PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ, РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИЕСЯ К ПОЗИТИВНЫМ ФУНКЦИЯМ

ВЛАДИМИР Л. ЧАКАЛОВ, ЕМАНУИЛ М. ДИМИТРОВ

В работе строится интерполяционный процесс для позитивных линейных функционалов, определенных на пространстве $\mathbf{K}(T)$ (T — локально компактное пространство, а $\mathbf{K}(T)$ — пространство всех действительных непрерывных функций с компактным носителем, определенных на T). На этой основе строятся интерполяционные процессы, равномерно сходящиеся к так называемым позитивным функциям. В качестве примеров доказываются теоремы, обобщающие теоремы С. Н. Бернштейна о равномерном приближении абсолютно монотонных функций в интервалах $[0, 1]$ и $(-\infty, 0]$.

1. Здесь мы докажем некоторые (в основном известные) теоремы об интерполяции позитивных функционалов, а также и некоторые простые результаты, необходимые для дальнейшего изложения.

Обозначим через R^n пространство действительных n-мерных векторов, нормированное при помощи скалярного произведения, т. е. если $a=(a_1, \ldots, a_n)$ и $b=(b_1, \ldots, b_n)$ — два вектора пространства R^n, то $(a, b)=a_1b_1+\ldots+a_nb_n$ — их скалярное произведение, а $\|a\|=\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}$ — норма вектора a.

Пусть G — некоторое множество векторов пространства R^n. Будем говорить, что вектор $l \in R^n$ позитивен относительно множества G, если для любого $a \in R^n$, удовлетворяющего неравенству $(a, g) \geqq 0$ для всех $g \in G$, выполняется также и неравенство $(a, l) \geqq 0$.

В дальнейшем изложении мы будем пользоваться хорошо известной теоремой отделимости Минковского.

Заданное множество векторов K называется конусом, если вместе с a K содержит все векторы вида λa, где $\lambda \geqq 0$. Конус K называется замкнутым, если из $a_n \in K$ и $\lim_{n\to\infty}\|a_n-a\|=0$ следует, что $a \in K$. Если из $a, b \in K$ и $\lambda, \mu \geqq 0$ следует, что $\lambda a+\mu b \in K$, то K называется выпуклым конусом.

Теорема (Г. Минковский). *Если $K \subset R^n$ — выпуклый замкнутый конус, а $l \in R^n$ — позитивный вектор относительно K, то $l \in K$.*

Пусть T — компактное топологическое пространство и $g: T \to R^n$ — непрерывная функция. При этом предполагается существование вектора $a_0 \in R^n$ так, что $(a_0, g(t))>0$ для всех $t \in T$. Очевидно, что $\inf_{t\in T}(a_0, g(t))>0$.

Обозначим через m число линейно независимых векторов множества $g(T)$ $(m \leqq n)$. Пусть K — конус всех линейных комбинаций с неотрицательными коэффициентами не более чем m векторов множества $g(T)$, т. е. множество всех векторов $k \in R^n$ вида $k = \mu_1 g(t_1) + \ldots + \mu_m g(t_m)$, где $t_1, \ldots, t_m \in T$ и $\mu_1, \ldots, \mu_m \geqq 0$. Покажем, что K — замкнутый и выпуклый конус. Действительно, если $\{k_s\}_{s=1}^{\infty}$ последовательность векторов из K, сходящаяся к вектору k_0, то $k_s = \mu_{1s} g(t_{1s}) + \ldots + \mu_{ms} g(t_{ms})$, где $t_{is} \in T$, $\mu_{is} \geqq 0$ $(i = 1, \ldots, m;\ s = 1, 2, \ldots)$. Так как $(a_0, k_s) = \sum_{i=1}^{m} \mu_{is}(a_0, g(t_{is})) \geqq \mu_{is} \inf_{t \in T}(a_0, g(t)) > 0$, то

$$(1) \qquad 0 \leqq \mu_{is} \leqq (a_0, k_s)/\inf_{t \in T}(a_0, g(t)) \quad (i = 1, \ldots, m;\ s = 1, 2, \ldots).$$

Применяя к (a_0, k_s) неравенство Коши и имея в виду ограниченность последовательности $\{k_s\}_{s=1}^{\infty}$, получаем, что последовательности $\{\mu_{is}\}_{s=1}^{\infty}$ $(i = 1, \ldots, m)$ ограничены. Так как $\{g(t_{is})\}_{s=1}^{\infty} \subset g(T)$ для $i = 1, \ldots, m$ (напомним, что g — непрерывная функция на компактном пространстве T, так что $g(T)$ — компактное множество в R^n), то, не уменьшая общности, можно предположить сходимость последовательностей $\{\mu_{is}\}_{s=1}^{\infty}$, $\{g(t_{is})\}_{s=1}^{\infty}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Пусть $\lim_{s\to\infty} \mu_{is} = \mu_i$, $\lim_{s\to\infty} g(t_{is}) = g(t_i)$ $(t_i \in T;\ i = 1, \ldots, m)$. Тогда $k_0 = \lim_{s\to\infty} k_s = \mu_1 g(t_1) + \ldots + \mu_m g(t_m) \in K$.

Доказательство выпуклости K следует из одной леммы Штейница [2].

Лемма (Штейниц). *Каждую линейную комбинацию с положительными коэффициентами r линейно зависимых векторов можно представить в виде линейной комбинации с положительными коэффициентами не более чем $(r-1)$-векторов из данных.*

Действительно, пусть $y_1, \ldots, y_r$ — r векторов, для которых имеет место линейная зависимость $\beta_1 y_1 + \ldots + \beta_r y_r = 0$ (здесь $\beta_1, \ldots, \beta_r$ — действительные числа, которые не все равны нулю) и пусть $y = \mu_1 y_1 + \ldots + \mu_r y_r$, где $\mu_i > 0$ $(i = 1, \ldots, r)$. Чтобы доказать лемму, достаточно обозначить через μ наибольшее среди чисел $\beta_1/\mu_1, \ldots, \beta_r/\mu_r$ (не ограничивая общности, можно предполагать, что хотя бы одно из чисел β_i больше нуля, так что $\mu > 0$) и иметь в виду, что в равенстве

$$y = \frac{\mu\mu_1 - \beta_1}{\mu} y_1 + \ldots + \frac{\mu\mu_r - \beta_r}{\mu} y_r$$

все коэффициенты неотрицательны, причем хотя бы один из них равняется нулю.

Из этой леммы следует, что K выпуклый конус. Действительно, если $y', y'' \in K$ и $\lambda, \mu > 0$, то $\lambda y' + \mu y''$ можно представить в виде линейной комбинации с неотрицательными коэффициентами не более чем $2m$ векторов множества $g(T)$. Если число положительных коэффициентов в этой линейной комбинации больше m, то, применяя несколько раз лемму Штейница, можно сделать это число $\leqq m$, откуда следует, что $\lambda y' + \mu y'' \in K$.

Очевидно, каждый вектор из K позитивен относительно множества $g(T)$. Действительно, если $k \in K$, то $k = \mu_1 g(t_1) + \ldots + \mu_m g(t_m)$, где $\mu_i \geqq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$. Пусть a — вектор пространства R^n, для которого имеет место неравенство $(a, g(t)) \geqq 0$ для всех $t \in T$. Тогда $(a, k) = \mu_1(a, g(t_1)) + \ldots + \mu_m(a, g(t_m)) \geqq 0$, откуда следует позитивность k относительно $g(T)$.

Обратное утверждение тоже верно. Действительно, пусть вектор $l \in R^n$ позитивен относительно $g(T)$. Легко показать, что $l \in K$. Для этого достаточно отметить, что l является позитивным вектором относительно K, а так как K замкнутый выпуклый конус, то согласно теоремы Минковского $l \in K$. Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть T — компактное топологическое пространство и $g: T \to R^n$ — непрерывная функция. Предположим далее существование вектора $a_0 \in R^n$, для которого неравенство $(a_0, g(t)) > 0$ выполняется для всех $t \in T$. Если m — максимальное число линейно независимых векторов множества $g(T)$, то любой позитивный относительно $g(T)$ вектор можно представить в виде линейной комбинации с неотрицательными коэффициентами не более чем m векторов из $g(T)$.*

Ниже мы сформулируем теорему 1 в терминах скалярных функций и линейных функционалов.

