2

2011

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

РАЗПРОСТРАНЕНИЕ НА ИЗСЛЕДОВАТЕЛСКИЯ ПОДХОД В ЕВРОПЕЙСКОТО ОБРАЗОВАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА И ПРИРОДНИ НАУКИ

The Fibonacci Project

DISSEMINATING INQUIRY-BASED SCIENCE AND MATHEMATICS EDUCATION IN EUROPE

СЪДЪРЖАНИЕ

CONTENTS

Излязла от печат на 13. 05. 2011 г. Формат 70/100/16. Годишен абонамент 30 лв.

Адрес на редакцията: София 1113, бул. Цариградско шосе 125, бл. 5, тел. 870-45-41; тел./факс 870-51-19; e-mail: grpi_math@abv.bg; grpi@dir.bg; http://www.grpi.iit.bas.bg

Предпечатна подготовка: ГРПИ – МОМН. Печат: АЛИАНС ПРИНТ ЕООД

ПРЕГЪВАНЕ НА САЛФЕТКА или ЗА ПРЕФОРМУЛИРАНЕТО В ИЗСЛЕДОВАТЕЛСКИЯ ПРОЦЕС

The Fibonacci Project

DISSEMINATING INQUIRY-BASED SCIENCE AND MATHEMATICS EDUCATION IN EUROPE

ТОНИ ЧЕХЛАРОВА, София

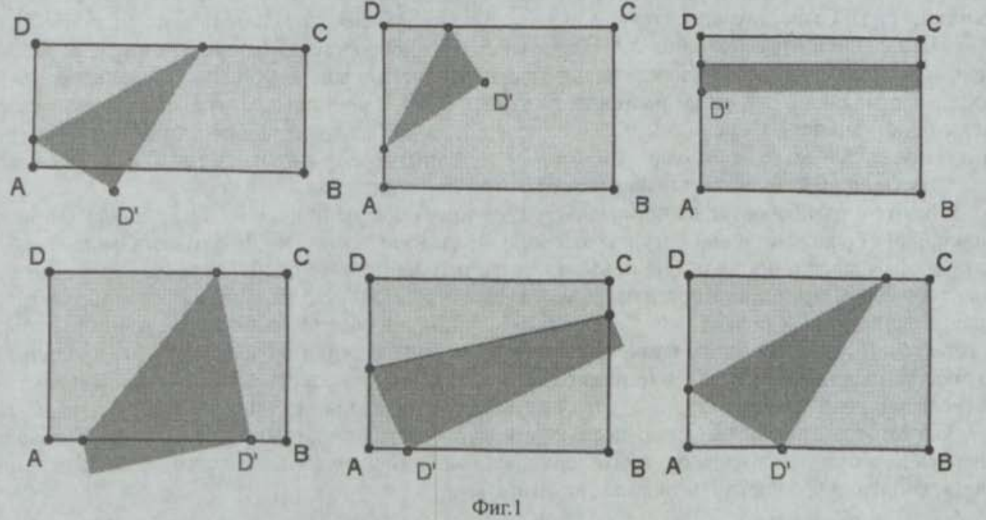
Преформулирането на задача е елемент от изследователския процес и се използва при разкриване на свойства на обекти или на доказателства. То е средство за атакуване на задачи, като понякога задачата се заменя с еквивалентна на нея, а друг път се разширява или стеснява; сменя се апаратът и др. Ще илюстрираме как изследовател (учител или ученик), на основата на получена хипотеза от експериментиране с динамичен софтуер, преформулира построителна екстремална задача в задача за доказване.

Задачата

Да се прегъне правоъгълна салфетка така, че:

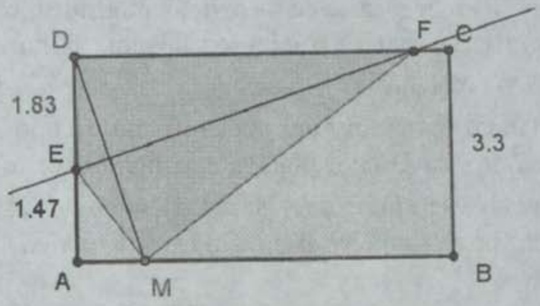
- *върхът с монограма да застане върху някоя от страните на салфетката, на които той не е край;*
- *прегънатото парче да е с минимална площ и да е изцяло разположено върху останалата част на салфетката.*

Ако пренебрегнем условието за минималност, прегъването лесно може да онагледим с правоъгълно парче хартия. На адрес http://www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/archive.htm можем да използваме и динамичен модел. На фиг. 1 само последният пример отговаря на условията за прегъване (без условието за минималност).



