PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

РАВНОМЕРНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ С КОНЕЧНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ

ПЕНЧО П. ПЕТРУШЕВ

Рассматривается класс $\mathbf{V}([a,b],V,\omega)$ всех непрерывных на $[a,b]$ функций f, для которых $V_a^b f \leqq V$ и $\omega(f;\delta) \leqq \omega(\delta)$ для $\delta \geqq 0$, где $V_a^b f$ — вариация функции f на $[a,b]$, $\omega(f;\delta)$ — модуль непрерывности функции f, ω — некоторый строго возрастающий модуль непрерывности.

Доказано неравенство

$$R_n^\omega / \ln (C_1 R_n^\omega / \omega^{-1}(C_2 R_n^\omega)) \leqq C_3/n, \quad n=1,2,3,\ldots,$$

где R_n^ω — наилучшее равномерное приближение класса $\mathbf{V}([a,b],V,\omega)$рациональными функциями n-той степени, ω^{-1} — обратная функция функции ω, C_1, C_2, C_3 — положительные константы, зависящие только от $b-a$, V и $\omega(b-a)$; $C_1 V/\omega^{-1}(C_2 V) \geqq 2e$.

После работы Д. Нюмана [1] появились много работ, в которых найдены классы функций, для которых наилучшее равномерное приближение рациональными функциями n-той степени лучше на порядок чем наилучшее равномерное приближение алгебраическими полиномами n-той степени. Таким же является класс $\mathbf{V}([a,b],V,\omega)$ всех непрерывных на $[a,b]$ функций f, для которых $V_a^b f \leqq V$ и $\omega(f;\delta) \leqq \omega(\delta)$ для $\delta \geqq 0$, где $V_a^b f$ полное изменение функции f на $[a,b]$, $\omega(f;\delta) = \sup_{|x'-x''| \leqq \delta} |f(x')-f(x'')|$ — модуль непрерывности функции f на $[a,b]$, ω — некоторый модуль непрерывности $(0=\omega(0)=\omega(+0) \leqq \omega(\delta) \leqq \omega(\delta+\varepsilon) \leqq \omega(\delta)+\omega(\varepsilon)$, $\delta, \varepsilon \geqq 0)$. Везде в этой статье наложим на модули непрерывности ω еще условие, чтобы они были строго возрастающие на $[0,\infty)$. Тогда обратная функция ω^{-1} функции ω непрерывна и строго возрастает на $[0,\infty)$.

Обозначим через R_N (N — реальное) множество всех рациональных функций степени не выше N, а через $R_N(f)$ ($R_N(f,[a,b])$ — когда хотим отметить интервал $[a,b]$) наилучшее равномерное приближение функции f на отрезке $[a,b]$ элементами множества R_N т. е.

$$R_N(f) = R_N(f,[a,b]) = \inf_{r \in R_N} \sup_{x \in [a,b]} |f(x)-r(x)| = \inf_{r \in R_N} \| f-r \|_{[a,b]}.$$

Из результатов Г. Фройда [2] и А. А. Абдугаппарова и Е. П. Долженко (доклад Е. П. Долженко на Московском конгрессе математиков в 1966 году) следует, что если $f \in \mathbf{V}([a,b],V,H\delta^\alpha)$, $0<\alpha<1$, то

(1) $$R_n(f)=O(\ln^2 n/n),$$

а если $f\in \mathbf{V}([a,b],\ V,\ 1/\ln(1/\delta))$, то

(2) $$R_n(f)=O(n^{-1/3}).$$

А. П. Буланов [3] показал, что если $f\in \mathbf{V}([a,b],\ V,\ \omega)$ то

(3) $$R_n(f)/\ \ln R_n(f)\ .\ \ln\omega^{-1}(R_n(f))\ <C/n,$$

где C зависит только от $b-a$, V и ω.

При помощи неравенства (3) Буланов улучшил оценку (2) следующим образом: если $f\in \mathbf{V}\ ([a,b],\ V,\ 1/\ln(1/\delta))$, то

(4) $$R_n(f)=O((\ln n/n)^{1/2}).$$

Однако, используя (3), нельзя улучшить неравенство (1).

В настоящей статье, базируясь на методе В. А. Попова [4], докажем следующее улучшение неравенства (3) (см. теорему 2):

(5) $$R_n^\omega/\ln(C_1 R_n^\omega/\omega^{-1}(C_2 R_n^\omega))\leqq C_3/n, \qquad n=1,2,3,\ldots,$$

где $R_n^\omega=\sup_{f\in \mathbf{V}([a,b],\ V,\ \omega)}R_n(f)$, C_1, C_2, C_3 зависят только от $b-a$, V и $\omega(b-a)$, $C_1V/\omega^{-1}(C_2V)\geqq 2e$.

С другой стороны, из оценки снизу Буланова следует, что неравенство (5) точно в следующем смысле: для любого модуля непрерывности ω и любых $[a,b]$ и $V>0$ существуют константы $C_1{}^*$, $C_2{}^*$, $C_3{}^*>0$ и последовательность натуральных чисел $n_1<n_2<n_3<\ldots$, такие, что

$$R_{n_i}^\omega/\ln(C_1{}^* R_{n_i}^\omega/\omega^{-1}(C_2{}^* R_{n_i}^\omega))\geqq C_3{}^*/n_i, \qquad i=1,2,3,\ldots$$

Из этого утверждения следует, что оценки, которые получаются при помощи неравенства (5), точны по порядку для всех модулей непрерывности ω. Например, применяя неравенство (5), полностью уточним оценку (1) следующим образом (см. (20)):

(6) $$\sup_{f\in \mathbf{V}([a,b],\ V,\ H.\delta^\alpha)}R_n(f)=O(\ln n/n),\ \ 0<\alpha<1,$$

а оценки (2), (4) — (см. (21)):

(7) $$\sup_{f\in \mathbf{V}([a,b],\ V,\ 1/\ln(1/\delta))}R_n(f)=O(n^{-1/2}).$$

Оценки (6), (7) точны по порядку [3]. Приводим точные по порядку оценки для R_n^ω и для некоторых других конкретных модулей непрерывности ω.