Пусть T — компактное топологическое пространство и $g_1, \ldots, g_n: T \to R^1$ — n непрерывных функций. Обозначим через m число линейно независимых среди функций $g_1, \ldots, g_n$. Пусть далее X_m—m-мерное пространство всех линейных комбинаций с действительными коэффициентами вида

$$x = a_1 g_1 + \ldots + a_n g_n \tag{2}$$

(здесь $a_1, \ldots, a_n$ — действительные числа).

Пусть l — аддитивный однородный функционал, определенный на X_m. Полагая $l_i = l(g_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, $l = (l_1, \ldots, l_n)$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $g = (g_1, \ldots, g_n)$, имеем $x(t) = (a, g(t))$, $l(x) = (a, l)$. При этом, очевидно, l — позитивный функционал тогда и только тогда, когда $l = (l_1, \ldots, l_n)$ — позитивный вектор относительно множества $g(T)$. Имея в виду это, мы сформулируем теорему 1 следующим образом.

Теорема 1′. *Пусть T — компактное топологическое пространство и $g_1, \ldots, g_n: T \to R^1$ — n действительных непрерывных функций, среди которых имеются m линейно независимых. Пусть далее l — линейный позитивный функционал, определенный на пространстве X_m всех функций вида (2). Кроме того, предполагается существование положительной функции $x_0 \in X_m$ (т. е. $x_0 > 0$ на T). Тогда существуют m неотрицательных чисел $\mu_1, \ldots, \mu_m$ и m значений $t - t_1, \ldots, t_m$ так, что для каждой функции $x \in X_m$ имеет место равенство*

$$l(x) = \mu_1 x(t_1) + \ldots + \mu_m x(t_m). \tag{3}$$

При помощи теоремы 1′ (она принадлежит, в основном, Ф. Риссу [1]) мы докажем одну интерполяционную теорему для позитивных линейных функционалов, которая понадобится в дальнейшем изложении.

Обозначим через T локально компактное топологическое пространство и через $\mathbf{K}(T)$ — линейное пространство всех действительных непрерывных функций с компактным носителем, определенных на T. Пусть далее X — линейное подпространство пространства $\mathbf{K}(T)$, удовлетворяющее условию:

а. Для любого компактного множества $K \subset T$ существует такая неотрицательная функция $x_0 \in X$, что $x_0(t) > 0$ для всех $t \in K$.

Обозначим через $\{X_\alpha\}$ (здесь α пробегает некоторое множество индексов) совокупность всех конечномерных подпространств пространства X, удовлетворяющих следующему условию:

Для любого X_α существует такое компактное множество $K_\alpha \subset T$, что

1. Для некоторого элемента $x' \in X_\alpha$ выполняется неравенство $x'(t) > 0$ для всех $t \in K_\alpha$.

2. Любая неотрицательная на K_α функция $x \in X_\alpha$ неотрицательна на всем пространстве T.

Используя условие a, стр. 5, легко показать существование таких подпространств.

Покажем, что любые k функции $x_1, \ldots, x_k$ пространства X можно включить в некоторое подпространство X_α. Чтобы доказать это, рассмотрим некоторое конечномерное подпространство пространства X, содержащее все функции $x_1, \ldots, x_k$, и обозначим через K объединение носителей функций этого подпространства. Очевидно K — компактное множество. Если подпространство содержит функцию x', для которой $\inf_{t \in K} x'(t) > 0$, то, очевидно, K является искомым компактным множеством K_α, для которого выполняются условия 1 и 2. Тогда данное конечномерное подпространство является пространством „вида X_α". Рассмотрим теперь случай, когда такой функции не существует. Тогда каждая неотрицательная функция данного подпространства аннулируется для некоторого $t' \in K$. Обозначим через x_0 неотрицательную функцию пространства X, для которой $\inf_{t \in K} x_0(t) > 0$, и рассмотрим конечномерное подпространство X^* пространства X, полученное присоединением функции x_0 к данному подпространству. Очевидно, условие 1 удовлетворяется при $X_\alpha = X^*$ и $K_\alpha = K$. Любой элемент $x \in X^*$ имеет представление вида $x = a_0 x_0 + y$, где y принадлежит данному подпространству. Легко видеть, что если $x(t) \geqq 0$ для всех $t \in K$, то $a_0 \geqq 0$. Действительно, в противном случае, если $a_0 < 0$, имеет место неравенство $y(t) = x(t) - a_0 x_0(t) \geqq 0$ для $t \in K$, следовательно, для некоторого $t' \in K$ будем иметь $y(t') = x(t') - a_0 x_0(t') = 0$. Отсюда получаем невозможное неравенство

$$x(t') = y(t') + a_0 x_0(t') = a_0 x_0(t') < 0.$$

Из неравенства $a_0 \geqq 0$ сразу получается, что $x(t) \geqq 0$ для всех $t \in T$, т. е. для $X_\alpha = X^*$ и $K_\alpha = K$ выполняется и условие 2.

Упорядочим множество $\{\alpha\}$ индексов множества $\{X_\alpha\}$ следующим образом. Будем считать, что $\alpha' \prec \alpha''$, если $X_{\alpha'} \subset X_{\alpha''}$. Таким образом, очевидно, $\{\alpha\}$ становится направленным множеством, а $\{X_\alpha\}$ — обобщенной последовательностью. Докажем, например, что для любых α' и α'' существует такое α''', что $\alpha' \prec \alpha'''$ и $\alpha'' \prec \alpha'''$. Пусть $\{x_1', \ldots, x_k'\}$ — базис пространства $X_{\alpha'}$, а $\{x_1'', \ldots, x_l''\}$ — базис пространства $X_{\alpha''}$. Согласно доказанному выше, существует пространство $X_{\alpha'''}$, содержащее функции $x_1', \ldots, x_k', x_1'', \ldots, x_l''$. Отсюда следует, что $X_{\alpha'} \subset X_{\alpha'''}$ и $X_{\alpha''} \subset X_{\alpha'''}$, а это означает, что $\alpha' \prec \alpha'''$ и $\alpha'' \prec \alpha'''$.

Пусть на пространстве X задан позитивный линейный функционал l. Очевидно, l — позитивен на каждом пространстве X_α. Имея в виду 1 и 2 стр. 6, заключаем, что если $x \in X_\alpha$ и $x(t) \geqq 0$ для $t \in K_\alpha$, то $l(x) \geqq 0$. Тогда из теоремы 1' следует существование конечного числа неотрицательных чисел $\mu_1^\alpha, \ldots, \mu_m^\alpha$ и элементов $t_1^\alpha, \ldots, t_m^\alpha$ множества T $(t_1^\alpha \in K_\alpha)$ так, что для любой функции $x \in X_\alpha$ было выполнено равенство

$$l(x) = \mu_1^\alpha x(t_1^\alpha) + \ldots + \mu_m^\alpha x(t_m^\alpha).$$

Обозначим через L_α функционал, определенный на $\mathbf{K}(T)$ равенством

$$L_\alpha(y) = \mu_1^\alpha y(t_1^\alpha) + \ldots + \mu_m^\alpha y(t_m^\alpha) \tag{4}$$

(здесь $y \in \mathbf{K}(T)$). Очевидно, что если $\alpha \prec \alpha'$, то для всех $x \in X_\alpha$ $l(x) = L_\alpha(x) = L_{\alpha'}(x)$. Ясно также, что $\{L_\alpha\}$ последовательность (в общем случае обобщенная) линейных функционалов. Покажем, что существует сходящаяся для всех $y \in \mathbf{K}(T)$ подпоследовательность последовательности $\{L_\alpha\}$. Предел L этой подпоследовательности будет, очевидно, продолжением функционала l на $\mathbf{K}(T)$. Точнее говоря, мы докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть T — локально компактное пространство, а X — линейное подпространство пространства непрерывных функций с компактным носителем $\mathbf{K}(T)$, удовлетворяющее условию а, стр. 5. Пусть далее l — позитивный линейный функционал, определенный на пространстве X. Тогда существует позитивное линейное продолжение L функционала l на пространстве $\mathbf{K}(T)$, а также последовательность $\{L_\gamma\}$ позитивных линейных функционалов вида (4) так, что имеют место соотношения:*

а. Для каждого $x \in X$ выполняется равенство $L_\gamma(x) = l(x)$ для достаточно больших γ.