Фиг.1

Нека монограмът е при върха D на правоъгълника $ABCD$, $AB > BC$, и то „много" по-голяма, точка D след сгъването съвпада с точка M (фиг. 2). Симетралата на DM пресича AD и DC в точките E и F.



Фиг. 2

Ясно е, че след сгъването ΔEFD застава върху ΔEFM и те могат да се разглеждат като съответни при осева симетрия с ос EF.

Построяване на динамична конструкция

Пренебрегваме условието за минималност и построяваме:

1. **Правоъгълник** $ABCD$. Построяването на динамичен правоъгълник може да стане по няколко начина, важно е да се осигури динамичност на страните. Тук използваме свободни обекти – точките A и B, и точка D върху перпендикуляра през A към AB.

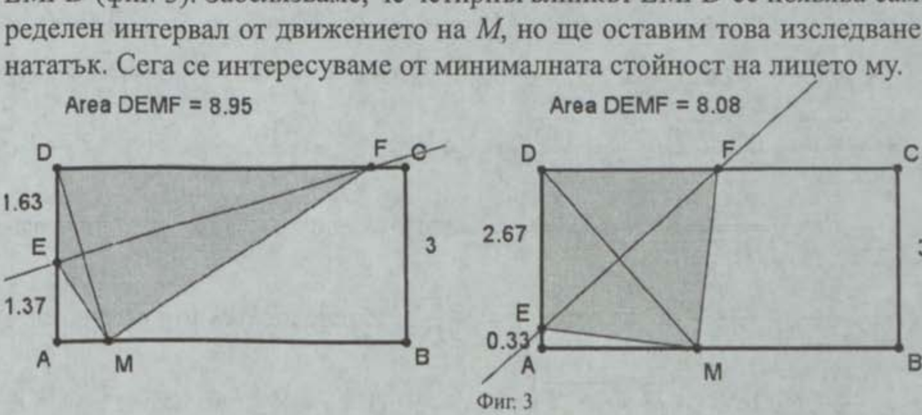
2. **Точка** M**, която избираме от обекта *четириъгълник*** $ABCD$, за да може да се движи по страните му. Може да изберем точката M от страната AB например, но ще трябва да дублираме конструкцията с точка M_1 от страната BC, ако искаме да постигнем пълнота на визуализирането върху един чертеж.

3. **Симетралата на** DM **и пресечните ѝ точки** E **и** F **с** AD **и** DC**.**

4. **Четириъгълник** $EMFD$, като извеждаме лицето му.

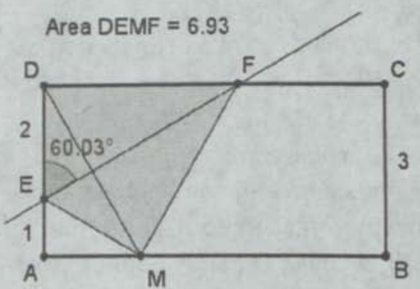
Изследване и формулиране на хипотеза

При фиксиран правоъгълник $ABCD$, в който AB е „много" по-голяма от BC, движим точка M върху страната AB и наблюдаваме изменението на лицето на $EMFD$ (фиг. 3). Забелязваме, че четириъгълникът $EMFD$ се появява само в определен интервал от движението на M, но ще оставим това изследване за понататък. Сега се интересуваме от минималната стойност на лицето му.

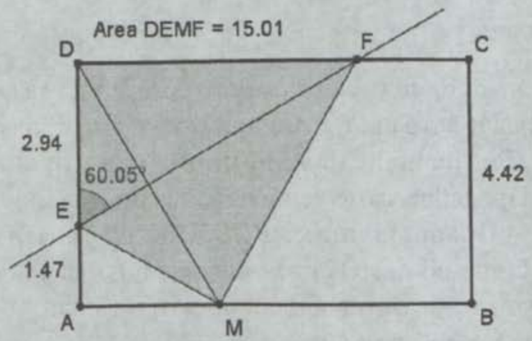


Фиг. 3

При движението на точка M от A към B (за този конкретен правоъгълник) лицето намалява до 6,93 (с избрана точност до стотните) и после се увеличава. За да видим кое е това, което остава постоянно, когато прегъването е с минимално лице, наблюдаваме различни правоъгълници. Макар че извеждаме и дължини на отсечки, интересуваме се от отношенията им, от мерки на ъгли и лица на фигури. За разглеждания конкретен правоъгълник забелязваме, че $DE:EA=2:1$, $\sphericalangle FED = 60°$ (фиг. 4). Проверяваме за още няколко правоъгълника и отново минималната стойност на търсеното лице е при $DE:EA=2:1$ и $\sphericalangle FED = 60°$ (фиг. 5), което дава основание да предположим, че това е търсеното прегъване и формулираме хипотеза. Двете условия $DE:EA=2:1$ и $\sphericalangle FED = 60°$ са еквивалентни, затова използваме само едното от тях, а другото ще получим като следствие.



