PLISKA
STUDIA MATHEMATICA
BULGARICA

ПЛИСКА
БЪЛГАРСКИ
МАТЕМАТИЧЕСКИ
СТУДИИ

РАСЩЕПЛЯЕМОСТЬ БАЗИСОВ И ИЗОМОРФИЗМ ГРУППОВЫХ КОЛЕЦ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

САМУИЛ Д. БЕРМАН, ТОДОР Ж. МОЛЛОВ

Пусть G — абелева группа, F — периодическая часть G, F' — подгруппа элементов бесконечной высоты в F. Если, по крайней мере, одна из групп G/F и F счетна, K — конечное расширение поля рациональных чисел или конечное поле, характеристика которого не делит порядки элементов F, причем F имеет конечное число примарных компонент, если K — конечное поле, то групповая алгебра KG тогда и только тогда обладает расщепляемым групповым базисом, когда группа G/F' есть расщепляемое расширение группы F/F' — в частности, если F не содержат элементов бесконечной высоты, то все групповые базисы алгебры KG одновременно расщепляемы или нерасщепляемы. Если фактор-группа G/F счетна, K — поле и a) если F — p-группа, а K — поле характеристики p, то все групповые базисы в KG одновременно расщепляемы или нерасщепляемы; b) если F имеет конечное число примарных компонент, K — конечное поле характеристики p, F_p — силовская p-подгруппа в F, $F=F_p\times H$ и H' — подгруппа элементов бесконечной высоты в H, то алгебра KG тогда и только тогда обладает расщепляемым групповым базисом, когда группа G/H' есть расщепляемое расширение группы F/H'; c) если T — такая область целостности характеристики нуль, что все простые делители порядков элементов F в T необратимы ($1 \in T$), то из T-изоморфизма $TG\cong TG_1$ вытекает, что $G\cong G_1$.

Пусть G — абелева группа, F — периодическая часть G, K — поле, а KG — групповая алгебра группы G над полем K. В этой статье исследуется поставленный в [6] вопрос о существовании в KG расщепляемого группового базиса (т. е. базиса, который разлагается в прямое произведение периодической группы и группы без кручения). Для „достаточно большого" поля K характеристики 0 ответ на этот вопрос легко получить. Имеет место следующее утверждение: если K — поле комплексных чисел или поле вещественных чисел, то алгебра KG всегда обладает расщепляемым групповым базисом. Ситуация меняется, когда K является конечным расширением простого поля или когда K — поле характеристики p (p — простое), а F — p-группа. Некоторые основные результаты работы опубликованы в [2].

1. В этом параграфе мы неизменно будем предполагать, что характеристика поля K не делит порядки элементов группы F. Для основного результата будет существенно то, что поле K „достаточно мало". Докажем предварительно ряд вспомогательных утверждений.

Пусть p — фиксированное простое число, а ε_i — первообразный корень степени p^i из единицы ($i=1, 2, \ldots$) в некотором расширении поля K. Следуя терминологии статьи [1], будем говорить, что K есть поле первого рода относительно простого p, если $(K(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots):K)=\infty$. Если K — поле первого рода относительно простого p, то существует такое натуральное число $t=t(p)$, что $K(\varepsilon_i)\subset K(\varepsilon_{i+1})$ (строгое включение) при $i\geqq t$ и $K(\varepsilon_1)=\cdots=K(\varepsilon_t)$ ($p\neq 2$), $K(\varepsilon_2)=\cdots=K(\varepsilon_t)$ ($p=2$).

ПЛИСКА Български математически студии. Том 2, 1981, с. 6—22.

Конечное расширение поля рациональных чисел или конечное поле являются полями первого рода относительно всех простых чисел.

Лемма 1. *Пусть K — конечное расширение поля рациональных чисел Q. Существует такая натуральная константа N, зависящая только от поля K, что выполняется следующее свойство:*

если F — произвольная циклическая p-группа (p — любое простое), а $f\in F$ — элемент, порядок которого больше, чем N, то из разрешимости уравнения $x^{p^n}=f$ (n — натуральное) в алгебре KF следует его разрешимость в группе F.

Доказательство. Пусть $t=t(p)$ — определенная выше константа, соответствующая простому числу p и полю K. Покажем сначала, что если порядок элемента f равен $p^s\geqq p^t$, то из разрешимости уравнения $x^{p^n}=f$ в KF вытекает его разрешимость в группе F.

Действительно, мультипликативная группа алгебры KF содержит элемент порядка p^{s+n}, а порядок циклической группы F равен p^{s+r}. Алгебра KF есть ортогональная сумма полей $K(\xi_i)$, где $\xi_i^{p^{s+i}}=1$. Следовательно, некоторое поле $K(\xi_i)$ в разложении KF содержит превообразный корень степени p^{s+n} из единицы. Это противоречит определению числа $t(p)$, если $r<n$. Значит, $r\geqq n$, а тогда в F разрешимо уравнение $x^{p^n}=f$.

Пусть $(K:Q)=m$. Заметим теперь, что если $p>m$, то $t(p)=1$, если $p\neq 2$ и $t(p)=2$, если $p=2$. В самом деле, пусть $K=Q(\theta)$, где θ — примитивный элемент поля K, и $K(\varepsilon_i)=K(\varepsilon_{i+1})$ (ε_j — первообразный корень степени p^j из 1). Имеем

$$(K(\varepsilon_i):Q)=(Q(\varepsilon_i):Q)\,(Q(\varepsilon_i,\theta):Q(\varepsilon_i))=(p-1)p^{i-1}m_1,$$

$$(K(\varepsilon_{i+1}):Q)=(Q(\varepsilon_{i+1}):Q)(Q(\varepsilon_{i+1},\theta):Q(\varepsilon_{i+1}))=(p-1)p^i m_2,$$

где m_1, m_2 делят m. Так как $p>m$, то равенство $(p-1)p^{i-1}m_1=(p-1)p^i m_2$ невозможно. Пусть $p_1,\dots,p_s$ — все простые числа, не превосходящие $m>1$, и $t_i=t(p_i)$. Положим $N=2$, если $m=1$, и $N=\max(p_1^{t_1},\dots,p_s^{t_s})$, если $m>1$. Тогда N — искомая константа.

Действительно, пусть $f\in F$, где F — циклическая p-группа, и порядок f равен $p^r>N$. Если p совпадает с одним из чисел $p_1,\dots,p_s$, то $p^r\geqq p^{t(p)}$ в силу определения числа N. Пусть $p>m$. Если $p\neq 2$, то по доказанному $t(p)=1$ и $p^r\geqq p=p^{t(p)}$. Если же $p=2$, то $t(p)=2$. Тогда из определения числа N и неравенства $2^r>N$ получаем, что $r\geqq 2$ и снова $2^r\geqq 2^{t(2)}$.

Итак, если $p^r>N$, то $p^r\geqq p^{t(p)}$, а тогда, как было показано, в F разрешимо уравнение $x^{p^n}=f$. Лемма доказана.

Лемма 1′. *Пусть K — конечное поле характеристики p, а $p_1,\dots,p_n$ — фиксированные простые числа, отличные от p. Существует такая натуральная константа N, зависящая от поля K и чисел $p_1,\dots,p_n$, что если F — циклическая p_i-группа и $f\in F$ — элемент с порядком, большим, чем N, то из разрешимости уравнения $x^{p_i^m}=f$ в KF следует его разрешимость в F.*

Мы опускаем доказательство этой леммы, являющееся упрощенным вариантом предыдущего доказательства. Обращаем внимание на то, что в лемме 1 множество $p_1,\dots,p_n$ конечно.

Лемма 2. *Пусть K — конечное расширение поля рациональных чисел. Мультипликативная группа K^* поля K разлагается в прямое произведение конечной группы и свободной группы.*

Лемма является известным фактом. Если $K=Q$, то она вытекает из того, что Q есть поле отношений кольца целых рациональных чисел Z, в котором каждый идеал — главный. Для любого поля K, $(K:Q)<\infty$, утверждение леммы следует из теоремы Дирихле о группе единиц кольца R целых величин поля K и из того, что существует такое конечное расширение T поля K, что в кольце целых величин поля T каждый идеал кольца R порождает главный идеал.

Следствие. *Пусть F — произвольная конечная группа, а K — конечное расширение поля рациональных чисел. Мультипликативная группа алгебры KF есть прямое произведение свободной и конечной группы.*

Доказательство. Имеет место ортогональное разложение $KF=I_1\dot{+}\cdots\dot{+}I_s$, где I_i — минимальные идеалы алгебры KF, изоморфные как кольца полям $K(\xi_i)$, $\xi_i^{n_i}=1$. Мультипликативная группа алгебры KF изоморфна прямому произведению мультипликативных групп полей $I_i\,(i=1,\ldots,s)$, что, ввиду леммы 2, доказывает утверждение.