б. $\lim_\gamma L_\gamma(y) = L(y)$ для любого $y \in \mathbf{K}(T)$.

При этом необходимым и достаточным условием того, что каждый позитивный линейный функционал имеет единственное позитивное линейное продолжение на $\mathbf{K}(T)$, является плотность пространства X в $\mathbf{K}(T)$ относительно топологии индуктивного предела [9, с. 590, (1)].

Замечание. Существование позитивного линейного продолжения сразу следует из теоремы М. Риса о продолжении позитивных линейных функционалов [3], так что можно считать, что в рассматриваемом здесь случае теорема 2 уточняет теорему М. Риса.

Доказательство. Здесь мы построим искомую последовательность $\{L_\gamma\}$. Сначала покажем, что для каждого $y \in \mathbf{K}(T)$ имеется положительная константа M_y такая, что для всех достаточно больших α выполняется неравенство $L_\alpha(y) \leqq M_y$. Действительно, пусть $y \in \mathbf{K}(T)$. Согласно условию а, стр. 5, можно выбрать функцию $x_y \in X$ так, что $x_y \geqq 0$ и $x_y(t) > 0$ для $t \in \operatorname{supp} y$. Дальше выбираем константу N_y так, чтобы были выполнены неравенства $-N_y x_y(t) \leqq y(t) \leqq N_y x_y(t)$ для всех $t \in T$. Для этого достаточно положить $N_y = \sup|y| / \inf\{x_y(t) : t \in \operatorname{supp} y\}$. Отсюда получаем неравенства $-N_y L_\alpha(x_y) \leqq L_\alpha(y) \leqq N_y L_\alpha(x_y)$. Так как $L_\alpha(x_y) = l(x_y)$ для всех достаточно больших α, то для таких α имеем $L_\alpha(y) \leqq M_y$, где $M_y = N_y l(x_y)$.

Чтобы выбрать сходящуюся для всех $y \in \mathbf{K}(T)$ подпоследовательность последовательности $\{L_\alpha\}$, мы применим так называемый диагональный принцип.

Пусть Q — множество индексов и пусть любому $q \in Q$ сопоставлено топологическое пространство K_q. Пусть далее $\{f_\delta\}$ — последовательность функций, определенных на множестве Q и удовлетворяющих условию, что $f_\delta(q) \in K_q$ для любого q из Q. Диагональный принцип составляет содержание следующей теоремы (эта теорема известна нам из лекций по функциональному анализу, прочитанных Я. Тагамлицким в Софийском университете).

Теорема. *Пусть последовательность $\{f_\delta\}$ удовлетворяет следующему условию: Из каждой подпоследовательности $\{f_{\delta_\mu}(q)\}$ (где q — фиксированный элемент множества Q) можно выбрать сходящуюся к некоторому элементу множества K_q подпоследовательность $\{f_{\delta_{\mu_\nu}}(q)\}$ (здесь сходимость понимается в смысле топологии в K_q). Тогда существует такая подпоследовательность $\{f_{\delta_\beta}\}$ последовательности $\{f_\delta\}$, что последовательность $\{f_{\delta_\beta}(q)\}$ сходится для любого фиксированного q из Q.*

Дальше мы используем этот принцип в частном случае, когда все K_q компактные пространства. В этом случае, очевидно, каждая последовательность $\{f_\delta\}$ удовлетворяет условию теоремы, а теорема становится эквивалентной теореме Тихонова [4].

Положим $Q = \mathbf{K}(T)$, $K_q = [-\infty, \infty]$, причем K_q наделено двухточечной компактификацией топологии в R^1. Применив к последовательности $\{L_\alpha\}$ диагональный принцип, получаем, что существуют подпоследовательность $\{L_{\alpha_\beta}\}$ и функция $L: \mathbf{K}(T) \to [-\infty, \infty]$, такие, что для каждой функции y из $\mathbf{K}(T)$ имеет место соотношение $\lim_\beta L_{\alpha_\beta}(y) = L(y)$. Легко видеть, что $L(y) \neq \pm\infty$ для всех $y \in \mathbf{K}(T)$. Действительно, так как для всех достаточно больших β имеет место неравенство $|L_{\alpha_\beta}(y)| \leqq M_y$, то предельным переходом получается неравенство $|L(y)| \leqq M_y$, откуда следует, что $L(y) \neq \pm\infty$.

То, что L позитивный линейный функционал на пространстве $\mathbf{K}(T)$, очевидно. Ясно так же, что значения L и l совпадают для всех $x \in X$. Действительно, если $x \in X$, то $x \in X_\alpha$ для всех достаточно больших α, следовательно, и для всех достаточно больших β будем иметь $L_{\alpha\beta}(x) = l(x)$, откуда $L(x) = l(x)$. Чтобы закончить доказательство теоремы, остается показать, что необходимым и достаточным условием для единственности продолжения L любого позитивного линейного функционала l является плотность пространства X в $\mathbf{K}(T)$ относительно топологии индуктивного предела.

Достаточность очевидна. Действительно, если L_1 и L_2 — два позитивных продолжения некоторого позитивного линейного функционала l, то из непрерывности L_1 и L_2 относительно топологии индуктивного предела, а также из плотности пространства X в $\mathbf{K}(T)$ относительно той же самой топологии следует, что для любого $y \in \mathbf{K}(T)$ будем иметь $L_1(y) = L_2(y)$.

Необходимость можно доказать следующим образом. Пусть каждый позитивный линейный функционал l, определенный на X, имеет единственное продолжение L на $\mathbf{K}(T)$. Отсюда следует, что и каждый непрерывный линейный функционал на X имеет единственное продолжение на $\mathbf{K}(T)$. Допустим, что существует функция $y_0 \in \mathbf{K}(T)$, не принадлежащая замыканию пространства X относительно топологии индуктивного предела. По одному из следствий теоремы Хана — Банаха [9, с. 172, следствие 2. 1. 5] существует такой непрерывный линейный функционал $\mathbf{L}$, определенный на $\mathbf{K}(T)$, что $\mathbf{L}(x)=0$ для всех $x \in X$ и $\mathbf{L}(y_0)=1$. Но функционал $\mathbf{L}^*=0$, очевидно, удовлетворяет соотношениям $\mathbf{L}^* \neq \mathbf{L}$, $\mathbf{L}^*(x)=\mathbf{L}(x)$ для $x \in X$, что противоречит предположению об единственности продолжения. Полученное противоречие доказывает необходимость.

Замечание 1. Теорему 2 можно рассматривать как теорему об интегральном представлении позитивных линейных функционалов, определенных на X, так как каждому функционалу этого вида сопоставляется некоторое продолжение (мера) на пространстве $\mathbf{K}(T)$.

Замечание 2. В теореме 2 можно утверждать, что для любого позитивного продолжения L функционала l существует последовательность $\{L_\gamma\}$, удовлетворяющая условиям а и б этой теоремы. Действительно, если L любое позитивное продолжение функционала l на $\mathbf{K}(T)$, то, применив доказательство теоремы для $X=\mathbf{K}(T)$ и $l=L$, получаем утверждение нашего замечания. Отметим, что утверждение замечания 2 можно доказать, не используя диагонального принципа.