Отметим, что неравенство (5) и оценки (6), (7) мы записали через $\sup R_n(f)$, а не через $R_n(f)$, так как нам не известно, точны ли они для $R_n(f)$ (из оценок А. П. Буланова это не следует). Заметим, что для любой функции $f\in \mathrm{Lip}_H 1$, как показано в [4], имеем $R_n(f)=o(n^{-1})$, но $\sup_{f\in \mathrm{Lip}_H 1}R_n(f)=O(n^{-1})$ и обе оценки точны по порядку. Открыт вопрос, для каких модулей непрерывности ω для любой функции $f\in \mathbf{V}([a,b],\ V,\omega)$, в оценке для $R_n(f)$, которая получается из (5), можно заменить O через o. Например, имеет ли место утверждение: для любой функции $f\in \mathbf{V}([a,\ b],\ V,\ H.\delta^\alpha)$, $0<\alpha<1$, $R_n(f)=o(\ln n/n)$.

В конце статьи обобщим полученные результаты, заменяя условие на вариации функции f через условие на порядок роста модуля изменения $\varkappa(f;\ n)$. Модуль изменения

$$\varkappa(f;\ n)=\sup_{0\leq x_0\leq x_1\leq\ldots\leq x_n\leq 1}\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

ввел В. А. Попов [5]. Подобную характеристику использовал и З. А. Чантурия [6].

1. Определения и леммы. В этой статье будем называть модулем непрерывности любую строго возрастающую и непрерывную на $[0,\ \infty)$ функцию ω со свойствами:

а) $$\omega(\delta)>0 \text{ для } \delta>0,\ \omega(0)=0,\ \lim_{\delta\to\infty}\omega(\delta)=\infty,$$

б) $$\omega(\delta+\varepsilon)\leqq\omega(\delta)+\omega(\varepsilon) \text{ для } \delta,\ \varepsilon\geqq 0.$$

Отметим еще некоторые другие свойства модуля непрерывности ω:

в) $\omega(n.\delta)\leqq n\omega(\delta)$, $\omega^{-1}(\delta/n),\leqq\omega^{-1}(\delta)/n$, $\omega(\lambda.\delta)\leqq(\lambda+1)\ \omega(\delta)$, $\omega^{-1}(\delta/\lambda+1)\leqq\omega^{-1}(\delta)/\lambda$, $\omega(\delta/n)\geqq\omega(\delta)/n$, $\omega^{-1}(\omega(\delta)/n)\leqq\delta/n$, где $\delta\geqq 0$, $\lambda>0$, n — натуральное, ω^{-1} обратная функция функции ω, ω^{-1} непрерывна и строго возрастает на $[0,\ \infty)$,

г) каждая непрерывная, строго возрастающая и выпуклая вверх на $[0,\ \infty)$ функция ω, которая в нуле равна нулю $\lim_{\delta\to\infty}\omega(\delta)=\infty$, является модулем непрерывности,

д) для любого модуля непрерывности ω существует выпуклый вверх модуль непрерывности $\tilde{\omega}$ такой, что $\omega(\delta)\leqq\tilde{\omega}(\delta)\leqq 2\omega(\delta)$ для $\delta\geqq 0$ [7].

Лемма 1. Для любой непрерывной на $[a,\ b]$ функции f и любого реального числа $N\geqq 1$ имеет место неравенство

$$\inf_{r\in R_N,\ \|r\|_{(-\infty,\ \infty)}\leq N\|f\|_{[a,\ b]}}\|f-r\|_{[a,\ b]}\leqq 24\,.\,\omega(f,\ (b-a)/N)+16\,.\,\|f\|_{[a,\ b]}/N^2.$$

Доказательство. Пусть функция f непрерывна на $[a,\ b]$. Для $1\leqq N\leqq 4$ утверждение леммы очевидно. Пусть $N>4$. Тогда из теоремы Джексона [8, 161] следует, что существует алгебраический многочлен p степени $[N/2]$ такой, что $\|p\|_{[a,\ b]}\leqq 2\|f\|_{[a,\ b]}$ и

$$\|f-p\|_{[a,\ b]}\leqq 12\omega(f;\ (b-a)/2[N/2])\leqq 24.\omega(f;\ (b-a)/N).$$

Рассмотрим [4] рациональную функцию $q=p/(1+\varepsilon^2\,.\,p^2)$, $\varepsilon=1/2N\|f\|_{[a,\ b]}$, степень которой не выше N. Получаем $\|q\|_{(-\infty,\infty)}\leqq 1/2\varepsilon=N\|f\|_{[a,\ b]}$ и $\|f-q\|_{[a,\ b]}\leqq\|f-p\|_{[a,\ b]}+\varepsilon^2\|f\|_{[a,\ b]}\|p\|^2_{[a,\ b]}\leqq 24\omega(f;\ (b-a)/N)+\|f\|_{[a,\ b]}/N^2$. Лемма 1 доказана.

Обозначим через $\mathbf{W}([a,\ b]\ A,\ V;\ \delta,\ \eta)$ множество всех непрерывных и монотонных на $[a,\ b]$ функций f, для которых $f(a)\leqq A$; $V_a^b f\leqq V$ и $\omega(f;\ \delta)\leqq\eta$, где $a,\ b,\ A,\ V,\ \delta,\ \eta$ фиксированные числа и

$$\Phi_0(\delta,\ \eta;\ N,\ B)=\sup_{f\in W([0,1],0,1;\ \delta,\eta)}\{\inf_{r\in R_N,\ \|r\|_{(-\infty,\ \infty)}\leq B}\|f-r\|_{[0,\ 1]}\},$$

где δ, η, N, B произвольные неотрицательные числа. В дальнейшем, не оговаривая это каждый раз, будем пользоваться монотонностью $\Phi_0(\delta, \eta; N, B)$ по каждому из аргументов δ, η, N, B.