Лемма 3. *Пусть периодическая группа F допускает прямое разложение $F=H\times S$, где H — группа без элементов бесконечной высоты, а F_1 — произвольная конечная подгруппа группы F. Существует такое натуральное число n и такая конечная подгруппа $\bar{H}$ группы H/H^n, что группа F допускает эпиморфизм на группу $\bar{H}\times S$, являющийся мономорфизмом на F_1.*

Доказательство. Так как H не содержит элементов бесконечной высоты, то существует такое натуральное число n, что $F_1\cap H^n=1$. Следовательно, отображение $\theta:f\to fH^n$, $f\in F$, является эпиморфизмом F на $F/H^n\cong H/H^n\times S$, ограничения которого на F_1 есть мономорфизм. Компонента группы $\theta(F_1)$ в H/H^n содержится в некотором конечном прямом множителе $\bar{H}$ группы H/H^n (эта группа имеет ограниченный показатель и, следовательно, разлагается в прямое произведение циклических групп). Значит, существует эпиморфизм $\theta_1:H/H^n\times S$ на $\bar{H}\times S$, тождественный на $\bar{H}\times S$. Эпиморфизм $\theta_1\theta:F\to\bar{H}\times S$ является искомым.

Следствие 1. *Если периодическая группа F не содержит элементов бесконечной высоты, а F_1 — произвольная конечная подгруппа группы F, то существует эпиморфизм $\theta:F\to H$ на конечную группу H, являющийся мономорфизмом на F_1.*

Следствие 2. *Пусть периодическая группа F не содержит элементов бесконечной высоты, а K — поле, характеристика которого не делит порядки элементов группы F. Тогда пересечение ядер всех неприводимых конечномерных K-представлений алгебры KF равно нулю.*

Доказательство. Пусть $x\in KF$, $x\neq0$. Согласно следствию 1, существует эпиморфизм $\theta:KF\to KH$, где H — конечная группа, такой, что $\theta(x)=y\neq0$. Пусть $1=e_1+\cdots+e_s$ — разложение 1 алгебры KH в ортогональную сумму минимальных идемпотентов. Тогда $ye_i\neq0$ для некоторого индекса i. Идемпотенту e_i соответствует такое неприводимое K-представление Γ_i алгебры KH, что $\Gamma_i(y)\neq0$. Следовательно, $\Gamma_i\,(\theta x)\neq0$ и элемент x не содержится в ядре неприводимого K-представления $\Gamma_i\theta$ алгебры KF. Утверждение доказано.

Лемма 4. *Пусть F — периодическая группа, F' — подгруппа элементов бесконечной высоты в F, а K — поле первого рода относительно всех простых делителей порядков элементов F, причем характеристика K не делит эти порядки. Тогда идеал V алгебры KF, порожденный всеми элементами $f-1$, $f \in F'$, совпадает с пересечением ядер всех неприводимых конечномерных K-представлений алгебры KF.*

Доказательство. Пусть P — произвольная силовская p-подгруппа группы F' и $a \in P$, $a \neq 1$. Покажем, что элемент a содержится в ядре произвольного неприводимого K-представления Γ группы F. Хорошо известно, что всякое неприводимое конечномерное представление локально конечной группы над полем, характеристика которого не делит порядки элементов группы, вполне приводимо. Пусть $\bar{K}$ — алгебраическое замыкание поля K, а степень представления Γ равна m. Над полем $\bar{K}$ представление Γ разлагается в сумму m одномерных представлений: $\Gamma=\chi_1+\cdots+\chi_m$. Предположим, что элемент a не лежит в ядре характера χ_i. Так как a — элемент бесконечной высоты в P, то существует такая последовательность $a_1, a_2, \ldots$ элементов группы P, что $a_i^{p^i}=a$ $(i=1, 2, \ldots)$. Пусть $\chi_i(a)=\varepsilon$, $\chi_i(a_j)=\varepsilon_j$ $(j=1, 2, \ldots)$. Тогда $\varepsilon_j^{p^j}=\varepsilon\neq 1$. Поскольку K — поле первого рода относительно простого p, то существует такой индекс j, что $(K(\varepsilon_j):K)>m$. Рассмотрим конечную подгруппу $H=\langle a, a_j\rangle$ группы P. Характер χ_i группы F индуцирует на H характер, которому соответствует неприводимое K-представление Γ' группы H степени $(K(\varepsilon_j):K)>m$. Так как Γ' — компонента индуцированного представления Γ_H степени m, то мы получили противоречие. Следовательно, элемент $a \in P$ лежит в ядрах всех характеров χ_i $(i=1, 2, \ldots, m)$, а, значит, и в ядре представления Γ. Отсюда сразу вытекает, что произвольный элемент $a \in F'$ содержится в пересечении ядер всех неприводимых конечномерных K-представлений группы F, а тогда идеал V лежит в пересечении ядер всех конечномерных неприводимых K-представлений алгебры KF. Имеет место изоморфизм $KF/V \cong K(F/F')$, где F/F' — группа без элементов бесконечной высоты. На основании следствия 2 из леммы 3 для любого элемента $x \in KF$, $x \bar{\in} V$ существует неприводимое конечномерное K-представление Γ алгебры KF/V, для которого $\Gamma(x)\neq 0$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть K — конечное расширение поля рациональных чисел, F — периодическая группа без элементов бесконечной высоты, а T — периодическая часть мультипликативной группы M алгебры KF. Тогда группы T и T/F не содержат элементов бесконечной высоты, а группа M/T аппроксимируется свободными абелевыми группами.*

Доказательство. Пусть $x \in M$, $x \neq 1$. Тогда существует такая конечная подгруппа $F_1 \subseteq F$, что $x \in KF_1$, $x \notin F_1$, если $x \notin F$. В силу следствия 1 из леммы 3 существует эпиморфизм $\theta: F \to H$, где H — конечная группа, причем ограничение θ на F_1 есть мономорфизм. Отображение θ естественным образом продолжается до эпиморфизма $\tilde{\theta}: KF \to KH$.

Пусть $x \in T$, $\tilde{\theta}(x)=y$. Тогда $y \neq 1$. Периодическая часть $\bar{T}$ мультипликативной группы алгебры KH есть конечная группа (см. следствие из леммы 2).

Если x — элемент бесконечной высоты в T, то y — элемент бесконечной высоты в $\bar{T}$, что невозможно. Пусть $x \notin F$. Тогда $y \notin H$, ибо ограничение θ/F_1 есть мономорфизм. Если xF — элемент бесконечной высоты T/F, то yH — элемент бесконечной высоты в $\bar{T}/H$, а это снова дает противоречие. Таким образом, группы T и T/F не содержат элементов бесконечной высоты. Пусть теперь $x \in M$ — элемент бесконечного порядка. Тогда $\widetilde{\theta}(x)=y$ — также элемент бесконечного порядка в мультипликативной группе $\bar{M}$ алгебры KH (мы опять используем, что θ/F_1 — мономорфизм). В силу следствия из леммы 2, фактор-группа $\bar{M}/\bar{T}$ — свободная абелева группа. Значит, группа M/T аппроксимируется свободными абелевыми группами. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть K — конечное расширение поля рациональных чисел, F — периодическая группа, а L — такая подгруппа мультипликативной группы M алгебры KF, что L/T, где T — периодическая часть L, имеет не более чем счетный ранг. Тогда L/T — свободная группа.*

Доказательство. Из леммы 5 вытекает, что группа L/T аппроксимируется свободными абелевыми группами. Но абелева группа G без кручения не более чем счетного ранга, которая аппроксимируется свободными абелевыми групамми, сама свободна. Действительно, в силу теоремы Штейна ([9], с. 114), имеет место прямое разложение $G=S\times G_1$, где S — свободная группа, а G_1 не содержит свободных прямых множителей. Предположим, что $G_1 \neq 1$. Так как G аппроксимируется свободными группами, то из G_1 выделяется свободный прямой множитель, что ведет к противоречию. Утверждение доказано.

Лемма 6. *Пусть F — периодическая группа, силовская p-подгруппа T которой не содержит элементов бесконечной высоты, а K — конечное расширение простого поля, характеристика которого не делит порядки элементов F. Тогда силовская p-подгруппа S мультипликативной группы алгебры KF не содержит элементов бесконечной высоты.*

Доказательство. Предположим, что группа S содержит элемент $x \neq 1$ бесконечной высоты. Пусть $x \in KF_1$, где F_1 — конечная подгруппа группы F. Так как T — прямой множитель группы F, то на основании леммы 3 существует гомоморфизм $\theta: F \to H \times L = G$, где H — конечная p-группа, а L — периодическая группа, порядки элементов которой взаимно просты с p. При этом ограничение θ на F_1 является мономорфизмом. Продолжим θ до эпиморфизма $\widetilde{\theta}: KF \to KG$. Тогда $\widetilde{\theta}(x)=y$, где y — элемент бесконечной высоты в периодической подгруппе группы единиц алгебры KG. Очевидно, $y \in KG_1$, где $G_1=H\times\widetilde{L}$, а $\widetilde{L}$ — прямой множитель группы L, разлагающийся в произведение конечного числа силовских подгрупп: $\widetilde{L}=L_1\times L_2\times\cdots\times L_r$($L_i$ — p_i-группа, $p_1, \ldots, p_r$ — различные простые).