Замечание 3. В частном случае, когда T компактное пространство, $\mathbf{K}(T)$ совпадает с пространством $C(T)$ всех непрерывных функций на T, а топология индуктивного предела совпадает с равномерной топологией. Легко видеть также, что в этом случае условие а, стр. 5, эквивалентно следующему условию:

а′. Существует $x_0 \in X$ так, что $x_0(t)>0$ для всех $t \in T$.

2. Прежде чем сформулировать основные теоремы этого параграфа, мы отметим некоторые простые и хорошо известные свойства позитивных линейных функционалов.

Через T будем обозначать компактное топологическое пространство, а через $C(T)$ — пространство всех действительных непрерывных функций, определенных на T.

Пусть L — позитивный линейный функционал, определенный на $C(T)$, а $\tau \subset T$ — подмножество множества T. Число $\rho(\tau)$, определенное равенством

$$\rho(\tau)=\inf\{L(y): y \in C(t),\ y \geqq 0,\ y(t)=1,\ t \in \tau\},$$

будем называть массой, сосредоточенной в τ функционалом L (в частном случае, когда $\tau=\{t'\}$, где $t' \in T$, вместо $\rho(\tau)$ будем писать $\rho(t')$ и будем говорить, что L сосредоточивает массу $\rho(t')$ в точку t').

Дальше мы будем пользоваться следующим очевидным следствием этого определения.

Следствие. *Если L сосредоточивает массу 0 на множество $\tau \subset T$, то для любого $\varepsilon>0$ существует функция $\varphi \in C(T)$, для которой $0 \leqq \varphi \leqq 1$, $\varphi(t)=1$ $(t \in \tau)$ и $L(\varphi)<\varepsilon$.*

Имеют место следующие утверждения.

1. *Если $\varphi \in C(T)$, $0 \leqq \varphi \leqq 1$ и $\varphi(t)=1$ $(t \in \tau)$, то*

$$\rho(\tau)=\inf\{L(y\varphi): y \in C(T),\ y \geqq 0,\ y(t)=1,\ t \in \tau\}.$$

Доказательство следует сразу из соотношений $y(t)\varphi(t)=1$ $(t \in \tau)$, $y \geqq y\varphi$, которые выполняются для каждой функции $y \in C(T)$, для которой $y \geqq 0$ и $y(t)=1$ для $t \in \tau$.

2. *Если T отделимое компактное топологическое пространство, а L — позитивный линейный функционал, определенный на пространстве $C(T)$ и сосредоточивающий массы $\rho(t_1), \ldots, \rho(t_s)$ в точки $t_1, \ldots, t_s$ $(t_i \neq t_j$ при $i \neq j)$, то функционал*

$$L'(y) = L(y) - \sum_{i=1}^{s} \rho(t_i)\, y(t_i)$$

позитивен и сосредоточивает нулевые массы в точки $t_1, \ldots, t_s$.

Легко видеть, что функционал L' позитивен. Чтобы доказать это, выберем непересекающиеся окрестности (здесь используется отделимость T) $V_1, \ldots, V_s$ точек $t_1, \ldots, t_s$ и обозначим через $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ функции пространства $C(T)$, удовлетворяющие условиям $0 \leqq \varphi_i \leqq 1$, $\varphi_i(t_i) = 1$, $\varphi_i(t) = 0$ для $t \notin V_i$ $(i = 1, \ldots, s)$. Тогда, очевидно, $0 \leqq \varphi_1 + \ldots + \varphi_s \leqq 1$. Если $y \in C(T)$ и $y \geqq 0$, то

$$L'(y) = L(y) - \sum_{i=1}^{s} \rho(t_i)\, y(t_i) \geqq L(y(\varphi_1 + \ldots + \varphi_s)) - \sum_{i=1}^{s} \rho(t_i)\, y(t_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{s} [L(y\varphi_i) - \rho(t_i)\, y(t_i)].$$

Если $y(t_i) = 0$, то $L(y\varphi_i) - \rho(t_i)\, y(t_i) = L(y\varphi_i) \geqq 0$, а если $y(t_i) > 0$, то $L(y\varphi_i) - \rho(t_i)\, y(t_i) = [L(y\varphi_i / y(t_i)) - \rho(t_i)]\, y(t_i) \geqq 0$, следовательно, $L'(y) \geqq 0$. Обозначая через $\rho'(t')$ массу, сосредоточенную в точке t' функционалом L' и применяя свойство 1 для функции $\varphi = \varphi_i$, получаем очевидные соотношения

$$\rho'(t_i) = \inf L'(y) = \inf L'(y\varphi_i) = \inf L(y\varphi_i) - \rho(t_i) = 0,$$

где inf берется для $y \in C(T)$, $y \geqq 0$, $y(t_i) = 1$, чем и заканчивается доказательство свойства **2**.

Здесь мы дадим некоторые определения, необходимые для дальнейшего изложения.

Обозначим через U некоторое непустое множество и предположим, как выше, что T компактное топологическое пространство. Обозначим дальше через $g: U \times T \to R^1$ функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

1. g — непрерывная функция переменного $t \in T$ для любого фиксированного $u \in U$.

2. Существует такое $u_0 \in U$, что $g(u_0, t) > 0$ для всех $t \in T$.

Будем говорить, что $p: U \to R^1$ позитивная функция относительно g, если p удовлетворяет следующему условию:

Если неравенство

$$x(t) = a_1 g(u_1, t) + \ldots + a_m g(u_m, t) \geqq 0 \tag{5}$$

выполняется для всех $t \in T$ при некотором выборе действительных чисел $a_1, \ldots, a_m$ и элементов $u_1, \ldots, u_m \in U$, то имеет место и неравенство

$$l(x) = a_1 p(u_1) + \ldots + a_m p(u_m) \geqq 0. \tag{6}$$

Обозначив через X линейное пространство всех линейных комбинаций вида (5), легко видеть, что функционал l, определенный на X равенством (6), позитивный линейный функционал. Так как T компактное множество и X удовлетворяет условиям теоремы 2, существует позитивное продолжение L функционала l на пространстве $C(T)$ и последовательность $\{L_\gamma\}$ функционалов вида (4) так, чтобы были выполнены утверждения а и б теоремы 2. Имея в виду, что для фиксированных $u \in U$ $p(u)=l(g(u, t))=L(g(u, t))$, получаем, что для таких $u \in U$

$$p(u)=L(g(u, t))=\lim_\gamma L_\gamma(g(u, t)).$$

Кроме того, для достаточно больших γ имеет место равенство $L_\gamma(g(u, t))=p(u)$.

В дальнейшем изложении мы будем решать следующую задачу. Если U наделено топологией, а $p: U \to R^1$ позитивная функция относительно g, найти достаточные условия того, что последовательность $\{L_\gamma(g(u, t))\}$ сходится равномерно к p на всем множестве U.

Предположим, что U и T компактные топологические пространства. Обозначим далее через $g: U \times T \to R^1$ функцию, удовлетворяющую следующим условиям:

а*) g непрерывна на T для любого фиксированного $u \in U$;

б*) существует $u_0 \in U$ так, что $g(u_0, t)>0$ для всех $t \in T$;

в*) g — ограниченная функция на множестве $U \times T$.

Далее мы предположим, что g непрерывна по отношению двух своих аргументов на некотором подмножестве множества $U \times T$, и обозначим через W множество всех точек пространства $U \times T$, для которых g имеет разрыв. Пусть $T_0 \subset T$ — проекция этого множества на T, т. е.

$$T_0=\{t: \exists\, u\, ((u, t) \in W)\}. \tag{7}$$

Для дальнейшего изложения понадобится следующее определение.