Лемма 2. *Имеет место неравенство*

$$\sup_{f\in W([a,b],A,V;\delta,\eta)}\{\inf_{r\in R_N,\ \|r\|_{(-\infty,\infty)}\leq A+V.B}\|f-r\|_{[a,b]}\}$$
$$\leqq V.\Phi_0(\delta/(b-a), \eta/V; N, B),$$

где A, V, δ, η, N, B — *неотрицательные числа*, a, b — *реальные.*

Доказательство. Пусть $f\in \mathbf{W}([a, b], A, V; \delta, \eta)$. Тогда для функции $g(x)=V^{-1}(f(a+(b-a)x)-f(a))$ имеем $f\in\mathbf{W}([0, 1], 0, 1; \delta/(b-a), \eta/V)$. Следовательно, существует рациональная функция $r\in R_N$ такая, что $\|r\|_{(-\infty,\infty)}\leqq B$ и
$\Phi_0(\delta/(b-a), \eta/V; N, B)\geqq\|g-r\|_{[0,1]}=V^{-1}.\|f(x)-(f(a)+Vr(x-a)/(b-a))\|_{[a,b]}$, т. е. $\|f-q\|_{[a,b]}\leqq V.\Phi_0(\delta/(b-a), \eta/V; N, B)$, $q(x)=f(a)+V.r((x-a)/(b-a))$, $\|q\|_{(-\infty,\infty)}\leqq A+V.B$, $q\in R_N$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Существует абсолютная константа* $d>0$ *такая, что для любых реальных чисел* δ, s, $\delta<1/2$, $s\geqq e$ *и* $1/s\delta\geqq e$, *существует рациональная функция* σ *степени не выше* $d\ln^2 s.\ln(1/s\delta)$ *со свойствами*

$$\sigma(x)\leqq s^{-3}\ \textit{для}\ x\in[-1, -\delta],\ |1-\sigma(x)|\leqq s^{-3}\ \textit{для}\ x\in[\delta, 1]\ \textit{и} \tag{8}$$
$$0\leqq\sigma(x)\leqq1\ \textit{для}\ x\in(-\infty, \infty).$$

Из результатов А. А. Гончара [9] непосредственно следует, что существует рациональная функция σ, степени не выше $d_1\ln s\ln(1/\delta)$ (d_1 — абсолютная константа), которая удовлетворяет условиям (8). Так как $s\geqq e$ и $1/s\delta\geqq e$, то $d_1\ln s.\ln(1/\delta)\leqq d_1\ln s(\ln(1/s\delta)+\ln s)\leqq 2d_1\ln^2 s\ln(1/s\delta)=d\ln^2 s\times\ln(1/s\delta)$, т. е. σ удовлетворяет требованиям леммы 3.

Лемма 4 (основная). *Существует абсолютная константа* s_0 *такая, что если* $\lambda>0$ *и* $s\geqq s_0+2\lambda$ (s — *реальное*) *и если для* $k=(s-d\ln^2 s)/2$ ($d>0$ *абсолютная константа из леммы 3*) *выполнено неравенство*

$$\sup_{k.\varepsilon\leqq\alpha\leqq1}\Phi_0(\varepsilon/\alpha, \lambda/k; k\ln(\alpha\psi(k)/k.\varepsilon), k)\leqq\varphi(k)/k, \tag{9}$$

где $\varepsilon\leqq1/s$, $\psi(k)\geqq2e$, $\varphi(k)\geqq24(1+\lambda)$, *то имеет место неравенство*

$$\sup_{s.\varepsilon\leqq\beta\leqq1}\Phi_0(\varepsilon/\beta, \lambda/s; s\ln(\beta\psi(k)(1+3d\ln^2 s/s)/s.\varepsilon), s)\leqq\varphi(k)(1+2d(1+\lambda)\ln^2 s/s)/s.$$

Доказательство. Выбираем абсолютную константу $s_0>0$ так, чтобы для $s\geqq s_0$ выполнялись неравенства: а) $s\geqq e$, б) $(s-d\ln^2 s)/2\geqq1$, в) $64/(s-d\ln^2 s)^2\leqq1/s$, г) $4(1/4+1/s+1/s^2)/(s-d\ln^2 s)^2\leqq(1+3d\ln^2 s/s)^2/s^2$, д) $2(1/2+\lambda/s)/(s-d\ln^2 s)+2/s^2\leqq(1+2d(1+\lambda)\ln^2 s/s)/s$, при $\lambda>0$.

Пусть $\lambda>0$, $s\geqq s_0+2\lambda$ и для $k=(s-d\ln^2 s)/2$ выполняется неравенство (9). Пусть $\beta\in[s\varepsilon, 1]$ и $f\in\mathbf{W}([0,1], 0, 1; \varepsilon/\beta, \lambda/s)$, т. е. f непрерывна и монотонна на $[0, 1]$, $f(0)=0$, $V_0^1 f\leqq1$, $\omega(f; \varepsilon/\beta)\leqq\lambda/s$.

Выбираем точку $x_1\in[x_0+\varepsilon/\beta, x_2-\varepsilon/\beta]$, $x_0=0$, $x_2=1$, так, чтобы $V_{x_0}^{x_1}f=V_{x_1}^{x_2}f=V_0^1 f/2\leqq1/2$. Это возможно, так как функция f непрерывна и монотонна на интервале $[0, 1]$ и $\omega(f; \varepsilon/\beta)\leqq\lambda/s\leqq1/2$ ($s\geqq2\lambda$). По тем же причинам имеем

(10)
$$V_{x_0}^{x_1+\varepsilon/\beta}f=V_{x_0}^{x_1}f+V_{x_1}^{x_1+\varepsilon/\beta}f\leqq 1/2+\omega(f;\ \varepsilon/\beta)\leqq 1/2+\lambda/s,$$
$$V_{x_1-\varepsilon/\beta}^{x_2}f=V_{x_1-\varepsilon/\beta}^{x_1}f+V_{x_1}^{x_2}f\leqq\omega(f;\ \varepsilon/\beta)+1/2\leqq 1/2+\lambda/s.$$

Обозначим $\Delta_1=[x_0,\ x_1+\varepsilon/\beta]$, $\Delta_2=[x_1-\varepsilon/\beta,\ x_2]$.

