ФИБОНАЧИ - РАЗПРОСТРАНЕНИЕ НА ИЗСЛЕДОВАТЕЛСКИЯ ПОДХОД В ОБРАЗОВАНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА И ПРИРОДНИ НАУКИ В ЕВРОПА 2010-2013

http://www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/

Координатор на проекта за България: акад. Петър Кендеров

ISSN 0204-6881

цена 5.00 лв.

Математика

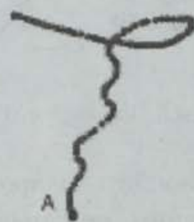
6
2012

СЛЕДАТА

Тони Чехларова

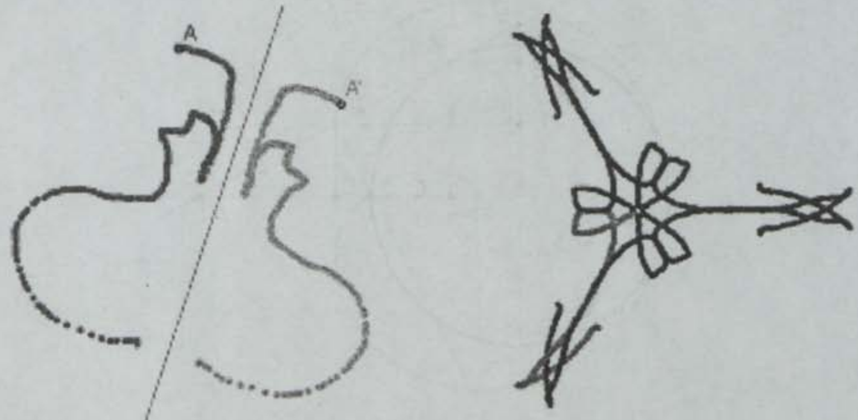
Лесно е да оставиш *следа*, ако си точка в *Geogebra*.

Ако си свободна точка, *следата* зависи само от твоето придвижване.



Фиг. 1 (http://www.math.bas.bg/omi/docs/Sleda/fig1.html)

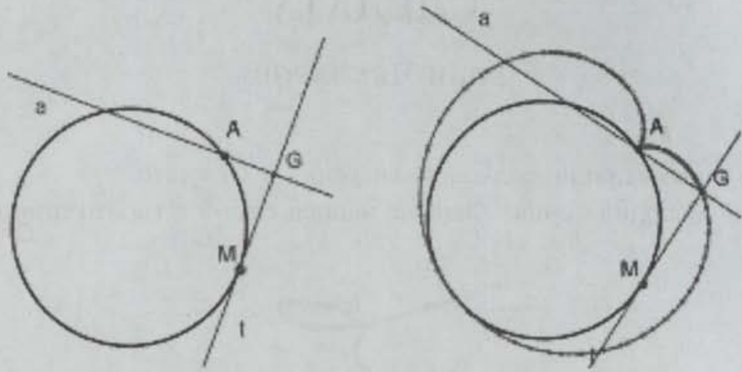
Ако си образ на точка при някоя еднаквост, *следата* ти е зависима от първообраза. Понякога е удобно да си такава точка, от гледна точка на точност и икономичност. В примерите долу и първообразът е в режим *следа*.



Фиг. 2 (http://www.math.bas.bg/omi/docs/Sleda/fig2a.html)
(http://www.math.bas.bg/omi/docs/Sleda/fig2b.html)

Ако си сечение на два обекта, *следата* ти зависи от тяхното изменение.

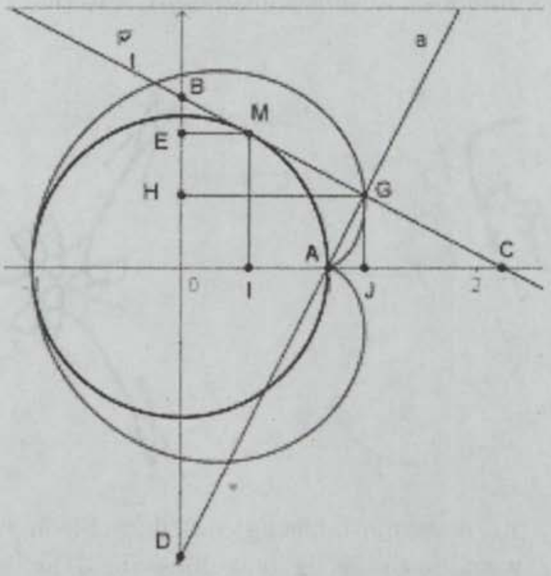
Нека точка G е получена по следния начин. Точката A е фиксирана върху окръжност k, а точката M е произволна от k. Правата t е допирателната към окръжността k в точка M, а правата a минава през A и е перпендикулярна на t. Точка G е пресечната точка на t и a. Да наблюдаваме *следата* на G при движението на M върху окръжността.