Ясно, что y — элемент бесконечной высоты в силовской p-подгруппе $\widetilde{S}$ мультипликативной группы алгебры KG_1. Покажем, что это ведет к противоречию. Пусть p^n — показатель группы H, ε — первообразный корень степени p^n из 1, а ξ_i — первообразный корень степени p_i из 1 ($i=1, \ldots, r$). Пусть далее порядок силовской p-подгруппы мультипликативной группы поля $K(\varepsilon, \xi_1, \ldots, \xi_r)$ равен $p^\alpha (\alpha \geqq n)$. Тогда показатель группы $\widetilde{S}$ равен точно p^α. Действительно, для любой конечной подгруппы $G_2 \subseteq G_1$ алгебра KG_2 разлагается в ортогональную сумму полей $T=K(\varepsilon_j, \eta_1, \ldots, \eta_r)$, где $\varepsilon_j^{p^n}=1$ и $\eta_i^{p_i^{n_i}}=1$ (η_i — некоторые неотрицательные целые числа, $i=1, \ldots, r$). Легко видеть, что любое из полей T не содержит корень степени $p^{\alpha+1}$ из единицы, и поэтому показатель группы $\widetilde{S}$ равен p^α. Полученное противоречие доказывает лемму.

Если F — конечная группа, K — поле, характеристика которого не делит порядок F, а e — минимальный идемпотент алгебры KF, то условимся называть ядром идемпотента ядро неприводимого K-представления, соответствующего идемпотенту e. Ядро N идемпотента e может быть также охарактеризовано следующим образом: $N=\{g\in F/ge=e\}$.

Лемма 7. *Пусть F — периодическая группа, K — поле, характеристика которого не делит порядки элементов группы F, F_1 — конечная подгруппа группы F, $x\in KF_1$, e — минимальный идемпотент алгебры KF_1, N — ядро идемпотента e, H — такая подгруппа группы F, что $N'=H\cap F_1\subseteq N$, а V — идеал алгебры KF, порожденный элементами $h-1$, $h\in H$. Если $xe\neq e$, то $x\not\equiv 1 \pmod V$.*

Доказательство. Представим элемент x в виде $x=x_1+x_2g_2+\cdots+x_tg_t$, где $x_i\in KN'$, а $1, g_2, \ldots, g_t$ — представители смежных классов F_1 по N'. Если $x-1=(x_1-1)+g_2x_2+\cdots+g_tx_t\in V$, то в каждом из элементов x_1-1, $x_2, \ldots, x_t$ алгебры KN' сумма коэффициентов при элементах группы N' равна нулю, так как элементы $1, g_2, \ldots, g_t$ лежат в различных смежных классах группы F по подгруппе H. Тогда $(x_1-1)e=0$, $x_2e=0, \ldots, x_te=0$, и, следовательно, $(x-1)e=0$, что противоречит условию леммы. Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть F — периодическая группа, содержащая элементы бесконечной высоты, а K — конечное расширение простого поля, характеристика которого не делит порядки элементов F. Тогда подгруппа элементов бесконечной высоты в периодической подгруппе A мультипликативной группы алгебры KF полна.*

Доказательство. Пусть $x\neq 1$ — элемент бесконечной высоты в силовской p-подгруппе S мультипликативной группы алгебры KF, а T — силовская p-подгруппа группы F. Очевидно, подгруппа H элементов бесконечной высоты в S отлична от единицы. Пусть $x\in KF_1$, где F_1 — конечная подгруппа группы F, $e_1, \ldots, e_t$ — все минимальные идемпотенты алгебры KF_1, и пусть $xe_1\neq e_1, \ldots, xe_n\neq e_n$, $xe_{n+1}=e_{n+1}, \ldots, xe_t=e_t$. Предположим для некоторого $i\,(1\leqq i\leqq n)$ подгруппа $H\cap F_1$ лежит в ядре идемпотента e_i. Обозначим через V идеал алгебры KF, порожденный элементами $h-1$, $h\in H$. Если $F=T\times L$, то $KF/V\cong K(T/H\times L)$. Ввиду леммы 7 $x\not\equiv 1 \pmod V$ и, следовательно, при естественном гомоморфизме $\theta: KF\to KF/V$ элемент x переходит в элемент $\theta(x)$ бесконечной высоты в силовской p-подгруппе мультипликативной группы KF/V. Так как T/H не содержит элементов бесконечной высоты, то это противоречит лемме 6. Значит, подгруппа $H\cap F_1$ не лежит в ядре ни одного из идемпотентов $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Фиксируем произвольный из этих идемпотентов e_i. Пусть этому идемпотенту соответствует абсолютно неприводимый характер χ группы F_1. По доказанному существует элемент $a\in H\cap F_1$, для которого $\chi(a)=\varepsilon\neq 1$, где ε — первообразный корень степени p^r из единицы $(r>0)$. Так как a — элемент бесконечной высоты в T, то существует последовательность элементов $a_1, a_2, \ldots \in T$, таких, что $a_i^{p^i}=a_2$ $(i=1, 2, \ldots)$. Положим $H_j=\langle a, a_1, \ldots, a_j\rangle$ и пусть $\overline{H}_i=\bigcup_{j=1}^{\infty}H_j$. В алгебре KH_j идемпотент e_i разлагается в ортогональную сумму минимальных идемпотентов: $e_i=u_1+u_2+\cdots+u_q$, каждый из которых порождает поле KH_ju_t, содержащее первообразный корень степени p^{r+j} из единицы. Пусть $y\in K\overline{H}e_i$ и $y^{p^s}=e_i$. Тогда $y\in KH_j$ (для некоторого j) и для любого наперед заданного натурального m найдется такой индекс $k\geqq j$, что в алгебре KH_k выполняется равенство

$z^{p^m}=y$. Таким образом, существует последовательность элементов $xe_i=y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \ldots$ алгебры $K\bar{H}_i$, такая что $y_{j+1}^{(i)p}=y_j^{(i)}$ $(j=1, 2, \ldots)$. Полагаем теперь $b_0=x, \ldots, b_j=y_j^{(1)}+y_j^{(2)}+\cdots+y_j^{(n)}+e_{n+1}+\cdots+e_t$ $(j=1, 2, \ldots)$. Так как идемпотенты e_i попарно ортогональны, то $b_1^p=b_0, b_2^p=b_1, \ldots, b_{s+1}^p=b_s, \ldots$ Таким образом, элемент x погружается в группе S в подгруппу типа p^∞. Значит, S — полная группа и лемма доказана.

Частный случай леммы 8 сформулирован в [3].

Лемма 9. *Пусть G — абелева группа, F — периодическая часть G, а K — поле, характеристика которого не делит порядки элементов группы F. Тогда каждый обратимый элемент $x\in KG$ имеет вид $x=\mu_1g_1+\cdots+\mu_sg_s$, где элементы $g_i\in G$ лежат в различных смежных классах G по F, $\mu_i\in I_i$, $\mu_i\neq0$, и $KF=I_1\dotplus\cdots\dotplus I_t$ — разложение KF в прямую сумму идеалов.*

Доказательство. Очевидно утверждение достаточно доказать для конечно-порожденной группы G. Тогда $G=F\times H$, где F — конечная группа, H — свободная группа. Алгебра KF есть ортогональная сумма полей: $KF=I_1\dotplus\ldots\dotplus I_t$. Поэтому имеет место ортогональное разложение: $KG=I_1H\dotplus\cdots\dotplus I_tH$. Пусть x — обратимый элемент в KG. Тогда $x=x_1+\cdots+x_t$, где x_i — обратимый элемент в I_iH $(i=1, \ldots, t)$. Хорошо известно, что все делители единицы в скрещенной групповой алгебре (и, в частности, в групповой алгебре) абелевой группы без кручения над полем тривиальны (см., например, [8], с. 63). Значит, $x_i=\lambda_ig_i$ $(\lambda_i\in I_i, \lambda_i\neq0, g_i\in H)$ и

$$x=\lambda_1g_1+\cdots+\lambda_tg_t, \tag{1}$$

где элементы λ_i попарно ортогональны. Вынося за скобки в (1) совпадающие элементы g_i, получим утверждение леммы.