Фиг. 4



Фиг. 5

Лесно се установява, че когато $DE:EA=2:1$, е вярно $\sphericalangle DEF = \sphericalangle MEF = \sphericalangle AMD = 60°$, $EF=2ED$ и $DM=\dfrac{AD}{\sin 60°}$. Ако $AD = a$, то $EF=\dfrac{4}{3}a$, $DM=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$, $S_{EMFD}=\dfrac{EF.DM}{2}=\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{9}$. Това дава възможност да **преформулираме задачата** като задача за доказателство, т.е. с искане да се докаже, че най-малкото лице е $S_{EMFD}=\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{9}$ и се постига при $DE:EA=2:1$.

Доказателство. Нека $AD = a$ и $ED = x$. Тогава $EA = a - x$ и $EM = ED = x$. От правоъгълния ΔAME $AM^2=x^2-(a-x)^2=2ax-a^2$. Триъгълниците AMD и DEF са подобни, затова $\dfrac{EF}{DM}=\dfrac{DF}{AD}=\dfrac{DE}{AM}$, т.е. $\dfrac{DF}{a}=\dfrac{x}{\sqrt{2ax-a^2}}$. Така $DF=\dfrac{ax}{\sqrt{2ax-a^2}}$, а $S_{EMFD}=\dfrac{ax^2}{\sqrt{2ax-a^2}}$. Нека $x = ka$, тогава $S_{EMFD}=\dfrac{k^2a^3}{\sqrt{2ka^2-a^2}}=\dfrac{k^2a^2}{\sqrt{2k-1}}$. Задачата се свежда до доказване на $\dfrac{k^2a^2}{\sqrt{2k-1}}\geq\dfrac{4a^2\sqrt{3}}{9}$, където $k=\dfrac{DE}{AD}$. Последователно получаваме $\dfrac{k^2}{\sqrt{2k-1}}\geq\dfrac{4\sqrt{3}}{9}\Leftrightarrow 9k^2\geq 4\sqrt{3}\sqrt{2k-1}\Leftrightarrow 81k^4\geq 16.3(2k-1)$ при $2k-1>0$, т.е.

$k > \frac{1}{2}$. Обръщаме внимание, че $k > \frac{1}{2}$ е условието, което осигурява построимостта на точка M.

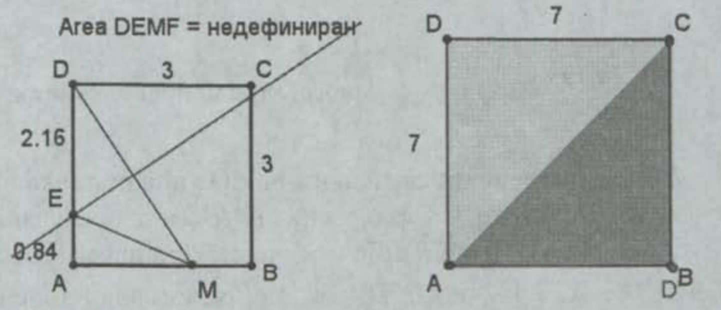
Стигаме до $81k^4 - 32.3k + 48 \geq 0$ и нека $p = 3k$, т.е. разглеждаме $p^4 - 32p + 48 \geq 0$.

То е еквивалентно на $(p-2)^2(p^2+4p+12) \geq 0$, което е вярно за всяко p. Равенство се постига при $p = 2$, т.е. $3k = 2$. Което означава, че $k = \frac{DE}{AD} = \frac{2}{3}$.

Така доказахме, че най-малкото лице на четириъгълник $EMFD$ е $\frac{4a^2\sqrt{3}}{9}$ и то се постига при $\frac{DE}{AD} = \frac{2}{3}$.

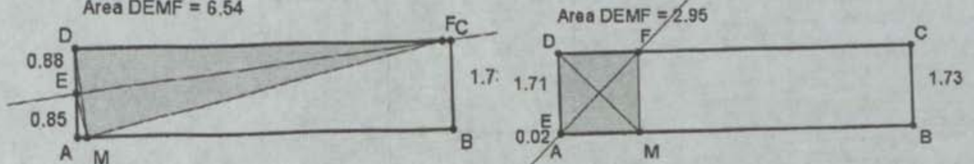
Изследването продължава

Да се върнем обаче към разглеждания правоъгълник. Неслучайно искахме едната страна да е „много“ по-голяма от другата. Това осигурява пресичане на страната CD със симетралата на DM и съответно пълнота при конструиране на четириъгълниците $\{EMFD\}$. Ясно е, че ако правоъгълникът е квадрат, единствената възможност за сгъване е по диагонала AC на квадрата (фиг. 6).