Фиг. 3 (http://www.math.bas.bg/omi/docs/Sleda/fig3.html)

Следата наподобява кардиоида. Да проверим, като за удобство нека $k(O(0;0);1)$ и $A(1;0)$. Ще уточним, че кардиоидата може да се представи чрез

$$\begin{aligned} x &= r\cos\alpha\,(1-\cos\alpha) \\ y &= r\sin\alpha\,(1-\cos\alpha) \end{aligned} \quad [1]. \tag{1}$$



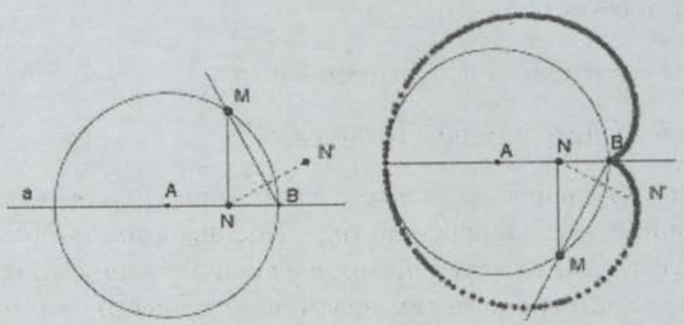
Фиг. 4 (http://www.math.bas.bg/omi/docs/Sleda/fig4.html)

Нека $\sphericalangle AOM = \alpha$, т.е. $M(\cos\alpha, \sin\alpha)$ и да означим координатите на точка G с x и y, т.е. $G(x, y)$. От $\dfrac{GJ}{MI} = \dfrac{CG}{CM} = \dfrac{CA}{CO}$ следва $\dfrac{y}{\sin\alpha} = \dfrac{\frac{1}{\cos\alpha} - 1}{\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)}$, т.е. $y = \sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha$.

От $\dfrac{OJ}{OI} = \dfrac{BG}{BM} = \dfrac{BD}{BO}$ следва $\dfrac{x}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{1}{\sin\alpha} + \operatorname{tg}\alpha}{\frac{1}{\sin\alpha}}$, т.е. $x = \cos\alpha + \sin^2\alpha$.

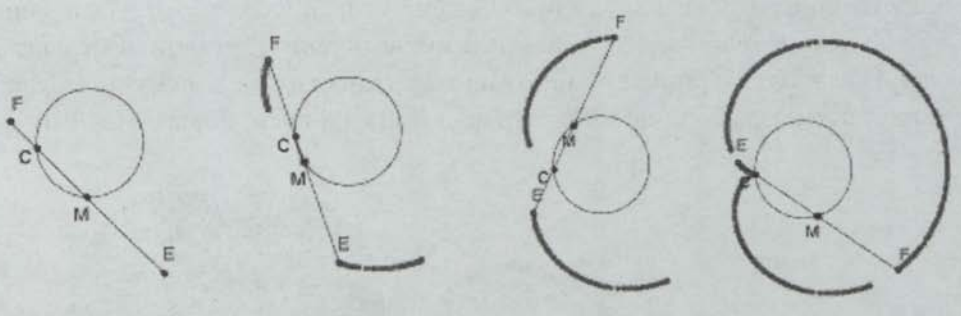
Точка $G(x, y)$ описва кардиоида.

Наблюдавайте следата на точка N' при движението на M върху окръжност $k(A, AB)$, където N е проекцията на M върху правата AB, а N' е образ на N при осева симетрия с ос MB. Направете хипотеза.