Следствие. *Пусть K — поле, характеристика которого не делит порядки элементов F. Если $KG=KG_1$, то $KF=KF_1$.*

Доказательство. Из леммы 9 вытекает, что все единицы конечного порядка в KG содержатся в KF. Следовательно, $KF_1\subseteq KF$. Так как KF не содержит нильпотентных элементов, то характеристика поля K не делит порядки элементов группы F_1. Следовательно, подалгебры KF и KF_1 совпадают с подалгеброй алгебры KG, порожденной всеми ее единицами конечного порядка.

Теорема 1′. *Пусть G — абелева группа, F — периодическая часть G, причем по крайней мере одна из групп F, G/F счетна, а F не содержит элементов бесконечной высоты.*

Пусть K — конечное расширение поля рациональных чисел или конечное поле, характеристика которого не делит порядки элементов группы F. Предположим, сверх того, что F имеет только конечное число примарных компонент, если K — конечное поле. Тогда все групповые базисы алгебры KG одновременно расщепляемы или нерасщепляемы.

Доказательство. Предположим, что алгебра KG обладает расщепляемым групповым базисом G_1, и покажем, что тогда группа G также расщепляема. Пусть $G_1=F_1\times H_1$ (F_1 — периодическая часть G_1). Ввиду следствия из леммы 9, $KF=KF_1$. Каждый элемент $x\in KG$ однозначно записывается в виде

$$x=\Sigma x_ih_i \quad (x_i\in KF, h_i\in H_i). \tag{2}$$

В силу (2) отображение

(3) $$\theta(x)=\sum_i x_i$$

задает сюръективный гомоморфизм KG на KF, тождественный на KF. Обозначим через A периодическую часть мультипликативной группы M алгебры KF. Пусть $\theta(G)=A_1$, а H и H_1 соответственно прообразы $A_1\cap A$ и F в G. Заметим, что если K — конечное поле, то $H=G$. Имеем

(4) $$H/H_1\cong(A\cap A_1)/F\subseteq A/F.$$

Покажем, что H/H_1 — счетная периодическая группа без элементов бесконечной высоты, а G/H группа без кручения, если K — поле алгебраических чисел и $G\neq H$. Пусть $a\in H$. Так как $\theta(a)\in A$, то для некоторого натурального n имеем $\theta^n(a)=1$, т. е. $\theta(a^n)=1$ и $a\in H_1$. Значит, H/H_1 — периодическая группа, а ввиду леммы 5 и (4), группа H/H_1 не содержит элементов бесконечной высоты.

Пусть $G\neq H$. Если $a\in G$ и $a^n\in H$, то $\theta^n(a)=\theta(a^n)\in A$, а значит, $a\in H$. Следовательно, G/H — группа без кручения. Если F — счетная группа, то группа A также счетна, а тогда счетны группы G/H и H/H_1, ибо H_1 содержит ядро отображения $\theta: G\to A$. Если же группа G/F счетна, то группы G/H и H/H_1 счетны, так как $F\subseteq H_1$. Мы докажем теперь, что G/H — свободная абелева группа (при $G\neq H$). В силу теоремы Штейна ([9], с. 114), имеет место прямое разложение: $G/H=S/H\times\widehat{G}/H$, где S/H — свободная группа, $\widehat{G}/H$ — группа, не содержащая свободных прямых множителей. Если $\widehat{G}/H\neq 1$, то $\theta(\widehat{G}/H)$ есть счетная подгруппа без кручения группы $M/A_1\cong M/F/A_1/F$. Ввиду следствия из леммы 5 получаем, что $\theta(\widehat{G}/H)$ — свободная абелева группа. Значит, G/H допускает ненулевой гомоморфизм на свободную группу, что противоречит определению этой группы. Следовательно, G/H — свободная группа. Пусть $\{g_i\}$ — представители смежных классов H_1 по F. Введем новую систему представителей смежных классов H_1 по F: $\widetilde{g}_i=g_i\theta(g_i^{-1})$. Тогда $\theta(\widetilde{g}_i)=\theta(g_i)\,\theta(g_i^{-1})=1$. Пусть $\widetilde{g}_i\widetilde{g}_j=\widetilde{g}_s f_{ij}$ $(f_{ij}\in F)$. Имеем $\theta(\widetilde{g}_i)\theta(\widetilde{g}_j)=\theta(\widetilde{g}_s)f_{ij}$, откуда $f_{ij}=1$. Следовательно, группа H_1 есть расщепляемое расширение группы $F: H_1=F\times\widetilde{H}$, $\widetilde{H}=\langle\widetilde{g}_i\rangle$. Так как H/H_1 — счетная периодическая группа без элементов бесконечной высоты, то имеет место прямое разложение этой группы $H/H_1=\langle a_1H\rangle\times\langle a_2H\rangle\times\cdots$ в прямое произведение примарных циклических групп. Пусть

(5) $$a_i^{q_i^{\gamma_i}}=\widetilde{h}_i f_i\quad(\widetilde{h}_i\in\widetilde{H},\ f_i\in F,\ q_i\text{ — простые}).$$

Тогда

(5′) $$\theta(a_i)^{q_i^{\gamma_i}}=f_i.$$

Пусть $\theta(a_i)=\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_r a_r$, $\lambda_i\in K$, $a_j\in F$. Обозначим через B подгруппу группы F, порожденную элементами $a_1,\ldots,a_r$ и f_i. Пусть $B=B_1\times\cdots\times B_s$ — разложение группы B в прямое произведение циклических групп, порядки которых соответственно равны $p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2},\ldots,p_s^{\alpha_s}$ $(p_1,p_2,\ldots,p_s$ — простые). Пусть $f_i=g_1\ldots g_s$, где $g_j\in B_j$ $(j=1,2,\ldots,s)$. Так как существует очевидным эпиморфизмом $KB \to KB_j$, тождественный на KB_j $(j=1, 2, \ldots, s)$, то ввиду (5′) для каждого j имеет место равенство $x_j^{q_i^{\gamma_i}} = g_j$, $x_j \in KB_j$. Обозначим через N натуральную константу, соответствующую полю K в силу леммы 1 и 1′. Если $p_j \neq q_i$, то $g_j = \bar{g}_j^{q_i^{\gamma_i}}$ $(\bar{g}_j \in F)$. Если $p_j = q_i$, но порядок элемента g_j превосходит N, то в силу леммы 1 и 1′ снова имеет место равенство $g_j = \bar{g}_j^{q_i^{\gamma_i}}$ $(\bar{g}_j \in F)$. Следовательно, замены $a_i \to \bar{a}_i = a_i \tilde{f}_i$, где $\tilde{f}_i$ — некоторый элемент группы F, преобразуют равенства (5) к виду

$$\bar{a}_i^{q_i^{\gamma_i}} = \tilde{h}_i \hat{f}_i, \tag{6}$$

где $\hat{f}_i$ — элемент порядка $q_i^{\beta} \leqq N$. Обозначим через $\hat{F}$ подгруппу группы F, порожденную всеми элементами $\hat{f}_i$ в (6). Ясно, что $\hat{F}$ — группа ограниченного показателя n. Рассмотрим подгруппу $\hat{G}$ группы G, порожденную элементами $\bar{a}_i$, подгруппой $\tilde{H}$ и подгруппой $\hat{F}$. Периодическая часть этой подгруппы совпадает с группой $\hat{F}$. Так как группа $\hat{F}$ имеет ограниченный показатель, то в силу известной теоремы ([5], с. 171), группа $\hat{G}$ является расщепляемым расширением группы $\hat{F}$: $\hat{G} = \hat{G}_1 \times \hat{F}$. Тогда группа H представляется в виде прямого произведения $H = F \times \hat{G}_1$. По доказанному, фактор-группа G/H свободна. Следовательно, $G = H \times B$ и $G = \hat{G}_1 \times B \times F$. Итак, G — расщепляемое расширение группы F. Теорема доказана.

Используя теорему 1′, докажем следующую более общую теорему.

Теорема 1. *Пусть G — абелева группа, F — периодическая часть G, F' — подгруппа элементов бесконечной высоты в F. Предположим, что по крайней мере одна из групп G/F и F счетна. Пусть K — конечное расширение поля рациональных чисел или конечное поле, характеристика которого не делит порядки элементов F. Пусть далее F имеет конечное число примарных компонент, если K — конечное поле.*

Групповая алгебра KG тогда и только тогда обладает расщепляемым групповым базисом G_1, когда группа G/F' есть расщепляемое расширение группы F/F'. В частности, если F не содержит элементов бесконечной высоты, то все групповые базисы алгебры KG одновременно расщепляемы или нерасщепляемы.