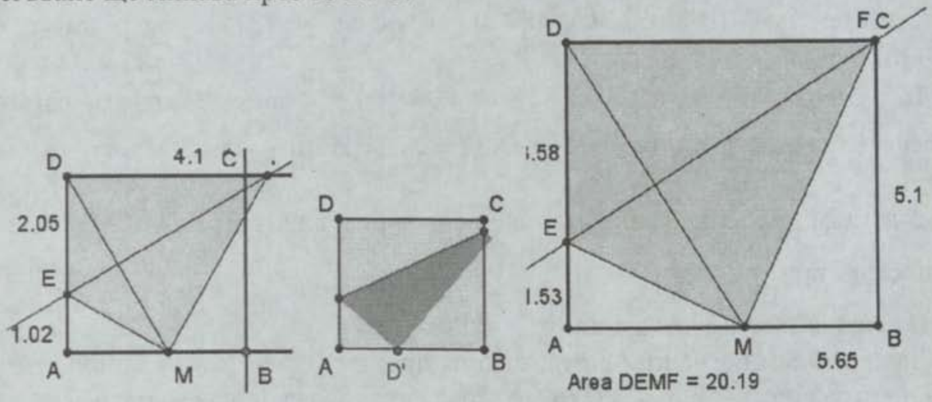
Фиг. 6

Ако разглеждаме „много“ дълъг правоъгълник $ABCD$, четириъгълник $EMFD$ се появява от $\frac{DE}{AD} = \frac{1}{2}$ до съвпадането на E с A (фиг. 7), като вече установихме кога се постига минимално лице. Така, ако при $\frac{DE}{AD} = \frac{2}{3}$ симетралата на DM пресича страната CD, се постига минимално лице.



Фиг. 7

Ако правоъгълник $ABCD$ не е „много“ дълъг, т.е. $AB > AD$, но симетралата на DM пресича не страната CD, а продължението ѝ (фиг. 8), тогава линията на прегъване ще минава през точка C.

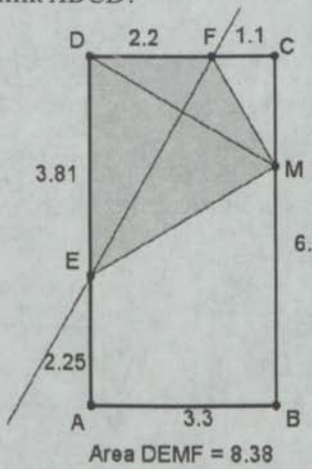


Фиг. 8

Граничната точка, която разделя двата случая, е точка F и $DF = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$, при $a < AB < \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ минимално ще е лицето, когато симетралата на DM минава през върха C (докажете).

Случаят $AB > \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$ е случаят с „много“ дълъг правоъгълник, който вече разгледахме.

При $AB < BC$ разсъжденията са аналогични. От гледна точка на динамичния чертеж и визуализирането, четириъгълник $EMFD$ в този случай се появява, когато точка M е върху BC (фиг. 9). Ясно е, че се установява същата закономерност – сега $DF : FC = 1 : 2$ и $\sphericalangle EFD = 60°$ при минимално лице на $EMFD$ и „много“ дълъг правоъгълник $ABCD$.



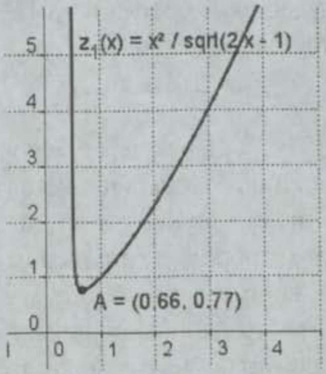
Фиг. 9

Друга параметризация за доказателство

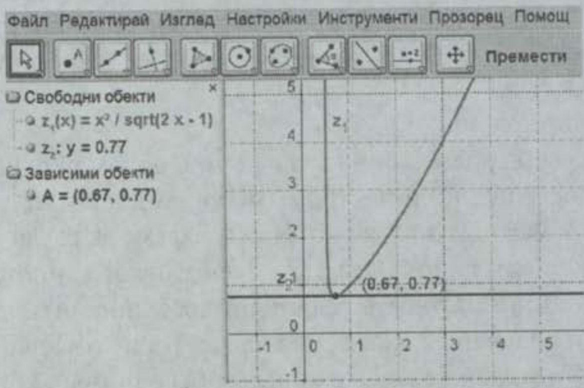
Нека $\sphericalangle DEF = \alpha$. В случая на „много" дълга салфетка трябва да докажем $\dfrac{a^2}{\sin 2\alpha\left(1-\cos 2\alpha\right)} \geq \dfrac{4a^2\sqrt{3}}{9}$ (виж [3]).

