10. клас, изд. Регалия 6, 2010 г.
2. Jacobs, H. R. (2003). Geometry-Seeing,Doing,Understanding. New York, W. H. Freeman and Company, p. 721
3. Chehlarova, T., Gachev G., Kenderov, P., Sendova, E. (2014) A Virtual School Mathematics Laboratory. В: V Национална конференция по електронно обучение, Русе, pp.146-151
4. Кендеров, П., Сендова, Е., Чехларова, Т. (2014) Развиване на ключови компетентности чрез образованието по математика: Европейският проект KeyCoMath. Математика и математическо образование, т. 43, с. 99–105