Рассмотрим два случая:

1. $k.\varepsilon\leqq(x_i-x_{i-1}+\varepsilon/\beta)\beta$ для $i=1,2$. Тогда из (10) и леммы 2 следует, что существуют рациональные функции r_i, $i=1,2$, степени соответственно не выше $k\ln((x_i-x_{i-1}+\varepsilon/\beta)\beta\psi(k)/k.\varepsilon)$ $(i=1,2)$ такие, что

(11)
$$\|f-r_i\|_{\Delta_i}$$
$$\leqq(1/2+\lambda/s)\Phi_0(\varepsilon/(x_i-x_{i-1}+\varepsilon/\beta)\beta,\ \lambda/s(1/2+\lambda/s);\ k\ln((x_i-x_{i-1}$$
$$+\varepsilon/\beta)\beta\psi(k)/k.\varepsilon),\ k)\leqq(1/2+\lambda/s)\sup_{k\varepsilon\leqq\alpha\leqq 1}\Phi_0(\varepsilon/\alpha,\ \lambda/k;\ k\ln(\alpha\psi(k)/k.\varepsilon),\ k)$$
$$\leqq(1/2+\lambda/s)\varphi(k)/k,\quad \|r_i\|_{(-\infty,\infty)}\leqq 1+(1/2+\lambda/s)k\leqq 1+k\leqq s$$

(использовали (9) и что $\alpha_i=(x_i-x_{i-1}+\varepsilon/\beta)\beta\in[k.\varepsilon,\ 1]$, $\|f\|_{[0,1]}\leqq 1$, $s\geqq 2\lambda$, $k<s/2$, $k\geqq 1$, см. б)).

2. Или для $i=1$ или для $i=2$ имеем $(x_i-x_{i-1}+\varepsilon/\beta)\beta<k.\varepsilon$. Пусть, например, $(x_1-x_0+\varepsilon/\beta)\beta<k.\varepsilon$. Тогда, применяя лемму 1 для интервала Δ_1, получаем: существует рациональная функция r_1 степени не выше k $(k\geqq 1$, см. б)) такая, что

(12)
$$\|f-r_1\|_{\Delta_1}\leqq 24\omega(f;\ (x_1-x_0+\varepsilon/\beta)/k)+16.\ \|f\|_{\Delta_1}/k^2\leqq 24\omega(f;\ \varepsilon/\beta)$$
$$+16/k^2\leqq 24\lambda/s+1/s\leqq 24(\lambda+1)/s\leqq\varphi(k)/s,\quad \|r_1\|_{(-\infty,\infty)}\leqq k\|f\|_{\Delta_1}\leqq k<s$$

(использовали, что $\|f\|_{[0,1]}\leqq 1$ и $1/k^2\leqq 1/s$, см. в)).

Из неравенства $\beta\geqq s.\varepsilon>2k.\varepsilon$ вытекает, что $(x_2-x_1+\varepsilon/\beta)\beta=(1-(x_1-x_0)+\varepsilon/\beta)\beta=\beta+2\varepsilon-(x_1-x_0+\varepsilon/\beta)\beta>2k.\varepsilon+2\varepsilon-k\varepsilon>k.\varepsilon$. Применяя лемму 2 для интервала Δ_2, как в 1-ом случае, получаем: существует рациональная функция r_2 степени не выше $k\ln((x_2-x_1+\varepsilon/\beta)\beta\psi(k)/k.\varepsilon)\leqq k\ln(\beta\psi(k)/k.\varepsilon)$ такая, что

(13)
$$\|f-r_2\|_{\Delta_2}$$
$$\leqq(1/2+\lambda/s)\Phi_0(\varepsilon/x_2-x_1+\varepsilon/\beta)\beta,\ \lambda/s(1/2+\lambda/s);\ k\ln((x_2-x_1$$
$$+\varepsilon/\beta)\beta\psi(k)/k.\varepsilon),\ k)\leqq(1/2+\lambda/s)\sup_{k.\varepsilon\leqq\alpha\leqq 1}\Phi_0(\varepsilon/\alpha,\ \lambda/k;\ k.\ln(\alpha\psi(k)/k.\varepsilon),\ k)$$
$$\leqq(1/2+\lambda/s)\varphi(k)/k,\quad \|r_2\|_{(-\infty,\infty)}\leqq 1+(1/2+\lambda/s)k\leqq s$$

(использовали (9) и что $\alpha_2=(x_2-x_1+\varepsilon/\beta)\beta\in[k.\varepsilon,\ 1]$, $\|f\|_{[0,1]}\leqq 1$, $s\geqq 2\lambda$, $k<s/2$, $k\geqq 1$ см. б)).

В обоих случаях рассматриваем рациональную функцию $q(x)=r_1(x)+\sigma(x-x_1)[r_2(x)-r_1(x)]$, где σ рациональная функция из леммы 3 с $\delta=\varepsilon/\beta\psi(k)$ степени не выше $d\ln^2 s\ln(\beta\psi(k)/s\varepsilon)$ (имеем $\delta=\varepsilon/\beta\psi(k)\leqq 1/2e.s<1/s$, $s\geqq e$, $1/s\delta\geqq e$). В 1-ом случае рациональная функция q имеет степень не выше

$$N=d\ln^2 s.\ln(\beta\psi(k)/s.\varepsilon)+k\ln((x_1-x_0+\varepsilon/\beta)\beta\psi(k)/k.\varepsilon)+k\ln((x_2-x_1+\varepsilon/\beta)\beta\psi(k)/k.\varepsilon)$$
$$\leqq(d\ln^2 s\ln(\beta\psi(k)/s.\varepsilon)+k\ln(\beta^2\psi^2(k)(x_1-x_0+\varepsilon/\beta)(x_2-x_1+\varepsilon/\beta)/k^2\varepsilon^2).$$

Ввиду неравенства $\sqrt{a.b}\leqq(a+b)/2$, $a, b\geqq 0$ и условия г) для s_0 получаем

$$N\leqq d\ln^2 s.\ln(\beta\psi(k)/s.\varepsilon)+k\ln(\beta^2\psi^2(k)(1/4+1/s+1/s^2)/k^2\varepsilon^2)$$

$$\leqq(d\ln^2 s+2k)\ln(\beta\psi(k)(1+3d\ln^2 s/s)/s.\varepsilon)\leqq s\ln(\beta\psi(k)(1+3d\ln^2 s/s)/s\varepsilon).$$

Во 2-ом случае рациональная функция q имеет степень не выше

$$d\ln^2 s\ln(\beta\psi(k)/s.\varepsilon)+k\ln(\beta\psi(k)/k.\varepsilon)+k\leqq d\ln^2 s\,.\ln(\beta\psi(k)/s.\varepsilon)$$

$$+k\ln(e\beta\psi(k)/s.\varepsilon)\leqq d\ln^2 s.\ln(\beta\psi(k)/s\varepsilon)+k\ln(\beta\psi(k)/2k.\varepsilon)+k.\ln(2e)$$

$$\leqq(d\ln^2 s+2k)\ln(\beta\psi(k)/2k\varepsilon)\leqq s\ln(\beta\psi(k)(1+3d\ln^2 s/s)/s.\varepsilon)$$

(использовали, что $\beta\psi(k)/2k.\varepsilon\geqq 2es/2k>2e$ и условие г) для s_0). Следовательно, в обоих случаях рациональная функция q имеет степень не выше $s\ln(\beta\psi(k)(1+3d\ln^2 s/s)/s.\varepsilon)$.