Доказательство. Пусть $\tilde{V}$ — идеал алгебры KF, порожденный элементами $f-1$, $f \in F'$, а V — идеал KG, порожденный $\tilde{V}$. Согласно следствию из леммы 9 и лемме 4, идеал V инвариантным образом определяется алгеброй KG и не зависит от выбора группового базиса G. Имеем: $KG/V \cong K(G/F')$. Если G_1 — второй групповой базис алгебры KG, то $KG/V \cong K(G/F') \cong K(G_1/F_1')$ (F_1' — подгруппа элементов бесконечной высоты в периодической части F_1 группы G_1). Следовательно, по теореме 1′, группы G/F' и G_1/F_1' одновременно расщепляемы или нерасщепляемы (периодическая часть группы G/F' есть F/F'). Если G_1 есть расщепляемое расширение F_1, то, очевидно, G_1/F_1' — расщепляемое расширение F_1/F_1' и, следовательно, G/F' — расщепляемое расширение F/F'. Наоборот, пусть G/F' — расщепляемое расширение F/F'. Тогда существует такая система представителей $\{g_i\}$ смежных классов G по F, что

(7) $$g_i g_j = g_s f_{ij},$$

где $f_{ij} \in F'$ (индекс s, конечно, зависит от индексов i и j). Рассмотрим подгруппу L мультипликативной группы алгебры KG, порожденную подгруппой H элементов бесконечной высоты в периодической части KF и элементами g_i. На оснонании леммы 8 H — полная группа. Так как периодическая часть группы L, ввиду (7), совпадает с группой H, то на основании известного критерия расщепляемости ([5], с. 171), группа L расщепляема: $L = H \times L_1$, где L_1 — группа без кручения (элементы L_1 имеют вид $g_i h_i$, где $h_i \in H$). Тогда $F \times L_1$ — расщепляемый групповой базис алгебры KG. Теорема доказана.

2. В этом параграфе роль будет играть сначала только характеристика поля K, в то время как в теореме 1 было существенно то, что поле K „достаточно мало“. Отметим следующее известное утверждение.

Лемма 10. *Пусть F — периодическая группа, а T — такая область целостности с единицей характеристики нуль, что все простые делители порядков элементов группы F в T не обратимы. Тогда все обратимые элементы конечного порядка в TF тривиальны (т. е. они имеют вид εg, где ε — обратимый элемент в T, а $g \in F$). Кольцо TF имеет только тривиальные идемпотенты:* 0 и 1 (см. [4] и [7]).

Лемма 11. *Пусть G — абелева группа, F — периодическая часть G, а T — область целостности с единицей характеристики нуль. Если все простые делители порядков элементов F в T не обратимы, то каждый обратимый элемент в TG имеет вид εg, где ε — обратимый элемент в TF, $g \in G$.*

Доказательство. Очевидно, можно предполагать, что G — конечнопорожденная группа. Тогда $G = F \times H$, где H — свободная абелева группа конечного ранга. Пусть K — поле отношений кольца T, а x — обратимый элемент в TG. Рессмотрим разложение алгебры KF в прямую сумму минимальных идеалов $KF = I_1 \dot{+} I_2 \dot{+} \cdots \dot{+} I_s$. Тогда

(8) $$x = \lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_s g_s,$$

где $\lambda_i \in I_i$, $\lambda_i \neq 0$, а $g_i \in H$ (см. доказательство леммы 9). Если $xy = 1$, то $y = \mu_1 g_{i_1} + \cdots + \mu_s g_{i_s}$ ($\mu_i \in I_i$, $\mu_i \neq 0$, $g_{i_j} \in H$). Имеем $xy = \lambda_1 \mu_1 g_1 g_{i_1} + \cdots + \lambda_s \mu_s g_s g_{i_s}$. Следовательно, $g_{i_j} = g_j^{-1}$ $(j = 1, \ldots, s)$ и

(9) $$y = \mu_1 g_1^{-1} + \cdots + \mu_s g_s^{-1}.$$

Вынесем за скобки в (8) и (9) совпадающие элементы g_i. Тогда (после перенумерации слагаемых) $x = \gamma_1 g_1 + \cdots + \gamma_t g_t$, $y = \delta_1 g_1^{-1} + \cdots + \delta_t g_t^{-1}$ ($\gamma_i, \delta_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, t$; $g_i \neq g_j$ при $i \neq j$), причем существует такое ортогональное разложение $KF = I_1 \dot{+} \cdots \dot{+} I_t$, что $\gamma_i, \delta_i \in I_i$ $(i = 1, \ldots, t)$. Следовательно, $1 = xy = \gamma_1 \delta_1 + \cdots + \gamma_t \delta_t$, где $\gamma_i, \delta_i \in TF$. Если $t > 1$, то это дает разложение единицы кольца TF в сумму нетривиальных идемпотентов, что противоречит лемме 10. Значит, $t = 1$ и $x = \gamma_1 g_1$, где γ_1 — обратимый элемент кольца TF. Лемма доказана.

В дальнейшем мы будем использовать задание счетной редуцированной абелевой p-группы H с помощью специальной системы образующих $\{u_{ij}\}$ и определяющих соотношений, использующихся в известном доказательстве теоремы Цыпина ([5], с. 161). Эту систему образующих и соотношений мы будем называть канонической. Пусть

(10) $$H=H_0\supset H_1\supset\cdots\supset H_\nu=0$$

ряд Ульма группы H (ν — порядковое число не более, чем счетной мощности).

Каноническая система образующих $\{u_{ij}\}$ удовлетворяет, в частности, следующим условиям:

1) индекс i пробегает все порядковые числа, предшествующие числу ν, и при $i\geqq\tau$ элементы u_{ij} порождают подгруппу H_τ ряда (10);

2) для каждого элемента u_{ij} выполняется соотношение $u_{ij}^{p^{\alpha_{ij}}}=u_{rs}\,(r>i)$ или $u_{ij}^{p^{\alpha_{ij}}}=1$, причем если $\nu=r+1$ — число первого рода, то $u_{rj}^{p^{\alpha_{rj}}}=1$;

3) если ν — число второго рода, то группа H есть прямое произведение $H=\prod_s\times H_s$, где тип каждой из подгрупп H_s меньше, чем ν, причем H_s задается канонической системой образующих, а каноническая система для H есть объединение таких систем для всех подгрупп H_s.

Пусть по-прежнему G — абелева группа, F — периодическая часть G, а K — произвольное поле. Пусть $\{g_i\}$ — фиксированная система представителей смежных классов G по F. Обозначим через V идеал алгебры KG, порожденный элементами $f-1$, где $f\in F$. Тогда $KG/V\cong K(G/F)$. Так как G/F — группа без кручения, то все обратимые элементы в KG/V имеют вид $\alpha g_i+V(\alpha\in K)$, $\alpha\neq 0$. Отсюда сразу вытекает, что каждый обратимый элемент z в KG имеет вид

(11) $$z=x_1g_1+x_2g_2+\cdots+x_sg_s,$$

где $x_i\in KF$ ($i=1,\ldots,s$), и при этом точно один из элементов x_i не лежит в V. Если, скажем, $x_1\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,V)$, то $x_1\equiv\alpha\,(\mathrm{mod}\,V)$, где $\alpha\in K$, $\alpha\neq 0$. Тогда $z\equiv\alpha g_1\,(\mathrm{mod}\,V)$.

Предположим теперь, что G' — второй групповой базис в KG, F' — периодическая часть G', $\{g_i'\}$ — представители смежных классов G' по F'. Ввиду (11) (после перенумерации элементов g_i), каждому элементу g_i' однозначно соответствует элемент g_i такой, что

(12) $$g_i'=x_ig_i+x_{j_1}g_{j_1}+\cdots+x_{j_r}g_{j_r},$$

где $x_i\notin V$ ($x_i\in KF$), а остальные элементы x_j принадлежат фундаментальному идеалу алгебры KF.

Лемма 12. *Построенное в соответствии с* (12) *отображение* $\theta:g_i'F'\to g_iF$ *является изоморфизмом* G/F *на* G'/F'.