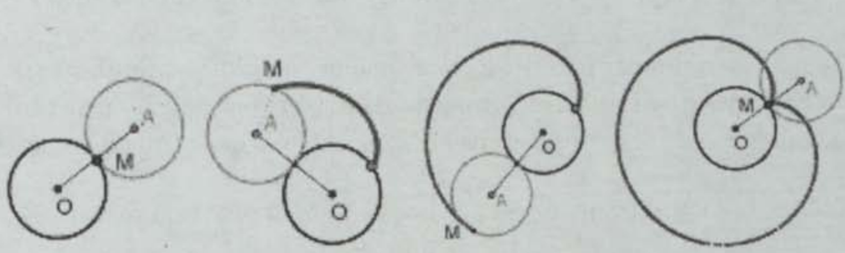
Фиг. 5 (http://www.math.bas.bg/omi/docs/Sleda/fig5.html)

Наблюдавайте следите на краищата на отсечка $EF = 2a$ при движението на средата ѝ M върху окръжност с диаметър a при условие, че фиксирана точка C от окръжността лежи на EF. Направете хипотеза.



Фиг. 6 (http://www.math.bas.bg/omi/docs/Sleda/fig6.html)

Търкаляйте окръжността $k(A; r)$ върху окръжността $p(O; r)$ и наблюдавайте следата на произволна точка M от k. Направете хипотеза.



Фиг. 7 (http://www.math.bas.bg/omi/docs/Sleda/fig7.html)

А какво ще се получи, ако търкаляме окръжност с по-голям (или по-малък) радиус?

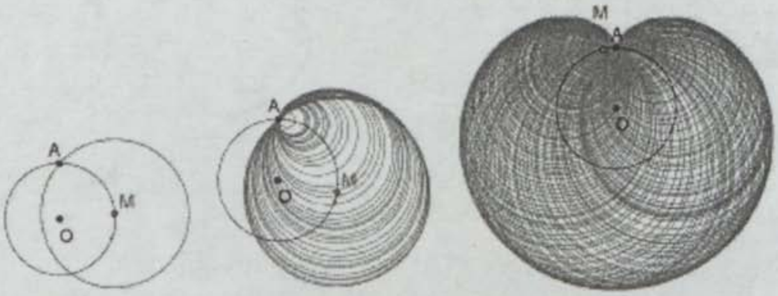
Какъв ще е резултатът, ако:

- Правата a от фиг. 3 не е перпендикулярна, а сключва ъгъл $\alpha \neq 90°$ с допирателната t?
- Точката A от фиг. 3 не е от окръжността?
- Точката M от фиг. 6 не е среда на EF?

Това са някои от въпросите, които е естествено да си задаваме, след изследване с динамичните фигури по-горе. Поставянето им е от най-важните елементи на изследователския процес и е в основата на откритието. И ако в училище не достига време за тях, знаем, че училището е само една част от дома на образованието и такива задачи са мост за излизане на обучението от училище [2].

Интересни факти можете да откриете за кардиоидата и връзката ѝ с охлюва на Паскал, параболата, един конкретен фрактал, епициклоидата, ..., някои от които се изучават от студентите по математика и информатика. И ако в математиката тези факти са известни, можем да потърсим нови начини за доказване, а приложението им в изкуството е безгранично.

Не само точката, а и правата и кривата могат да оставят *следа*. Наблюдавайте геометричното място на окръжностите k с център – точка M върху дадена окръжност p и минаващи през фиксирана точка A от p.



Фиг. 8 (http://www.math.bas.bg/omi/docs/Sleda/fig8.html)

Следата е единият начин за „откриване" на геометрични места на точки. В специализирания математически софтуер обикновено има команда за получаване на геометрично място на точки. В *Geogebra* такава е командата

Locus[<Point Creating Locus Line Q>, <Point P>]
или
Locus[<Point Creating Locus Line Q>, <Slider t>]

за построяване на геометричното място на точки Q, зависещи от точка P (или съответно от плъзгач/параметър t) [3].

Може да се използва и бутонът .

В повечето файлове на посочените горе адреси [4] може да видите резултат от използването на тази команда, като кликнете върху отметката.

Всеки от Вас, скъпи ученици, ще остави *следа* и от Вас зависи каква. Математиката може да Ви помогне да откривате Вашия път.

Литература

1. http://mathworld.wolfram.com/Cardioid.html (03.11.2012)

2. Кендеров, П. Иновации в математическото образование: европейските проекти *InnoMathEd* и *Fibonacci*. Математика и математическо образование, Сборник доклади на 39. пролетна конференция на СМБ, 2010. с. 63-72

3. http://wiki.geogebra.org/en/Locus_Command (03.11.2012)

4. http://www.math.bas.bg/omi/Fibonacci/archive.htm (03.11.2012)