Из (11), (12), (13) и леммы 3 получаем:

а) если $x\in[x_0, x_1-\varepsilon/\beta]$, то

$|f(x)-q(x)|\leqq|f(x)-r_1(x)|+\sigma(x)(|r_1(x)|+|r_2(x)|)\leqq(1/2+\lambda/s)\varphi(k)/k+2/s^2$,

б) если $x\in[x_1-\varepsilon/\beta, x_1+\varepsilon/\beta]$, то

$|f(x)-q(x)|\leqq(1-\sigma(x))|f(x)-r_1(x)|+\sigma(x)|f(x)-r_2(x)|\leqq(1/2+\lambda/s)\varphi(k)/k$,

в) если $x\in[x_1+\varepsilon/\beta, x_2]$, то

$$|f(x)-q(x)|\leqq|f(x)-r_2(x)|+|1-\sigma(x)|(|r_1(x)|+|r_2(x)|)$$

$$\leqq(1/2+\lambda/s)\varphi(k)/k+2/s^2.$$

Следовательно, (см. д))

$$\|f-q\|_{[0,1]}\leqq(1/2+\lambda/s)\varphi(k)/k+2/s^2\leqq\varphi(k)(1+2d\ln^2 s/s)/s\,.$$

Кроме того, из (11), (12), (13) и леммы 3 следует, что для любого $x\in(-\infty,\infty)$ имеем $|q(x)|\leqq(1-\sigma(x))|r_1(x)|+\sigma(x)|r_1(x)|\leqq s$, т. е. $\|q\|_{(-\infty,\infty)}\leqq s$. Лемма 4 доказана.

Будем пользоваться также следующим обозначением:

$$\Psi_0(\omega\,;N)=\sup_{f\in V([0,1],1,\omega),f(0)=0}R_N(f,[0,1]).$$

Лемма 5. *Для любого модуля непрерывности* ω *и любых* $[a,b]$, $V>0$ *и* $N\geqq 0$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f\in V([a,b],V,\omega)}R_N(f,[a,b])=V\,.\,\Psi_0(V^{-1}\omega((b-a)\delta)\,;N).$$

Доказательство. Пусть $f\in \mathbf{V}([a,b], V, \omega)$. Тогда для функции $g(x)=V^{-1}(f(a+(b-a)x)-f(a))$ имеем $g\in\mathbf{V}([0,1], 1, V^{-1}\omega((b-a)\delta))$ и $g(0)=0$. Следовательно, существует рациональная функция $r\in R_N$ такая, что

$$\Psi_0(V^{-1}\omega((b-a)\delta)\,;N)\geqq\|g-r\|_{[0,1]}=V^{-1}\|f(x)-(f(a)+Vr((x-a)/(b-a)))\|_{[a,b]},$$

т. е. $\sup_{f\in V([a,b],V,\omega)}R_N(f,[a,b])\leqq V.\Psi_0(V^{-1}\omega((b-a)\delta)\,;N)$. Обратное неравенство доказывается аналогично.

Лемма 6. *Для любой функции* $f\in\mathbf{V}([0,1], 1, \omega)$, $f(0)=0$ *и любого* $\delta_0>0$ *существуют функции* f_1, f_2, f_3 *такие, что* $f=f_1+f_2+f_3$, $f_1, f_2\in\mathbf{W}([0,1], 0, 1\,;\delta_0, \omega(f,\delta_0))$ и $\|f_3\|_{[0,1]}\leqq\omega(f\,;\delta_0)$.

Утверждение этой леммы ясно из геометрических соображений, но формальное доказательство громоздко и мы не будем его приводить [10].

Отметим некоторые свойства модуля изменения $\varkappa(f;n)$: $\varkappa(f;n) \geqq \varkappa(f;n+1) \leqq V_0^1 f$, $\lim_{n\to\infty} \varkappa(f;n) = V_0^1 f$, $\varkappa(f;p.n) \leqq p.\varkappa(f;n)$, $\varkappa(f;n) \leqq 2n\|f\|_{[0,1]}$. Будем пользоваться еще следующим утверждением:

Лемма 7. *Для любой непрерывной на* $[0,1]$ *функции* f *и любого натурального* m *существует непрерывная на* $[0,1]$ *функция* g *такая, что* $\omega(g;\delta) \leqq \omega(f;\delta)$ *для* $\delta \geqq 0$, $\|f-g\|_{[0,1]} \leqq \varkappa(f;m)/2m$ и $V_0^1 g \leqq \varkappa(f;m)$.

Утверждение леммы 7 следует из того [5], что существует ступенчатая функция s, имеющая неболее чем $m-1$ точек разрыва на $[0,1]$: x_i, $i=1,2,\ldots,m-1$, $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_{m-1} \leqq 1$ такая, что $\|f-g\|_{[0,1]} \leqq \varkappa(f;m)/2m$, и существуют точки ξ_i, $i=1,2,\ldots,m$, $0 \leqq \xi_1 \leqq x_1 \leqq \xi_2 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_{m-1} \leqq \xi_m \leqq 1$, в которых s интерполирует функции f, т. е. $s(\xi_i) = f(\xi_i)$, $i=1,2,\ldots,m$.

2. Основные результаты. Теорема 1. *Существуют абсолютные константы* $C_1 \geqq 4e$, $C_2 > 1$ *такие, что если* ω — *некоторый модуль непрерывности,* $[a,b]$ — *интервал и* $V>0$, *то для любых реальных чисел* m *и* N *таких, что* $m \geqq 1$ *и* $N = 2m\ln(C_1(b-a)/m\omega^{-1}(\omega(b-a)/m))$ *справедливо неравенство*

$$\sup_{f\in V([a,b],V,\omega)} R_N(f;[a,b]) \leqq C_2(1+\omega(b-a)/V)^2 V/m.$$

Доказательство. Из леммы 5 и факта, что обратная функция функции $\Omega(\delta) = V^{-1}\omega((b-a)\delta)$ является функцией $\Omega^{-1}(t) = (b-a)^{-1}\omega^{-1}(V.t)$, следует, что утверждение теоремы 1 будет доказано, если докажем, что для любого модуля непрерывности ω имеет место неравенство

$$\Psi_0(\omega;N) \leqq C_2(1+\omega(1))^2/m,$$

где $m \geqq 1$, $N = 2m\ln(C_1/m\,\omega^{-1}(\omega(1)/m))$.