Доказательство. Покажем, что для любого элемента $f'\in F'$ имеет место сравнение $f'\equiv\alpha_{f'}(\mathrm{mod}\,V)$, где $\alpha_{f'}\in K$. Действительно, предположим сначала, что характеристика поля K не делит порядки элементов группы F. Тогда алгебра KG не содержит нильпотентных элементов и, следовательно, характеристика K не делит также порядки элементов группы F_1. Значит, в силу следствия из леммы 9, $KF=KF'$. Так как каждый элемент $x\in KF$ удовлетворяет сравнению $x\equiv\alpha\,(\mathrm{mod}\,V)$, $\alpha\in K$, то, в частности, $f'\equiv\alpha_{f'}(\mathrm{mod}\,V)$, $\alpha_{f'}\in K$. Пусть K — поле характеристики p и F содержит нетривиальную силовскую p-подгруппу F_p, и пусть $F=F_p\times H$, $F'=F_p'\times H'$, где F_p' — силовская p-подгруппа группы F'. Обозначим через $V_1(V_1')$ идеал алгебры KG, порожденный элементами $f-1$ ($f'-1$), где $f\in F_p$ ($f'\in F_p'$). Тогда

$V_1 = V_1'$, ибо $V_1(V_1')$ есть нильрадикал алгебры KG. Следовательно, $f' \equiv 1 \pmod V$ для всех $f' \in F_p'$. Имеем $A = KG/V_1 \cong K(G/F_p) \cong K(G'/F_p')$. При этом периодическую часть базиса G/F_p алгебры A можно отождествить с элементами $h + V_1$ $(h \in H)$, а периодическую часть базиса G'/F' с элементами $h' + V_1$. Обозначим через $\widehat{V}$ идеал алгебры A, порожденный классами $(h-1) + V_1$ $(h \in H)$. Так как характеристика поля K не делит порядки элементов группы H, то по доказанному для каждого элемента $h' \in H'$ выполняется сравнение $h' + V_1 \equiv a_{h'} + V_1 \pmod{\widehat{V}}$, откуда получим, что $h' \equiv a_{h'} \pmod V$. Итак, для каждого элемента $f' \in F'$ выполняется сравнение $f' \equiv a_{f'} \pmod V$. Так как классы $(h' - a_{h'}) + V_1$ порождают идеал $\widehat{V}$, а $\widehat{V}$ есть образ V при естественном гомоморфизме $KG \to KG/V_1$, то элементы $f' - a_{f'}$ $(f' \in F)$ порождают идеал V. Значит, фактор-алгебру $B = KG/V$ можно рассматривать как групповую алгебру группы G/F и как скрещенную групповую алгебру группы G'/F' (системы факторов-элементов $a_{f'}$, $f' \in F'$). При этом элементы базиса G/F можно отождествить в B с классами $g_i + V$, а элементы G'/F' с классами $g_i' + V$. Так как скрещенная групповая алгебра абелевой группы без кручения над любым полем содержит только тривиальные обратимые элементы, то каждый класс $g_i + V$ записывается в виде $g_j' + V$. Отсюда и из (12) вытекает утверждение леммы.

Будем по-прежнему употреблять обозначения леммы 12. Если имеет место формула (12), то условимся употреблять запись $g_i' \sim x_i g_i$.

Лемма 13. *Пусть K — поле характеристики $p>0$, G и G' — два групповых базиса алгебры KG, а $F(F')$ — периодическая часть G (G'). Пусть g_1, g_2 и g — элементы G, не лежащие в F, и $g_2^{p^\alpha} = g_1 g f$ $(f \in F)$. Предположим, что $g_1', g_2', g' \in G'$, причем $g_1' \sim x_1 g_1$, $g_2' \sim x_2 g_2$, $g' = yg$, где $x_1, x_2, y \in KF$, в запись элемента x_1 входит элемент f_1, порядок которого взаимно прост с p, а y есть линейная комбинация элементов группы F, порядок каждого из которых взаимно прост с p. Пусть $(g_2')^{p^\alpha} = \lambda g_1' g' f'$ $(\lambda \in K, f' \in F)$. Тогда найдутся элементы f_2, входящий в запись элемента x_2, и такой элемент $\widehat{f} \in F$, порядок которого взаимно прост с p, что*

$$f_2^{p^\alpha} f = f' \widehat{f}. \tag{13}$$

Полагая $\widetilde{g}_2 = (f_2 f_1^{-1}) g_2$, где $f_1^{p^\alpha} = \widehat{f}$, получим, что $\widetilde{g}_2^{p^\alpha} = g_1 g f'$, причем $g_2' \sim \widetilde{x}_2 g_2$, где в запись $\widetilde{x}_2 \in KF$ входит элемент f_1, порядок которого взаимно прост с p.

Доказательство. Так как отображение $g \to g^{p^\alpha}$ является автоморфизмом абелевой группы без кручения, то $g_2'^{p^\alpha} \sim (x_2 g_2)^{p^\alpha} = x_2^{p^\alpha} g_2^{p^\alpha} = x_2^{p^\alpha} g_1 g f$. С другой стороны, $(g_2')^{p^\alpha} = \lambda g_1' g' f' \sim \lambda g_1 y g f' x_1$. Следовательно, $x_2^{p^\alpha} g_1 g f = \lambda g_1 g y f' x_1$, откуда

$$x_2^{p^\alpha} f = \lambda y f' x_1. \tag{14}$$

Представим элемент x_1 в виде $x_1 = x_1' + x_1''$, где x_1' — линейная комбинация тех элементов группы F, порядки которых взаимно просты с p, x_1'' — линейная комбинация элементов $f \in F$, порядки которых делятся на p. По условию $x_1' \neq 0$. Так как y — обратимый элемент в KF, то $yx_1' \neq 0$. Следовательно, в произведение yx_1 фактически входит элемент $\widehat{f} \in F$, порядок которого взаимно прост с p (в запись y входят только элементы f с порядками, не делящимися на p). В силу (14) для некоторого элемента $f_2 \in F$ имеем $f_2^{p^\alpha} f = \widehat{f} f'$. Так как порядок $\widehat{f}$ взаимно прост с p, то $\widehat{f} = f_1^{p^\alpha} (f_1 \in F)$ и, значит, $(f_2 f_1^{-1})^{p^\alpha} f = f'$. Положим теперь $\widetilde{g}_2 = (f_2 f_1^{-1}) g_2$. Тогда $(\widetilde{g}_2)^{p^\alpha} = (g_2 f_2 f_1^{-1})^{p^\alpha} = g_1 g f \times (f_2 f_1^{-1})^{p^\alpha} = g_1 g f'$. Далее $g_2' \sim x_2 g_2 = (f_2^{-1} f_1 x_2) \widetilde{g}_2$. Так как f_2 входит в запись x_2, то в запись $f_1 f_2^{-1} x_2$ входит элемент f_1, порядок которого взаимно прост с p. Лемма доказана.

Лемма 14. *Пусть K — поле характеристики p, группа G/F счетна и G' — второй групповой базис алгебры KG. Пусть $\{u_i\}$ ($\{u_i'\}$) — такие представители некоторых смежных классов G по F (G' по F'), что $\{u_i F\}$ ($\{u_i' F'\}$) — максимальная линейно-независимая система в G/F (G'/F'), и пусть $u_i' = x_i u_i$, $x_i \in KF$, где в запись x_i входят только элементы $f \in F$, порядки которых взаимно просты с p. Пусть далее $A = \langle F, u_1, u_2, \ldots \rangle$, $A' = \langle F', u_1', u_2', \ldots \rangle$* и *$S/A$ (S'/A') — силовские p-подгруппы групп G/A (G'/A'), а ν — ульмовский тип этих подгрупп. Предположим, что группы S/A и S'/A' задаются каноническими системами, образующих соответственно $\{u_{ij} A\}$ и $\{u_{ij}' A'\}$, причем канонические системы соотношений имеют вид*

$$u_{ij}^{p^\alpha} = u_{rs} u_1^{\delta_1} \ldots u_s^{\delta_s} f, \quad u'^{p^\alpha}_{ij} = u_{rs}' u_1'^{\delta_1} \ldots u_s'^{\delta_s} f' \quad (f, f' \in F). \tag{15}$$

Пусть

$$S_0/A \supset S_1/A \supset \cdots \supset S_\nu/A \ (S_0 = S,\ S_\nu = A),$$

$$S_0'/A' \supset S_1'/A' \supset \cdots \supset S_\nu'/A' \quad (S_0' = S',\ S_\nu' = A')$$

ряды Ульма групп S/A и S'/A', где

$$S_\tau = \langle A, u_{ij} \rangle \ (i \geq \tau), \quad S_\tau' = \langle A', u_{ij}' \rangle \ (i \geq \tau).$$

Предположим, что для $i \geq \tau$ в соотношениях (15) $f = f'$ и $u_{ij}' \sim x_{ij} u_{ij}$ (x_{ij} — обратимый элемент алгебры KF), причем в запись x_{ij} входит по крайней мере один элемент, порядок которого взаимно прост с p. Тогда существуют такие элементы $f_{ij} \in F$, что для элементов $\widetilde{u}_{ij} = u_{ij} f_{ij}$ выполняются соотношения $\widetilde{u}_{ij}^{p^\alpha} = \widetilde{u}_{rs} u_1^{\gamma_1} \ldots u_s^{\gamma_s} f'$ (для всех i).