Изследване чрез графики на функции

Изследването може да осъществим и чрез използване на графики на функции. За „много" дълъг правоъгълник построяваме графиката на функцията $z_1 = \dfrac{k^2}{\sqrt{2k-1}}$, като до точка A може да се стигне по различни начини (фиг.10). Изследването с графики на функции с използване на динамичен софтуер има специфики, някои от които ще опишем в следващ материал.



Фиг. 10



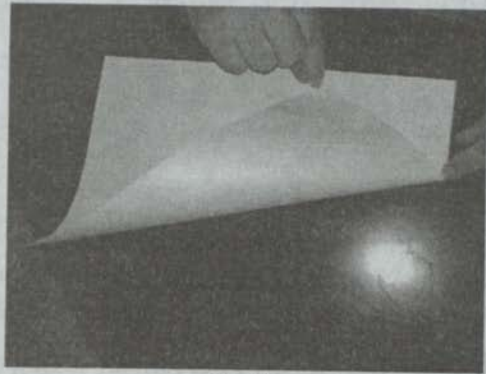
Фиг. 11

А като имаме предвид $\dfrac{k^2}{\sqrt{2k-1}} \geq \dfrac{4\sqrt{3}}{9}$, разглеждаме и функцията $z_2 = \dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ и графичното онагледяване на решението е представено на фиг. 11.

На практика

Е, как на практика ще сгънем дадена салфетка?

Поставяме пръста на едната ръка върху по-късата страна, на която край е върхът с монограма, на $\dfrac{2}{3}$ от този връх. Завъртаме върха с монограма около този пръст, докато легне върху съответната дълга страна (фиг. 12). Ако прегънатата част е изцяло върху останалата част от салфетката, това е търсеното прегъване. Ако част от прегънатото парче не лежи върху останалата част от салфетката, се ориентираме към случая с „къс" правоъгълник. Въртим върха с монограма около другия край на дългата страна на правоъгълника, до заставане върху съответната страна на дадената салфетка.



Фиг. 12

А можем да прегънем листа така, че да получим ъгъл от 60° и после успоредно да пренасяме, докато върхът с монограма легне върху съответната страна. И тук, ако има излизане на прегънатата част от останалата, минаваме към случая с „къс" правоъгълник. За получаването на ъгъл 60° е удобно да се използва $\sphericalangle DEF = \sphericalangle MEF = \sphericalangle AFM = 60°$ и се извърши прегъване на три равни части.

Заключение

Да се върнем към изследването с динамичен софтуер. Изоставяме условие (най-често едно) и построяваме динамична конструкция, отговаряща на останалите условия в задачата. Наблюдаваме за различни фигури кое е това, което остава постоянно. След като формулираме хипотеза, добре е да проверим за още няколко случая верността ѝ чрез динамичната конструкция. Защото, ако за един случай се окаже, че хипотезата не е вярна, трябва да я отхвърлим. Ако за разглежданите случаи хипотезата се потвърди, преминаваме към доказателството ѝ.

За решаване на екстремални задачи има алгоритми. В редица случаи такива задачи могат да се решат и с други средства, т.е. и от ученици, които не са изучавали *Анализ*. И то именно благодарение на преформулиране на задачата, основано на експериментална дейност. Организиране на експериментална работа в обучението по математика в училище е основна цел на европейски проект *Fibonacci* [1]. Други примери с екстремални задачи, решени с използване на динамичен софтуер, както и изследователски задачи с прегъване, можете да намерите в [2], [3], [4], [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кендеров, П. Иновации в математическото образование: европейските проекти *InnoMathEd* и *Fibonacci*. Математика и математическо образование, Сборник доклади на 39 пролетна конференция на СМБ, 2010.

2. Василева, А. Ако хамалите бяха математици и други екстремалности. – Математика и информатика, бр.1, 2011. с. 11-18.

3. http://www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/archive.htm.

4. Ulm, V. (Eds) Inquiry-based mathematics education for gifted children in primary school. 2011. University of Augsburg, ISBN 978 3 00 033657-7.

5. Ulm, V., P. Baptist, Towards new teaching in mathematics. part II, Baptist, P., C. Miller, D. Raab (Eds). University of Bayreuth.