Пусть $p: U \to R^1$ — позитивная функция относительно g. Из теоремы 2 следует существование такого позитивного линейного функционала L, определенного на $C(T)$, что

$$p(u)=L(g(u, t)) \tag{8}$$

для всех $u \in U$. Будем говорить, что p сосредоточивает массу 0 на множество $\tau \subset T$, если имеется позитивный линейный функционал L со свойством (8), сосредоточивающий массу 0 на множество τ.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть U и T — компактные топологические пространства, пусть $g: U \times T \to R^1$ — функция, удовлетворяющая условиям а*), б*), в*), а $p: U \to R^1$ — позитивная относительно g функция, сосредоточивающая массу 0 на множество T_0, определенное формулой (7). Тогда функция p непрерывна на U. Кроме того, для любого выбора числа $\varepsilon>0$ и точек $u_1, \ldots, u_n \in U$ существуют такие точки $t_1, \ldots, t_m \in T$ и неотрицательные числа $\mu_1, \ldots, \mu_m$, что имеют место соотношения*

$$\left|p(u)-\sum_{i=1}^{m}\mu_i\, g(u,\ t_i)\right|<\varepsilon$$

для всех $u\in U$ *и* $p(u_j)=\sum_{i=1}^{m}\mu_i\, g(u_j,\ t_i)$ $(j=1,\ldots,n)$.

Доказательство. Сначала докажем непрерывность функции p. Для этой цели отметим, что если функция $h: U\times T\to R^1$ непрерывна на $U\times T$, то для любого $u'\in U$ и $\varepsilon>0$ существует такая окрестность $V_{u'}$ точки u', что для всех $u\in V_{u'}$ и всех $t\in T$ выполнено неравенство

$$|h(u',\ t)-h(u,\ t)|<\varepsilon .$$

Этот факт сразу следует из непрерывности функции h на компактном множестве $U\times T$. Пусть $\varepsilon>0$ и $\varphi\in C(T)$ — функция, для которой выполняются соотношения $0\leqq\varphi\leqq 1, \varphi(t)=1$ для $t\in T_0$ и $L(\varphi)<\varepsilon/4M$ (здесь $|g|<M$ и L — позитивный линейный функционал со свойством (8), сосредоточивающий массу 0 на T_0). Из очевидного равенства

$$p(u)-p(u')=L(\varphi(t)[g(u,\ t)-g(u',\ t)])+L([1-\varphi(t)][g(u,\ t)-g(u',\ t)])$$

следует, что

(9) $$|p(u)-p(u')|\leqq 2M\, L(\varphi)+|L([1-\varphi(t)][g(u,\ t)-g(u',\ t)])| .$$

Так как функция $h(u,\ t)=[1-\varphi(t)]\, g(u,\ t)$ непрерывна на $U\times T$, существует такая окрестность $V_{u'}$ точки u', что для $u\in V_{u'}$ выполняются соотношения

(10) $$|[1-\varphi(t)][g(u,\ t)-g(u',\ t)]|=|h(u,\ t)-h(u',\ t)|<\varepsilon/2L(1)$$

(мы рассматриваем случай, когда $L(1)>0$, так как если $L(1)=0$, то $L\equiv 0$ и $p\equiv 0$). Из (9) и (10) следует, что чля $u\in V_{u'}$, $|p(u)-p(u')|<\varepsilon$, откуда следует непрерывность p в каждой точке $u'\in U$. Положим для любого $u\in U$

$$L_\gamma(g(u,\ t))=p_\gamma(u)$$

и покажем, что последовательность $\{p_\gamma\}$ сходится к p равномерно на множестве U. Действительно, пусть $\varepsilon>0$ и $\varphi\in C(T)$, причем $0\leqq\varphi\leqq 1$, $\varphi(t)=1$ для $t\in T_0$ и $L(\varphi)<\varepsilon/12M$. Так как функция $h=[1-\varphi]g$ непрерывна на множестве $U\times T$, а p непрерывна на U, для любого $u'\in U$ можно выбрать окрестность $V_{u'}\subset U$ так, чтобы для каждого $u\in V_{u'}$ и $t\in T$ имели место неравенства

$$|h(u,\ t)-h(u',\ t)|<\varepsilon/6\, L(1),\quad |p(u')-p(u)|<\varepsilon/3 .$$

Пусть $V_{u_1'},\ldots,V_{u_s'}$ — конечное число окрестностей этого вида, покрывающие U. Рассматриваем очевидные неравенства

$$|p(u)-p_\gamma(u)|\leqq|p(u)-p(u_k')|+|p(u_k')-p_\gamma(u_k')|+|p_\gamma(u_k')-p_\gamma(u)|$$

(здесь для любого $u\in U$ мы выбираем u_k' так, чтобы $u\in V_{u_k'}$). Ввиду того, что имеют место неравенства

(11) $$|p(u)-p(u_k')|<\varepsilon/3,\quad |p(u_k')-p_\gamma(u_k')|<\varepsilon/3$$

(второе из них выполняется для достаточно больших γ), что чтобы доказать равномерную сходимость последовательности $\{p_\gamma\}$ на U, остается доказать, что для больших γ имеем $|p_\gamma(u_k')-p_\gamma(u)|<\varepsilon/3$ для всех $u\in U$ и соответствующих им u_k' (для которых $u\in V_{u'_k}$). Действительно, имеем

$$|p_\gamma(u_k')-p_\gamma(u)| = |L_\gamma(g(u_k',\ t)-g(u,\ t))| \leqq |L_\gamma(\varphi(t)[g(u_k',\ t)-g(u,\ t)])|$$
$$+ |L_\gamma([1-\varphi(t)][g(u_k',\ t)-g(u,\ t)])| .$$

С одной стороны, для достаточно больших γ, для любого $u\in U$ и соответствующего ему u_k' имеют место неравенства

$$|L_\gamma(\varphi(t)[g(u_k',\ t)-g(u,\ t)])| \leqq 2\,M\,L_\gamma(\varphi)<\varepsilon/6$$

(здесь используем то обстоятельство, что $\lim_\gamma L_\gamma(\varphi)=L(\varphi)<\varepsilon/12\,M$. С другой стороны, для таких γ выполняются неравенства

$$|L_\gamma([1-\varphi(t)][g(u_k',\ t)-g(u,\ t)])| \leqq L_\gamma(|h(u_k',\ t)-h(u,\ t)|)<\varepsilon/6$$

(так как $\lim_\gamma L_\gamma(1)=L(1)$). Отсюда следует, что для любого $u\in U$ и соответствующего ему u_k' будем иметь

$$|p_\gamma(u_k')-p_\gamma(u)|<\varepsilon/3 \tag{12}$$

для всех достаточно больших γ. Из (11) и (12) сразу получаем, что неравенство $|p(u)-p_\gamma(u)|<\varepsilon$, т. е. $|p(u)-L_\gamma(g(u,\ t))|<\varepsilon$, выполняется для всех достаточно больших γ равномерно на множестве U. Чтобы закончить доказательство теоремы, достаточно отметить, что для любого выбора элементов $u_1,\ldots,u_n$ имеют место равенства $L_\gamma(g(u_j,\ t))=p(u_j)$ $(j=1,\ldots,\ n)$ для всех достаточно больших γ.

Ниже мы сформулируем одно непосредственное следствие теоремы 3. Для этой цели каждому натуральному числу n ставим в соответствии конечное число элементов $u_1^n,\ldots,u_{k_n}^n$ множества U и рассмотрим полученную последовательность

$$\{(u_1^n,\ \ldots,\ u_{k_n}^n)\}_{n=1}^{\infty} \tag{13}$$

таких конечных наборов. Имеет место следующее следствие теоремы 3.

Следствие. *Если функция $g: U\times T\to R^1$ удовлетворяет условиям теоремы 3 и p — позитивная функция относительно g, удовлетворяющая условиям той же теоремы, то для любого выбора последовательности (13) существует интерполяционный процесс p_1, $p_2,\ldots,p_n,\ldots$, где*

$$p_n(u)=\mu_1^n g(u,\ t_1^n)+\ldots+\mu_{m_n}^n g(u,\ t_{m_n}^n)\ \ (\mu_i^n\geqq 0,\ t_i^n\in T)$$

и $p_n(u_j^n)=p(u_j^n)$ $(j=1,\ldots,\ k_n;\ \ n=1,\ 2,\ldots)$ равномерно сходящийся к функции p на множестве U.