Применяя лемму 6 к произвольной функции $f \in \mathbf{V}([0,1],1,\omega)$, $f(0)=0$ с $\delta_0 = \omega^{-1}(\omega(1)/m)/2$ получаем: существуют функции f_1, f_2, f_3 такие, что $f_1, f_2 \in \mathbf{W}([0,1],0,1;\delta_0,\omega(f;\delta_0)) \subset \mathbf{W}([0,1]\,0,1;\omega^{-1}(\omega(1)/m)/2, \omega(1)/m)$ и $\|f_3\|_{[0,1]} \leqq \omega(f;\delta_0) \leqq \omega(1)/m$. Следовательно, для любого $N \geqq 0$ имеем

$$\Psi_0(\omega;N) \leqq \omega(1)/m + 2\Phi_0(\omega^{-1}(\omega(1)/m)/2, \omega(1)/m; N/2, m).$$

Кроме того, ввиду свойства в) модуля непрерывности ω, имеем $\omega^{-1}(\omega(1)/m)/2 \leqq 1/m$ при $m \geqq 1$.

Следовательно, теорема 1 будет доказана, если докажем, что существуют константы $C_3 \geqq 2e$, $C_4 > 1$ такие, что для любых реальных чисел m, ε, λ, s таких, что $m \geqq 1$, $0 < \varepsilon \leqq 1/m$, $\lambda > 0$, $1 \leqq s \leqq m$ имеет место неравенство

$$\sup_{s.\varepsilon \leqq \alpha \leqq 1} \Phi_0(\varepsilon/\alpha, \lambda/s; s\ln(\alpha C_3/s\varepsilon), s) \leqq C_4(1+\lambda)^2/s. \tag{14}$$

Положим $y(x) = (x - d\ln^2 x)/2$, $y^\nu(x) = y(y^{\nu-1}(x))$, $y^0(x) = x$. Выбираем абсолютную константу M_0 так, чтобы а) $M_0 \geqq 2$, б) $M_0 \geqq s_0$ (s_0 — константа из леммы 4), в) функция $\ln^2 x/x$ монотонно убывает на интервале $[M_0, \infty)$, г) $y(x) \geqq 1$ при $x \geqq M_0$.

Пусть $m \geqq 1$, $0 < \varepsilon \leqq 1/m$, $\lambda > 0$, $1 \leqq s \leqq m$ Рассмотрим сначала случай, когда $1 \leqq s < M_0(1+\lambda)$. Положим $C_3 = 2e$. Тогда $s\ln(\alpha C_3/s.\varepsilon) \geqq \ln 2e > 0$ для $\alpha \in [s.\varepsilon, 1]$ и поэтому

$$\sup_{s.\varepsilon\leq\alpha\leq 1}\Phi_0(\varepsilon/\alpha,\ \lambda/s;\ s\ln(\alpha C_3/s.\varepsilon),\ s) \tag{15}$$
$$\leq \sup_{s.\varepsilon\leq\alpha\leq 1}\Phi_0(\varepsilon/\alpha,\ \lambda/s;\ 0,\ s)\leq 1\leq M_0(1+\lambda)/s=C_5(1+\lambda)/s.$$

Пусть $s\geq M_0(1+\lambda)\geq s_0+2\lambda$. Так как $y(x)<x/2$ для $x>0$ и $y(x)\geq 1$ для $x\geq M_0$ (см. г)), то существует натуральное число ν_0, такое, что $1\leq y^{\nu_0}(s)<M_0(1+\lambda)\leq y^{\nu_0-1}(s)$. Из (15) следует, что

$$\sup_{y^{\nu_0}(s).\varepsilon\leq\alpha\leq 1}\Phi_0(\varepsilon/\alpha,\ \lambda/y^{\nu_0}(s);\ y^{\nu_0}(s)\ln(\alpha.2e/y^{\nu_0}(s).\varepsilon),\ y^{\nu_0}(s))\leq C_5(1+\lambda)/y^{\nu_0}(s).$$

Применяя лемму 4, получаем последовательно:

$$\sup_{y^{\nu_0-1}(s).\varepsilon\leq\alpha\leq 1}\Phi_0(\varepsilon/\alpha;\ \lambda/y^{\nu_0-1}(s);\ y^{\nu_0-1}(s)\ln(\alpha.2e(1$$
$$+3d\ln^2(y^{\nu_0-1}(s))/y^{\nu_0-1}(s))/y^{\nu_0-1}(s).\varepsilon),\ y^{\nu_0-1}(s))$$
$$\leq C_5(1+\lambda)(1+2d(1+\lambda)\ln^2(y^{\nu_0-1}(s))/y^{\nu_0-1}(s))/y^{\nu_0-1}(s),$$

. . . .

$$\sup_{s.\varepsilon\leq\alpha\leq 1}\Phi_0(\varepsilon/\alpha,\ \lambda/s;\ s\ln(\alpha.2e\prod_{\nu=0}^{\nu_0-1}(1+3d\ln^2(y^{\nu}(s))/y^{\nu}(s))/s.\varepsilon),\ s)$$
$$\leq C_5(1+\lambda)\prod_{\nu=0}^{\nu_0-1}(1+2d(1+\lambda)\ln^2(y^{\nu}(s))/y^{\nu}(s))/s.$$

Имея в виду, что функция $\ln^2 x/x$ монотонно убывает на $[M_0,\infty)$ и $y(x)<x/2$ при $x>0$, получаем

$$2e\prod_{\nu=0}^{\nu_0-1}(1+3d\ln^2(y^{\nu}(s))/y^{\nu}(s))\leq 2e\prod_{\nu=0}^{\nu_0-1}(1+3d\ln^2(M_0 2^{\nu_0-1-\nu})/M_0 2^{\nu_0-1-\nu})$$
$$\leq 2e\prod_{i=1}^{\infty}(1+3d\ln^2(M_0 2^i)/M_0 2^i)=C_6,$$

C_6 — абсолютная константа. По тем же причинам имеем

$$C_5(1+\lambda)\prod_{\nu=0}^{\nu_0-1}(1+2d(1+\lambda)\ln^2(y^{\nu}(s))/y^{\nu}(s))\leq C_5(1+\lambda)\prod_{i=0}^{\infty}(1+2d(1$$
$$+\lambda)\ln^2(M_0 2^i)/M_0 2^i)\leq C_7(1+\lambda)^2,$$

C_7 — абсолютная константа.