Доказательство. Будем доказывать утверждения леммы индукцией по τ. Если $\tau = 0$, то лемма уже установлена. Предположим, что она доказана для $\tau < \gamma$, и докажем ее для $\tau = \gamma$. Как обычно при трансфинитной индукции, будем различать два случая:

1) $x = \mu + 1$ — число первого рода. Пусть $u_{\mu j}^{p^\alpha} = u_{rs} u_1^{\delta_1} \ldots u_s^{\delta_s} f$, $u'^{p^\alpha}_{\mu j} = u_{rs}' u_1'^{\delta_1} \ldots u_s'^{\delta_s} f'$. По индуктивному предположению $u_{rs}' \sim x_{rs} u_{rs}$, где в запись элемента $x_{rs} \in KF$ входит хотя бы один элемент $f \in F$, порядок которого взаимно прост с p, и $u_i' = x_i u_i$, где x_i есть линейная комбинация элементов $f \in F$,

порядки которых взаимно просты с p. Следовательно, для элементов $u_{\mu j}$, u_{rs}, $u'_{\mu j}$, u'_{rs}, $u_1^{\delta_1}\ldots u_s^{\delta_s}$, $u_1'^{\delta_1}\ldots u_s'^{\delta_s}$ выполняются условия леммы 13. По лемме 13 для некоторых элементов $f_{\mu j}\in F$ имеют место равенства $(u_{\mu j}f_{\mu j})^{p^\alpha}=u_{rs}u_1^{\delta_1}\ldots u_s^{\delta_s}f'$, причем $u'_{\mu j}\sim y_{\mu j}(u_{\mu j}f_{\mu j})$, где в запись $y_{\mu j}\in KF$ входит хотя бы один элемент $f\in F$, порядок которого взаимно прост с p. Таким образом, все условия леммы выполняются при $\tau=\gamma-1$ и, согласно предположению индукции, лемма доказана.

2) τ — предельное число. В этом случае группы S/S_τ и S'/S'_τ являются прямыми произведениями групп, тип ν которых меньше, чем τ. Для соответствующих прямых множителей групп S/S_τ и S'/S'_τ выполняются предположения индукции (см. свойство 3) канонической системы образующих, задающей счетную абелеву p-группу и лемму 12, а значит, утверждение леммы справедливо и для предельного τ. Лемма доказана.

Лемма 15. *Пусть G — абелева группа, F — периодическая часть G, $\{u_iF\}$ — максимальная линейно-независимая система в G/F, $A=\langle F, u_1, u_2,\ldots\rangle$ и $\{g_j\}$ — представители всех смежных классов G по A. Если порядок каждого элемента группы F взаимно прост с порядком любого элемента группы G/A, то существуют такие представители $g_jf_j\ (f_j\in F)$ смежных классов G по A, что имеет место прямое разложение $G=F\times H$, где подгруппа H порождается всеми элементами u_i и всеми элементами g_jf_j.*

Доказательство. Пусть B — свободная абелева группа, порожденная элементами u_i. Группа A разлагается в прямое произведение $A=B\times F$, а фактор-группа G/B периодична. В силу условий леммы группа $A/B\cong F$ есть произведение некоторых примарных компонент группы G/B. Значит, имеет место прямое разложение $G/B=A/B\times Q/B$, откуда $G=F\times Q$, где $Q=\langle B, g_jf_j\rangle$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть фактор-группа G/F счетна, K — поле характеристики p, а F — p-группа. Тогда все групповые базисы в KG одновременно расщепляемы или нет.*

Доказательство. Пусть алгебра KG обладает расщепляемым групповым базисом G', а F' — периодическая часть G'. Выберем произвольную максимальную независимую подсистему $u'_1F',\ldots,u'_nF',\ldots$ в G'/F'. Тогда, ввиду (12), $u'_i\sim x_iu_i$ (x_i — обратимый элемент в KF, $i=1,2,\ldots$), и в силу леммы 12, классы $u_1F, u_2F,\ldots$ образуют максимальную линейно-независимую подсистему в G/F. Для некоторой натуральной степени простого p $(u'_i-x_iu_i)^{p^\alpha}=0$, $x_i^{p^\alpha}=\lambda_i\in K$. Значит существуют такие натуральные числа $n_1, n_2,\ldots$, что $(u'_i)^{n_i}=\gamma_iu_i^{n_i}$ ($\gamma_i\in K$, $i=1,2,\ldots$). Так как классы $u_i^{n_i}F$ также образуют максимальную линейно-независимую подсистему в G/F, то не нарушая общности рассуждений, можно считать, что

$$u'_i=\lambda_iu_i\quad(i=1,2,\ldots). \tag{16}$$

Положим $A=\langle F, u_1, u_2,\ldots\rangle$, $A'=\langle F', u'_1, u'_2,\ldots\rangle$ и рассмотрим прямые разложения групп G/A и G'/A':

$$G/A=S_1/A\times Q/A,\quad G'/A'=S'_1/A'\times Q'/A', \tag{17}$$

где S_1/A (S'_1/A') — силовская p-подгруппа группы G/A (G'/A'). Обозначим через B свободную абелеву группу с базой $u_1, u_2,\ldots$ Зададим группы S_1/A

и S_1'/A' каноническими системами образующих соответственно $\{u_{ij}\}$ и $\{u'_{ij}\}$, связанными формулами (12). Тогда в силу (16) удовлетворяются условия леммы 14, а так как S_1' расщепляемое расширение группы F', то в соотношениях (15) для образующих u_{ij} все элементы f' равны единице. Следовательно, по лемме 14, существует прямое разложение $S_1 = F \times Q_1$, где $Q_1 \supset B$. (В этом рассуждении не использовано то, что F — p-группа.) Далее, в силу леммы 15 имеет место прямое разложение $Q = F \times H$, где $H \supset B$. Так как $Q_1 \cap H = B$, то $G = F \times Q_1 H$.

Теорема 3. *Пусть G — абелева группа, F — ее периодическая часть, фактор-группа G/F счетна и F имеет конечное число примарных компонент. Пусть K — конечное поле характеристики p, F_p — силовская p-подгруппа в F, $F = F_p \times H$ и $\widetilde{H}$ — подгруппа элементов бесконечной высоты в H. Алгебра KG тогда и только тогда обладает расщепляемым базисом, когда группа $G/\widetilde{H}$ есть расщепляемое расширение группы $F/\widetilde{H}$.*

Доказательство. Пусть $KG = KG'$. Будем употреблять обозначения доказательства теоремы 2. Предположим, что группа G' расщепляема, и покажем, что $G/\widetilde{H}$ есть расщепляемое расширение группы $F/\widetilde{H}$. Обозначим через V идеал алгебры KG, порожденный всеми элементами $f-1$, $f \in F_p$. Тогда идеал V не зависит от выбора группового базиса, так как V есть нильрадикал алгебры KG. Следовательно, $V = \{f'-1 / f' \in F_p'\}$ и

$$KG/V \cong K(G/F_p) \cong K(G'/F_p') \tag{18}$$

(F' — периодическая часть G', F_p' — силовская p-подгруппа F'). Так как по предположению G' есть расщепляемое расширение группы F', то G'/F_p' — расщепляемое расширение группы F'/F_p'. Подгруппа элементов бесконечной высоты в F/F_p есть $(\widetilde{H} \times F_p)/F_p$. В силу (18) и теоремы 2 группа $G/F_p/(\widetilde{H} \times F_p)/F_p \cong G/\widetilde{H} \times F_p$ является расщепляемым расширением группы $F/F_p/(\widetilde{H} \times F_p)/F_p \cong F/\widetilde{H} \times F_p$. Отсюда вытекает, что можно так выбрать систему представителей $\{g_i\}$ смежных классов G по F, что будут иметь место равенства

$$g_i g_j = g_k f_{ij} \quad (f_{ij} \in F_p \times \widetilde{H}). \tag{19}$$

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что среди элементов g_j содержатся фиксированные элементы $u_1, u_2, \ldots$, порождающие вместе с подгруппой F группу A (u_1F, $u_2F, \ldots$ — максимальная линейно-независимая система элементов в G/F). Запишем разложения (17) для групп G/A и G'/A': $G/A = S_p/A \times Q/A$, $G'/A' = S_p'/A' \times Q'/A'$, где S_p/A (S_p'/A') — силовская p-подгруппа группы G/A (G'/A'). Так как порядки элементов группы Q/A взаимно просты с p, то на основании леммы 15 группа Q/F_p есть расщепляемое расширение группы F/F_p:

$$Q/F_p = F/F_p \times \widetilde{Q}/F_p, \tag{20}$$

где группа $\widetilde{Q}$ содержит группу $\widetilde{B}$, порожденную классами $u_1F_p, u_2F_p, \ldots$ Ввиду (20), заменяя элементы $g_i \in Q$ элементами вида $g_i f_i$, $f_i \in F$, но не изменяя каждый из элементов u_i ($i = 1, 2, \ldots$), мы получим, что в соотношениях (19) для элементов $g_i \in Q$ факторы f_{ij} лежат в группе H'. Так как по условию группа S_p' расщепляемое расширение группы F', то, как установлено при доказательстве теоремы 2, имеет место прямое разложение

(21) $$S_p = F\times\widehat{S}\ (S\supset B=\langle u_1, u_2, \ldots\rangle).$$
В соответствии с (21) заменим элементы $g_i\in S_p$ соответствующими элементами группы $\widehat{S}$.