Доказательство следует сразу, если в теореме 3 положим последовательно $\varepsilon=1,\ 1/2,\ldots,\ 1/n,\ldots$

Следующая удобная для приложений теорема является простым следствием теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть U и T — компактные топологические пространства, причем T — отделимое. Пусть далее $g: U \times T \to R^1$ функция, удовлетворяющая условиям а*), б*), в*), стр. 11. Предположим, кроме того, что точки разрыва $(u; t) \in U \times T$ функции g относительно топологии в $U \times T$ имеет не более чем конечное число вторых компонент t. Тогда, если $p: U \to R^1$ позитивная функция относительно g, то для любого выбора числа $\varepsilon > 0$ и точек $u_1, \ldots, u_n \in U$ существует конечное число точек $t_1, \ldots, t_m$ и неотрицательных чисел $\mu_1, \ldots, \mu_m$ так, что для всех $u \in U$ имеет место неравенство*

$$\left| p(u) - \sum_{i=1}^{m} \mu_i g(u, t_i) \right| < \varepsilon,$$

причем для $u_1, \ldots, u_m$ имеют место равенства

$$p(u_j) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i g(u_j, t_i) \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{14}$$

Доказательство. Обозначим через $t_1', \ldots, t_s'$ все точки множества T, являющиеся компонентами точек разрыва функции g относительно топологии в $U \times T$. Пусть L — позитивный линейный функционал, определенный на $C(T)$, для которого $p(u) = L(g(u, t))$. Пусть далее $\rho(t_1'), \ldots, \rho(t_s')$ — массы, которые L сосредоточивает в точки $t_1', \ldots, t_s'$. По свойству **2**, стр. 10, L можно представить следующим образом:

$$L(y) = \sum_{i=1}^{s} \rho(t_i') y(t_i') + L'(y), \tag{15}$$

где L' — позитивный линейный функционал, определенный на $C(T)$, сосредоточивающий нулевые массы в точки $t_1', \ldots, t_s'$ (здесь, применяя свойство **2**, стр. 10, мы используем отделимость пространства T). Но тогда функция $p'(u) = L'(g(u, t))$, очевидно, позитивна относительно g и L' сосредоточивает нулевую массу на множество $\{t_1', \ldots, t_s'\}$. Отсюда и из теоремы 3 следует, что p' непрерывна на U и приближается равномерно на U линейными комбинациями вида $\sum_{i=1}^{m} \mu_i g(u, t_i)$ $(\mu_i \geqq 0,\ t_i \in T)$, причем выполняются равенства

$$p'(u_j) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i g(u_j, t) \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{16}$$

Но из (15) следует, что для любого $u \in U$ будем иметь

$$p(u) = L(g(u, t)) = \sum_{i=1}^{s} \rho(t_i') g(u, t'_i) + p'(u), \tag{17}$$

а из сказанного выше и из (16) сразу следует утверждение теоремы.

Замечание. В теореме 4 мы не утверждаем непрерывность функции p на U. Легко видеть, однако, что p — непрерывна в тех точках множества U, в которых непрерывна функция $\sum_{i=1}^{s} \rho(t_i') g(u, t_i')$.

Здесь мы сформулируем одно следствие теоремы **4**, аналогичное следствию теоремы 3.

Следствие. *Если функция $g: U\times T\to R^1$ удовлетворяет условиям теоремы 4, то для каждой позитивной относительно g функции p и для любого выбора последовательности* (13) *существует интерполяционный процесс $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$, где*

$$p_n(u)=\mu_1^n g(u,\ t_1^n)+\ldots+\mu_{m_n}^n g(u,\ t_{m_n}^n)\quad (\mu_i^n\geqq 0;\quad t_i^n\in T)$$

и $p_n(u_j^n)=p(u_j^n)$ $(j=1,\ldots,k_n;\ n=1,\ 2,\ldots)$, равномерно сходящийся к функции p на множестве U.

3. В этом параграфе мы проиллюстрируем на нескольких простых примерах применение теоремы 4 и ее следствия.

Пример 1. Пусть U — любое компактное топологическое пространство, а $T=\{0,\ 1,\ 2,\ldots,\ t,\ldots,\ \infty\}$. Наделим T топологией следующим образом. Будем говорить, что $V\subset T$ открытое множество, если оно не содержит точку ∞ или (в противном случае) если содержит все элементы множества T, кроме конечного числа из них. Очевидно, что T — компактное отделимое пространство. Рассмотрим дальше последовательность

$$(18)\qquad f_0(u),\ f_1(u),\ldots,\ f_t(u),\ldots$$

действительных непрерывных функций на U, удовлетворяющую следующим условиям:

Последовательность (18) сходится для любого фиксированного $u\in U$ к некоторой функции $f_\infty(u)$. Кроме того, модули всех членов этой последовательности равномерно ограничены одним и тем же числом M. Наконец, предположим существование такого элемента $u_0\in U$, что $f_t(u_0)>0$ для $t=0,\ 1,\ldots,\ \infty$. Положив

$$(19)\qquad g(u,\ t)=f_t(u),$$

легко видеть, что g непрерывна на всем множестве $U\times T$ за исключением, быть может, точек вида $(u,\ \infty)\in U\times T$. Так как g удовлетворяет всем условиям теоремы 4, для любой позитивной функции p выполняется утверждение этой теоремы, а также и утверждение следствия теоремы 4.

В частном случае, когда $U=[0,\ 1]$, а $f_t(u)=u^t$ $(t=0,\ 1,\ 2,\ldots)$ и, следовательно,

$$f_\infty(u)=u^\infty=\begin{cases}1 & \text{для } u=1,\\ 0 & \text{для } 0\leqq u<1,\end{cases}$$

легко получить теорему, содержащую теорему Бернштейна о приближении абсолютно монотонных функций на сегменте [0, 1] многочленами с неотрицательными коэффициентами. (Функция $p:[0,\ 1]\to R^1$ называется абсолютно монотонной на сегменте [0, 1], если p непрерывна на концах этого сегмента и $p^{(n)}(u)\geqq 0$ для $n=0,\ 1,\ 2,\ldots$ и $u\in(0,\ 1)$.)

Чтобы доказать это, достаточно доказать, что если p абсолютно монотонная функция на сегменте [0, 1] и для любого целого неотрицательного t выполняется неравенство

$$(20)\qquad a_1 u_1^t+\ldots+a_m u_m^t\geqq 0,$$

где $a_1, \ldots, a_m$ $(a_i \neq 0)$ и $0 \leqq u_1 < \ldots < u_m \leqq 1$ действительные числа, то $a_1 p(u_1) + \ldots + a_m p(u_m) \geqq 0$. Отметим, что из (20) следует неравенство $a_m > 0$.

Случай, когда $m = 1$, тривиален. Поэтому будем считать, что $m > 1$.