Следовательно, неравенство (14) выполнено при $C_3=\max\{2e, C_6\}$ и $C_4=\max\{C_5, C_7\}$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Для любого модуля непрерывности* ω *и любых* $[a, b]$ *и* $V>0$ *имеет место неравенство*

$$R_n^{\omega}/\ln(C_1 R_n^{\omega}/\omega^{-1}(C_2 R_n^{\omega}))\leq C_3/n,\quad n=1, 2, 3, \ldots, \tag{16}$$

где $R_n^{\omega}=\sup_{f\in V([a,b],V,\omega)}R_n(f,[a,b])$, $C_1, C_2, C_3>0$ *зависят только от* $b-a$, V и $\omega(b-a)$, $C_1V/\omega^{-1}(C_2V)\geq 2e$.

Точнее, существуют абсолютные константы D_1, D_2, D_3 ($D_1 \geqq 4e$, $D_2 \leqq 1/2$, $D_3 > 1$) такие, что для любого модуля непрерывности ω и любых $[a, b]$ и $V > 0$ справедливо неравенство

$$(17)\qquad R_n^\omega/\ln[D_1(1+\omega(b-a)/V)^{-2}.V^{-1}.(b-a)R_n^\omega/\omega^{-1}(D_2(1+\omega(b-a)/V)^{-2}.V^{-1}.\omega(b-a)R_n^\omega)] \leqq D_3(1+\omega(b-a)/V)^2 V/n, \quad n=1,2,3,\dots$$

Доказательство. Пусть имеем некоторый модуль непрерывности ω, интервал $[a, b]$ и $V > 0$. Как уже отметили (свойство д) модуля непрерывности ω) существует выпуклый вверх модуль непрерывности $\tilde{\omega}$, такой, что $\omega(\delta) \leqq \tilde{\omega}(\delta) \leqq 2\omega(\delta)$ для $\delta \geqq 0$ и, следовательно,

$$(18)\qquad \omega^{-1}(t/2) \leqq \tilde{\omega}^{-1}(t) \leqq \omega^{-1}(t), \ t \geqq 0.$$

Положим $h(x) = 2x\ln(C_1(b-a)/x\tilde{\omega}^{-1}(\omega(b-a)/x))$ ($C_1 \geqq 4e$ константа из теоремы 1). Так как $\tilde{\omega}^{-1}$ выпукла внизу и $\tilde{\omega}^{-1}(0)=0$, то функция $x\tilde{\omega}^{-1}(\omega(b-a)/x)$ монотонно убывает на $(0, \infty)$. С другой стороны, для $x \geqq 1$ имеем $C_1(b-a)/x\tilde{\omega}^{-1}(\omega(b-a)/x) \geqq 4e(b-a)/x\omega^{-1}(\omega(b-a)/x) \geqq 2e$, поэтому функция h монотонно возрастает на $[1, \infty)$.

Ввиду теоремы 1 и (18) получаем, что если $m \geqq 1$ и $N = h(m)$, то

$$(19)\qquad R_N^\omega \leqq C_2(1+\omega(b-a)/V)^2.V/m \ (C_2 > 1 \text{ константа из теоремы } 1).$$

Пусть n — произвольное натуральное число. Если $n < h(1)$, то ввиду неравенства $R_n^\omega \leqq V/2$ ясно, что существуют абсолютные константы D_1, D_2, D_3($D_1 \geqq 4e$, $D_2 \leqq 1/2$, $D_3 > 1$) такие, что неравенство (17) справедливо для всех $n < h(1)$.

Рассмотрим случай, когда $n \geqq h(1)$. Из монотонного возрастания и непрерывности функции h на $[1, \infty)$ следует, что существует реальное число $m \geqq 1$ такое, что $n = h(m)$. Тогда из (19) получаем $R_n^\omega \leqq C_2(1+\omega(b-a)/V)^2 V/m$ и, следовательно, $m \leqq C_2(1+\omega(b-a)/V)^2 V/R_n^\omega$. Но функция h монотонно возрастает на $[1, \infty)$, поэтому

$$n = h(m) \leqq h(C_2(1+\omega(b-a)/V)^2 V/R_n^\omega)$$

$$\leqq 2C_2(1+\omega(b-a)/V)^2 V.\ln(C_1C_2^{-1}(1+\omega(b-a)/V)^{-2}V^{-1}(b-a)R_n^\omega$$

$$/\omega^{-1}(2^{-1}C_2^{-1}(1+\omega(b-a)/V)^{-2}V^{-1}\omega(b-a)R_n^\omega))/R_n^\omega.$$

Из этих неравенств, полагая $D_1 = C_1.C_2^{-1}$, $D_2 = 2^{-1}C_2^{-1}$ и $D_3 = 2C_2$, получаем справедливость неравенства (17) при $n \geqq h(1)$. Этим теорема 2 доказана.

3. Следствия. Обобщение основного результата. Приведем точные по порядку оценки для $\sup_{f \in V([a,b],V,\omega)} R_n(f)$, которые следуют из теоремы 2 (теоремы 1) для некоторых конкретных модулей непрерывности ω.