Мы показали, как выбрать новые системы представителей смежных классов по подгруппе F в группах S_p и Q. Каждая из этих систем содержит все элементы подгруппы B. Так как $Q\cap S_p=B$, то в силу (17) естественным образом строится система представителей $\{g_i\}$ смежных классов G по F, такая, что в соотношениях (19) $f_{ij}\in\widetilde{H}$. Это доказыват необходимость условия теоремы.

Установим достаточность теоремы. Пусть для представителей $\{g_i\}$ классов G по F выполняются соотношения (19), где $f_{ij}\in\widetilde{H}$. Образуем группу $\widehat{G}$, порожденную подгруппой H и всеми элементами g_i. Так как $f_{ij}\in\widetilde{H}$, то на основании теоремы 1 группа $\widehat{G}$ разложится в прямое произведение $\widehat{G}=H\times U$, откуда $G=F_p\times H\times U=F\times U$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть G — абелева группа, F — периодическая часть G, а T — такая область целостности с единицей характеристики нуль, что все простые делители порядков элементов F в T не обратимы. Если G/F — счетная группа и $TG\cong TG'$ (T — изоморфизм), то $G\cong G'$.*

Доказательство. Пусть $TG=TG'$ и $\{g_i\}(\{g_i'\})$ — представители всех смежных классов G по F (G' по F'). Согласно лемме 11, $g_i'=\varepsilon_i g_i$, где ε_i — обратимые в TF элементы. Выберем среди классов g_iF максимальную линейно-независимую подсистему $\{u_iF\}$. Тогда по лемме 12 классы $u_i'F'$ образуют максимальную линейно-независимую подсистему в G'/F'. Пусть $u_i'=\varepsilon_i u_i$ и $\varepsilon_i=\sum\limits_j\lambda_j f_j$, где элементы f_j принадлежат некоторой конечной подгруппе F_i группы F ($\lambda_j\in T$). Обозначим через n_i порядок группы F_i. Тогда $u_i'^{n_i}=\varepsilon_i^{n_i}u_i^{n_i}$. При этом, коэффициенты $\varepsilon_i^{n_i}=\sum\limits_j\beta_j f_j$ ($\beta_j\in T$) удовлетворяют следующему условию:

(*) для любого простого делителя p порядка произвольного элемента $f\in F$, $f\neq 1$, и любого простого идеала I кольца T, содержащего p, после Редукции коэффициентов β_j по $\operatorname{mod} I$ в запись $\varepsilon_i^{n_i}$ входят только элементы, порядки которых взаимно просты с p. Действительно, если простое p не делит $n_i=|F_i|$, то в запись $\varepsilon_i^{n_i}$ входят только элементы $f\in F_i$, порядки которых взаимно просты с p. Если же $n_i=p^\alpha q$ $(p, q)=1)$, то
$$\varepsilon_i^{n_i}=\left[\left(\sum_j\lambda_j f_j\right)^{p^\alpha}\right]^q\equiv\left(\sum_j\lambda_j^{p^\alpha}f_j^{p^\alpha}\right)^q(\operatorname{mod} I),$$
а порядки всех элементов $f_j^{p^\alpha}$ взаимно просты с p. Таким образом, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $u_i'=\varepsilon_i u_i$, где обратимые элементы $\varepsilon_i\in TF$ удовлетворяют условию (*). Положим $A=\langle F, u_1, u_2, \ldots\rangle$, $A'=\langle F', u_1', u_2', \ldots\rangle$. Пусть
$$G/A=G_{p_1}/A\times G_{p_2}/A\times\cdots,\quad G'/A'=G'_{p_1}/A'\times G'_{p_2}/A'\times\cdots$$
прямые разложения групп G/A и G'/A' в произведения примарных компонент, соответствующих простым $p_1, p_2, \ldots$ Фиксируем индекс i и рассмотрим два случая.

1) p_i не делит порядки элементов группы F. В этом случае S_{p_i} и S'_{p_i} — расщепляемые расширения соответственно групп F и F', причем расщепление G_{p_i} (G'_{p_i}) производится путем замен $c_i \to \bar{c}_i = c_i f_i$ $(c'_i \to \bar{c}'_i = c'_i f'_i)$, где $\{c_i\}$ $(\{c'_i\})$ — система представителей смежных классов группы G_{p_i} по A (группы G'_{p_i} по A') (см. лемму 15). Имеем

$$G_{p_i} = F \times \langle u_1, u_2, \ldots, \bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots \rangle, \tag{22}$$
$$G'_{p_i} = F' \times \langle u'_1, u'_2, \ldots, \bar{c}'_1, \bar{c}'_2, \ldots \rangle.$$

Так как по лемме 10 произвольный элемент $f' \in F'$ записывается в виде $f' = \lambda_f f$ ($f \in F$, λ_f — обратимый элемент в T), то в силу (22) существует изоморфизм $\varphi_i : G_{p_i} \to G'_{p_i}$, который задается отображениями $f \to f'$, $u_i \to u'_i$, $c_i \to \bar{c}'_i$.

2) p_i делит порядок некоторого элемента $f \in F$. Зададим группы G_{p_i} и G'_{p_i} с помощью канонической системы образующих и определяющих соотношений: $G_{p_i} = \langle A, u_{ij} \rangle$, $G'_{p_i} = \langle A', u'_{ij} \rangle$, $u'_{ij} = x_{ij} u_{ij}$ (x_{ij} — обратимый элемент в TF). Пусть I — максимальный идеал кольца T, содержащий элемент p. Если редуцировать соотношения между элементами u_{ij}, соотношения между элементами u'_{ij}, равенства $u'_{ij} = x_{ij} u_{ij}$, $u'_i = \varepsilon_i u_i$ и $f' = \lambda_f f$ по $\operatorname{mod} I$, то получим соотношения в групповой алгебре KG ($K = T/I$) над полем K характеристики p, удовлетворяющие условиям леммы 14 (при τ, равном ульмовскому типу группы G_{p_i}/A). Значит, согласно этой лемме, замены $u_{ij} \to u_{ij} f_{ij}$ ($f_{ij} \in F$) приводят канонические соотношения для G_{p_i}/A к виду

$$\bar{u}_{ij}^{p^\alpha} = \bar{u}_{rs} u_1^{\gamma_1} \ldots u_s^{\gamma_s} f, \tag{23}$$

причем

$$u'^{p^\alpha}_{ij} = \lambda_f u'_{rs} u'^{\gamma_1}_1 \ldots u'^{\gamma_s}_s f \quad (\lambda_f \in T), \tag{24}$$

где в (23) и (24) участвуют одни и те же элементы $f \in F$. Следовательно, существует изоморфизм $\varphi_i : G_{p_i} \to G'_{p_i}$, который задается отображениями: $f \to f'$, $u_i \to u'_i$, $u_{ij} \to u'_{ij}$. Для всех i изоморфизмы φ_i индуцируют один и тот же изоморфизм A на A': $f \to f'$, $u_i \to u'_i$. Следовательно, эти изоморфизмы очевидным образом порождают изоморфизм G на G'. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Д. Берман. Групповые алгебры счетных абелевых p-групп. *Publ. Math. Debrecen* **14**, 1967, 365—405.
2. С. Д. Берман, Т. Ж. Моллов. О групповых кольцах смешанных абелевых групп. *Доклады БАН*, 28, 1975, 879—881.
3. С. Д. Берман, А. Р. Росса. О групповых алгебрах счетных периодических абелевых групп. *Доклады АН УССР*, серия А, 1971, 387—390.
4. D. B. Coleman. Idempotents in group ring. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **17**, 1966, 962.
5. А. Г. Курош. Теория групп. Москва, 1967, с. 648.
6. W. May. Commutative group algebras. *Tr. Amer. Math. Soc.*, **136**, 1969, 139—150.
7. А. И. Саксонов. О групповых кольцах конечных групп. I, *Publ. Math. Debrecen*, **18**, 1971, 187—209.
8. Современные проблемы математики, т. 2, Москва, 1973, с. 257.
9. Л. Фукс. Бесконечные абелевы группы. Москва, 1974, с. 353.

Харьковский институт радиоэлектроники, Харьков
Пловдивский университет, 4000 Пловдив

Поступила 29. 12. 1975