Рассмотрим сначала случай, когда $u_m < 1$. Обозначим через ε положительное число, для которого $u_m + \varepsilon < 1$. Формула Маклорена для функции $\varphi(x) = a_1 p(xu_1 + \varepsilon) + \ldots + a_m p(xu_m + \varepsilon)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
(21) \qquad & \varphi(1) = a_1 p(u_1 + \varepsilon) + \ldots + a_m p(u_m + \varepsilon) \\
& = p(\varepsilon)[a_1 + \ldots + a_m] + \frac{p'(\varepsilon)}{1!}[a_1 u_1 + \ldots + a_m u_m] + \ldots + \frac{p^{(n-1)}(\varepsilon)}{(n-1)!}[a_1 u_1^{n-1} + \ldots \\
& + a_m u_m^{n-1}] + \frac{1}{n!}[a_1 u_1^n p^{(n)}(\theta_n u_1 + \varepsilon) + \ldots + a_m u_m^n p^{(n)}(\theta_n u_m + \varepsilon)].
\end{aligned}
$$

Так как (20) имеет место для всех целых неотрицательных t, то в (21) все члены вида $p^{(k)}(\varepsilon)[a_1 u_1^k + \ldots + a_m u_m^k]/k!$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ неотрицательны. Легко видеть, что последний член в (21) тоже неотрицателен для некоторых n. Действительно, из очевидных неравенств $0 \leqq p^{(n)}(\theta_n u_1 + \varepsilon) \leqq \ldots \leqq p^{(n)}(\theta_n u_m + \varepsilon)$ видно, что если для некоторого n $p^{(n)}(\theta_n u_m + \varepsilon) = 0$, то последний член в (21) тоже равняется нулю, следовательно, неотрицателен. Если для любого n $p^{(n)}(\theta_n u_m + \varepsilon) > 0$, то будем иметь

$$
\begin{aligned}
(22) \qquad & a_1 u_1^n p^{(n)}(\theta_n u_1 + \varepsilon) + \ldots + a_m u_m^n p^{(n)}(\theta_n u_m + \varepsilon) \\
& = u_m^n p^{(n)}(\theta_n u_m + \varepsilon)\left[a_1 \left(\frac{u_1}{u_m}\right)^n \frac{p^{(n)}(\theta_n u_1 + \varepsilon)}{p^{(n)}(\theta_n u_m + \varepsilon)} + \ldots \right. \\
& \left. + a_{m-1}\left(\frac{u_{m-1}}{u_m}\right)^n \frac{p^{(n)}(\theta_n u_{m-1} + \varepsilon)}{(p^{(n)}(\theta_n u_m + \varepsilon)} + a_m\right]
\end{aligned}
$$

так, что для достаточно больших n правая сторона (22) будет положительной. Итак, для всех $\varepsilon > 0$, для которых $u_m + \varepsilon < 1$, имеет место неравенство $a_1 p(u_1 + \varepsilon) + \ldots + a_m p(u_m + \varepsilon) \geqq 0$. Устремляя ε к 0, получаем неравенство $a_1 p(u_1) + \ldots + a_m p(u_m) \geqq 0$.

Случай, когда $u_m = 1$, сводится к предыдущему. Для этого достаточно провести доказательство для точек $u_1\alpha, \ldots, u_m\alpha$, где $0 < \alpha < 1$, и потом устремить α к 1.

Итак, мы показали, что каждая абсолютно монотонная функция на сегменте $[0, 1]$ позитивна относительно функции

$$(23) \qquad g(u, t) = u^t \quad (0 \leqq u \leqq 1;\ t = 0, 1, \ldots, \infty),$$

где

$$u^\infty = \begin{cases} 0 & \text{для } 0 \leqq u < 1, \\ 1 & \text{для } u = 1 \end{cases}$$

и, следовательно, для нее выполняется утверждение следствия теоремы 4. Точнее, если p абсолютно монотонная функция на $[0, 1]$, то для любого выбора последовательности вида (13) $\{(u_1^n, \ldots, u_{k_n}^n)\}_{n=1}^\infty$ $(0 \leqq u_i^n \leqq 1;$ $i = 1, \ldots, k_n)$, существует интерполяционный процесс $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots,$ где p_n „многочлен" вида

(24) $$p_n(u)=\mu_1^n u^{t_1^n}+\ldots+\mu_{m_n}^n u^{t_{m_n}^n}\ (\mu_i^n \geqq 0;\ t_i^n \in T)$$

и $p_n(u_j^n)=p(u_j^n)$ $(j=1,\ldots,k_n;\ n=1, 2,\ldots)$, равномерно сходящийся к функции p на сегменте $[0, 1]$.

Правая сторона (24) не есть всегда алгебраический многочлен, так как некоторые показатели (например $t_{m_n}^n$) могут принять значение ∞. В этом случае, однако, $u^{t_{m_n}^n}=0$ для всех $0\leqq u<1$, следовательно, для таких u p_n является алгебраическим многочленом. Но последовательность этих алгебраических многочленов сходится равномерно к p на промежутке $[0, 1)$, следовательно (имея в виду непрерывность многочленов и функции p на $[0, 1]$), эта последовательность сходится равномерно и на сегменте $[0, 1]$. Итак, окончательно получаем следующую теорему.

Теорема. *Для каждой абсолютно монотонной функции p на сегменте* $[0, 1]$ *и для любого выбора последовательности*

$$\{(u_1^n,\ldots,u_{k_n}^n)\}_{n=1}^{\infty}\ (0\leqq u_1^n<1;\ i=1,\ldots,k_n)$$

существует последовательность $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ алгебраических многочленов с неотрицательными коэффициентами, равномерно сходящаяся к p на сегменте $[0, 1]$ *и удовлетворяющая равенствам* $p_n(u_j^n)=p(u_j^n)$ $(j=1,\ldots,k_n;\ n=1, 2,\ldots)$.

Последняя теорема, очевидно, содержит теорему Бернштейна о приближении абсолютно монотонных функций на $[0, 1]$ [10, с. 419, теорему (A)].

Замечание. Имея в виду теорему 2, легко доказать, что каждую абсолютно монотонную функцию можно представить в виде степенного ряда с неотрицательными коэффициентами, сходящегося на сегменте $[0, 1]$, но мы на этом не будем останавливаться.

Пример 2. Пусть $U=[-\infty, 0]$, а $T=[0, \infty]$. Наделим U и T одноточечными компактификациями топологий, порожденных топологией в R^1. Положим дальше

$$g(u, t)=\begin{cases} e^{ut} & \text{для}\quad 0\leqq t<\infty,\quad -\infty<u\leqq 0,\\ 0 & \text{для}\quad 0\leqq t<\infty,\quad u=-\infty,\\ 0 & \text{для}\quad t=\infty,\quad -\infty\leqq u<0,\\ 1 & \text{для}\quad t=\infty,\quad u=0.\end{cases}$$

Легко проверить, что g удовлетворяет всем условиям теоремы 4.

Функция $p:(-\infty, 0]\to R^1$ **называется абсолютно монотонной, если** она непрерывна для $u=0$ и удовлетворяет соотношению $\Delta_n^h p(u) =\sum_{i=0}^n(-1)^{n-i}\binom{n}{i}p(u+ih)\geqq 0$ для всех целых $n\geqq 0$ и любых u и h таких, что $-\infty<u<u+h<\ldots<u+nh<0$.

Обозначим через $p:(-\infty, 0]\to R^1$ абсолютно монотонную функцию, а через $p:[-\infty, 0]\to R^1$ функцию, совпадающую с p на промежутке $(-\infty, 0]$ и непрерывную в точке $-\infty$, т. е. $p(-\infty)=\lim_{u\to-\infty} p(u)$. Предположим, кроме того, что $p(-\infty)=0$. Проверяется непосредственно, что p позитивна относительно g. Для доказательства этого проще всего использовать интегральное представление Бернштейна

$$p(u)=\int_0^\infty e^{ut}\, d\,\alpha(t),$$

где $\alpha(t)$ $(0\leq t<\infty)$ некоторая неубывающая функция. Покажем, что если неравенство $a_1 g(u_1, t)+\ldots+a_m g(u_m, t)\geq 0$ имеет место для некоторых $u_1,\ldots, u_m$, где $-\infty\leq u_1<\ldots<u_m\leq 0$, некоторых $a_1,\ldots, a_m\in R^1$ и всех $t\in[0, \infty]$, то $a_1 p(u_1)+\ldots+a_m p(u_m)\geq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $u_1>-\infty$, так как в противном случае $g(u, t)=p(u_1)=0$. Но для таких $u_1,\ldots u_m$ $p(u_j)=p(u_j)$, следовательно,

$$a_1 p(u_1)+\ldots+a_m p(u_m)=\int_0^\infty [a_1\ e^{u_1 t}+\ldots+a_m e^{u_m t}]\, d\,\alpha(t)\geq 0.$$

Итак, для p имеет место утверждение следствия теоремы 4, где последовательность (13) состоит из наборов чисел $(u_1^n,\ldots, u_{k_n}^n)$, для которых $u_j^n\in[-\infty, 0]$. Давая u значения $>-\infty$ и выбирая $(u_1^n,\ldots, u_{k_n}^n)$ в промежутке $(-\infty, 0)$, легко получаем следующее предложение.