Имеют место следующие оценки:

$$\sup_{f \in \mathrm{Lip}_H 1} R_n(f) \leqq C_1/n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(тот же самый порядок имеет и наилучшее равномерное приближение класса $\mathrm{Lip}_H\, 1$ алгебраическими полиномами n-той степени, см. теорему Джексона [8], стр. 161),

$$\sup_{f \in \mathbf{V}_2} R_n(f) \leqq C_2 \ln^{(k+1)} n/n, \quad n > N(k),$$

где $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}([a, b], V, H.\delta.(\ln^{(k)}(1/\delta))^\gamma)$, $k \geqq 1$, $\gamma > 0$, $\ln^{(k)} x = \underbrace{\ln \ln \ldots \ln}_{k} x$, $N(k)$ — зависит лишь от k (рациональные функции n-той степени аппроксимируют уже лучше, чем алгебраические полиномы n-той степени),

$$\sup_{f \in \mathbf{V}_3} R_n(f) \leqq C_3 \ln n/n, \quad n = 2, 3, 4, \ldots, \tag{20}$$

где

$$\mathbf{V}_3 = \mathbf{V}([a, b], V, H.\delta^\alpha), \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$\sup_{f \in \mathbf{V}_4} R_n(f) \leqq C_4 n^{-\gamma/(1+\gamma)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{21}$$

где

$$\mathbf{V}_4 = \mathbf{V}([a, b], V, H/(\ln (1/\delta))^\gamma), \ \gamma > 0,$$

$$\sup_{f \in \mathbf{V}_5} R_n(f) \leqq C_5/(\ln^{(k-1)} n)^\gamma, \quad n > N(k),$$

где $\mathbf{V}_5 = \mathbf{V}([a, b], V, H/(\ln^{(k)}(1/\delta))^\gamma)$, $k \geqq 2$, $\gamma > 0$, $N(k)$ — зависит лишь от k, где $C_1, C_2, \ldots, C_5$ — положительные константы, не зависящие от n.

Отметим, что, например, когда пишем $f \in \mathbf{V}([a, b], V, H\delta(\ln^{(k)}(1/\delta))^\gamma)$, понимаем, что $V_a^b f \leqq V$ и $\omega(f; \delta) \leqq H.\delta(\ln^{(k)}(1/\delta))^\gamma$ для $\delta \leqq \delta(k)$, $\delta(k)$ — зависит лишь от k.

Из всех оценок мы докажем только (20), справедливость остальных устанавливается аналогичным образом. Действительно, пусть $n \geqq 2$. Если $R_n^\alpha = \sup_{f \in \mathbf{V}_3} R_n(f) \leqq H(b-a)^\alpha \ln n/n$, то нечего доказывать. Если $R_n^\alpha > H(b-a)^\alpha \ln n/n$, то полагая $\omega^{-1}(t) = (t/H)^{1/\alpha}$ (ω^{-1} — выпукла) в неравенстве (16), получаем

$$R_n^\alpha \leqq C_3 \ln(C_1 R_n^\alpha/\omega^{-1}(C_2 R_n^\alpha))/n \leqq C_3 \ln(C_1 H(b-a)^\alpha (\ln n/n)/\omega^{-1}(C_2 H(b-a)^\alpha \ln n/n))/n$$

$$\leqq C_3 \ln(C_1 H(b-a)^\alpha (\ln n/n)/(C_2 (b-a)^\alpha \ln n/n)^{1/\alpha})/n \leqq C \ln n/n,$$

где C не зависит от n. Этим неравенство (20) доказано.

Базируясь на модуль изменения $\varkappa(f; n)$, теорема 1 обобщается следующим образом:

Теорема 3. *Существуют абсолютные константы $C_1 \geqq 4e$, $C_2 > 1$ такие, что если ω некоторый модуль непрерывности и $\varkappa(n)$ некоторая монотонно возрастающая и положительная функция натурального аргумента, то для любой непрерывной на $[0, 1]$ функции f такой, что $\omega(f; \delta) \leqq \omega(\delta)$, $\delta \geqq 0$ и $\varkappa(f; n) \leqq \varkappa(n)$, $n = 1, 2, \ldots$ и для любых n, m (m — натуральное) таких, что $n = 2m \ln(C_1/m\,\omega^{-1}(\omega(1)/m))$ справедливо неравенство*

$$R_n(f) \leqq C_2 (1 + \omega(1)/\varkappa(1))^2 \varkappa(m)/m.$$

Утверждение теоремы 3 следует непосредственно из теоремы 1 и леммы 7.

Теорема 3 позволяет, зная порядки $\omega(f; \delta)$ и $\varkappa(f; n)$, получить оценку для $R_n(f)$. Например, если $\omega(f; \delta) = O(\delta^\alpha)$ и $\varkappa(f; n) = O(\ln n)$, то из теоремы 3 следует, что $R_n(f) = O(\ln^2 n/n)$.

Заметим, что, как показал Е. П. Долженко [11], ставя условие только на $\omega(f; \delta)$, нельзя получить для $R_n(f)$ порядок лучший чем порядок наилучшего равномерного приближения f алгебраическими полиномами n-той степени. Следовательно, ограничения, которые мы ставим на вариации функции или на порядок роста ее модуля изменения, естественны.

В конце считаю приятным долгом поблагодарить В. А. Попова под руководством которого была выполнена эта работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. J. Newman. Rational approximation to x. *Michigan Math. J.*, **11**, 1964, 11—14.
2. G. Freud. Über die Approximation reeller Funktionen durch rationale gebrochene Funktionen. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **17**, 1966, 313—324.
3. А. П. Буланов. Рациональные приближения непрерывных функций с конечным изменением. *Известия АН СССР, сер. матем.*, **39**, 1975, № 5, 1142—1180.
4. V. A. Popov. Rational uniform approximation of class V_r and its applications. *C. R. Acad. bulg. Sci.*, **29**, 1976, № 6, 791—794.
5. V. A. Popov. On the connection between rational and spline approximation. *C. R. Acad. bulg. Sci.*, **27**, 1974, № 5, 623—626.
6. З. А. Чантурия. Модуль изменения функции и его применения в теории рядов Фурье. *Доклады АН СССР*, **214**, 1974, № 1, 63—66.
7. А. В. Ефимов. Линейные методы приближения непрерывных периодических функций. *Мат. сб.*, **54**, 1961, № 1, 51—90.
8. И. П. Натансон. Конструктивная теория функций. Москва, 1949.
9. А. А. Гончар. О скорости рациональной аппроксимации непрерывных функций с характерными особенностями. *Мат. сб.*, **73** (115), 1967, 630—638.
10. В. Х. Христов, П. П. Петрушев. Одно улучшение критерия Дини — Липшица о равномерной сходимости ряда Фурье. *Доклады БАН*, **30**, 1976, № 11, 1579—1582.
11. Е. П. Долженко. Сравнение скоростей рациональной и полиномиальной аппроксимаций. *Мат. заметки*, **1**, 1967, № 3, 313—320.

Единый центр науки и подготовки кадров по математике и механике

1000 София П. Я. 373

Поступила 14. 10. 1976