Если $p:(-\infty, 0]\to R^1$ абсолютно монотонная функция, для которой $\lim_{u\to-\infty} p(u)=0$, то для любого выбора последовательности

$$\{(u_1^n,\ldots, u_{k_n}^n)\}_{n=1}^\infty\ (-\infty<u_j^n<0;\ j=1,\ldots, k_n)$$

существует последовательность $p_1, p_2,\ldots, p_n,\ldots$ экспоненциальных многочленов с неотрицательными коэффициентами

$$p_n(u)=\mu_1^n \exp(u\,t_1^n)+\ldots+\mu_{m_n}^n \exp(u\,t_{m_n}^n)\ \ (\mu_i^n\geq 0,\ 0\leq t_i^n<\infty),$$

равномерно сходящаяся к p на промежутке $(-\infty, 0]$ и удовлетворяющая равенствам $p_n(u_j^n)=p(u_j^n)$ $(j=1,\ldots, k_n;\ n=1, 2,\ldots)$.

Если $\lim_{u\to-\infty} p(u)=\mu>0$, то, очевидно, $p^*(u)=p(u)-\mu$ — абсолютно монотонная функция, удовлетворяющая условиям последнего предложения. Но тогда последовательность экспоненциальных многочленов

$$p_1(u)+\mu,\ p_2(u)+\mu,\ldots,\ p_n(u)+\mu,\ldots,$$

очевидно, удовлетворяет утверждению этого предложения для функции p. Окончательно получаем следующую теорему.

Теорема. *Если $p:(-\infty, 0]\to R^1$ абсолютно монотонная функция, то для любого выбора последовательности*

$$\{(u_1^n,\ldots, u_{k_n}^n)\}_{n=1}^\infty\ (-\infty<u_j^n<0;\ j=1,\ldots, k_n)$$

существует последовательность $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ *экспоненциальных многочленов с неотрицательными коэффициентами*

$$p_n(u) = \mu_1^n \exp(ut_1) + \ldots + \mu_{m_n}^n \exp(u\, t_{m_n}^n) \quad (\mu_i^n \geqq 0;\ 0 \leqq t_i^n < \infty),$$

равномерно сходящаяся к p *на промежутке* $(-\infty, 0]$ *и удовлетворяющая равенствам* $p_n(u_j^n) = p(u_j^n)$ $(j = 1, \ldots, k_n;\ n = 1, 2, \ldots)$.

Последняя теорема, очевидно, содержит теорему С. Бернштейна о равномерном приближении абсолютно монотонных функций на промежутке $(-\infty, 0]$ [5, с. 386, теорема E].

Замечание. Если бы мы доказали позитивность $\bar{p}$, не используя теорему Бернштейна об интегральном представлении абсолютно монотонных функций, мы могли бы получить эту теорему как следствие теоремы 2. Такое доказательство имеется, но мы предпочли данное выше, так как оно более коротко.

Пример 3. В нескольких публикациях [6, 7, 8] Н. Обрешков рассмотрел вопрос об интегральных представлениях некоторых классов функций. В этих работах даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы данная функция $f: [0, \infty) \to R^1$ имела интегральное представление вида

$$f(u) = \int_0^\infty \Phi(ut)\, d\alpha(t), \tag{25}$$

где $\alpha: [0, \infty) \to R^1$ — неубывающая функция, а

$$\Phi(x) = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \exp\left(-x_1 - x_2 - \ldots - x_n - \frac{x}{x_1 \ldots x_n}\right) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \quad (\alpha_i > -1).$$

Легко доказать (мы этого не будем делать), что Φ непрерывная убывающая функция на промежутке $[0, \infty)$ и, кроме того, $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = 0$. Положим $U = [0, \infty]$ и $T = [0, \infty]$ (топологии в U и T те же, как в примере 2). Положим далее

$$g(u, t) = \begin{cases} \Phi(u, t) & \text{для} \quad 0 \leqq u < \infty, \quad 0 \leqq t < \infty, \\ 0 & \text{для} \quad 0 < u \leqq \infty, \quad t = \infty, \\ 0 & \text{для} \quad u = \infty, \quad 0 \leqq t \leqq \infty, \\ \Phi(0) & \text{для} \quad u = 0, \quad t = \infty. \end{cases}$$

Очевидно функция g удовлетворяет всем условиям теоремы 4.

Если $f: [0, \infty) \to R^1$ допускает интегральное представление вида (25), то функция $f: U \to R^1$, определенная равенством

$$f(u) = \begin{cases} f(u) & \text{для} \quad 0 \leqq u < \infty, \\ \lim_{n\to\infty} f(u) & \text{для} \quad u = \infty, \end{cases}$$

позитивна относительно g, если $\overline{f}(\infty)=0$. Рассуждая дальше как в примере 2, получаем следующую теорему.

Теорема. *Если $f:[0, \infty)\to R^1$ допускает интегральное представление (25), то для любого выбора последовательности $\{(u_1^n, \ldots, u_{k_n}^n)\}_{n=1}^{\infty}$, $(0<u_j^n<\infty; j=1,\ldots,k_n)$ существует последовательность $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ „многочленов" вида*

$$p_n(u)=\mu_1^n\Phi(u t_1^n)+\ldots+\mu_{m_n}^n\Phi(u t_{m_n}^n)\ (\mu_i^n\geqq 0;\ 0\leqq t_i^n<\infty),$$

равномерно сходящаяся к f на промежутке $[0, \infty)$ и удовлетворяющая равенствам $p_n(u_j^n)=f(u_j^n)$ $(j=1,\ldots, k_n;\ n=1, 2,\ldots)$.

Замечание. Для доказательства этой теоремы имеет значение только то обстоятельство, что Φ непрерывная и убывающая, а также, что $\lim_{x\to\infty}\Phi(x)=0$.

Наш коллега Й. Табов прочел рукопись и сделал ряд полезных замечаний. Считаем своим приятным долгом выразить ему нашу благодарность. Нам хочется также выразить нашу сердечную благодарность нашему коллеге Д. Скордеву за внимательное и компетентное редактирование всей рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Riesz. Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales. *Ann. sci. Ecole norm. sup., Sér. III*, **28**, 1911, 33—**62**.
2. E. Steinitz. Ueber bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme. *J. reine und angew. Math.*, **143**, 1913, 128—175.
3. M. Riesz. Sur le problème des moments, III. *Ark. för mat., astr., och fys.*, **17**, 1923.
4. A. Tihonov. Ueber die topologische Erweiterung von Räumen. *Math. Ann.*, **102**, 1929, 544—561.
5. С. Бернштейн. Собрание сочинений, т. I. Москва, 1952.
6. Н. Обрешков. Върху някои представяния с интеграли на реални функции. *Известия Мат. инст. БАН*, **1**, 1953, кн. 1, 83—109.
7. Н. Обрешков. Върху някои интегрални представяния на функции във връзка с диференциални уравнения. *Известия Мат. инст. БАН*, **1**, 1954, кн. 2, 3—**32**.
8. Н. Обрешков. Върху някои интегрални представяния на реални функции по реалната полуос. *Известия Мат. инст. БАН*, **3**, 1958, кн. 1, **3**—28.
9. Р. Эдвардс. Функциональный анализ. Москва, 1969.
10. М. Крейн, А. Нудельман. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. Москва, 1973.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике
1000 София П. Я. 373

Поступила 29. 10. 1975