PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

РАДИКАЛЬНЫЕ ЗАМЫКАНИЯ ПРАВЫХ ИДЕАЛОВ В АЛЬТЕРНАТИВНЫХ КОЛЬЦАХ

ПЕТЪР В. ИВАНОВ

Настоящая статья посвящена введенному В. А. Андрунакиевичем и Ю. М. Рябухиным [1] понятию — радикальное замыкание правых идеалов, являющееся обобщением понятия радикала. Она составлена из двух частей. В первой части намечены те результаты, относящиеся к радикальным замыканиям правых идеалов в ассоциативном кольце, которые можно перевести в произвольное альтернативное кольцо. Получено полное описание двойственных наднильпотентных радикальных замыканий. Во второй части построены в решетке правых идеалов альтернативного кольца радикальные замыкания k и δ, являющиеся аналогами радикала Смайли — Клейнфелда. Доказано совпадение этих радикальных замыканий.

1. Предварительные замечания. Пусть R — кольцо (существование единицы не предполагается), $\mathfrak{P}(R)$ — решетка всех правых идеалов кольца R, $\mathfrak{A}(R)$ — класс всех пар (A, B), где $A, B \in \mathfrak{P}(R)$ и $A \supseteq B$. Если $A \supseteq C \supseteq B$ — правые идеалы кольца k, назовем пару (A, C) фактор-парой, а (C, B) — подпарой пары (A, B). Пару (A, B) назовем нулевой, если $A = B$. В дальнейшем под термином „класс пары" будем понимать любое подмножество множества $\mathfrak{A}(R)$, содержащее все нулевые пары.

Отображение ζ: $\mathfrak{A}(R) \to \mathfrak{P}(R)$ назовем радикальным замыканием в решетке $\mathfrak{P}(R)$, если выполнены условия:

(I) $A \supseteq \zeta(A, B) \supseteq B$, для любой пары (A, B);

(II) $\zeta(A, \zeta(A, B)) = \zeta(A, B) = \zeta(\zeta(A, B), B)$ для любой пары (A, B);

(III) $\zeta(C, B) \subseteq \zeta(A, B) \subseteq \zeta(A, C)$ для любых правых идеалов $A \supseteq C \supseteq B$ кольца R.

Пару (A, B) назовем ζ-радикальной (ζ-полупростой), если $\zeta(A, B) = A$ ($\zeta(A, B) = B$).

Вводим частичный порядок для радикальных замыканий следующим образом: если ζ и η суть радикальные замыкания, то $\zeta \leqq \eta$, если для любой пары (A, B) выполнено $\zeta(A, B) \subseteq \eta(A, B)$.

Определим для любого радикального замыкания ζ дополнительное к нему радикальное замыкание ζ^*, как наибольшим радикальным замыканием η (если существует) со свойством:

$\zeta(A, B) \cap \eta(A, B) = B$ для любой пары (A, B). Аналогичным образом определяется $\zeta^{**} = (\zeta^*)^*$ и т. д. Если ζ^{**} существует и $\zeta^{**} = \zeta$, радикальное замыкание ζ назовем двойственным.

Радикальное замыкание ζ назовем наследственным, если оно удовлетворяет следующим двум эквивалентным условиям:

(IV) Любая подпара ζ-радикальной пары сама ζ-радикальна;

(V) $\zeta(C, B) = C \cap \zeta(A, B)$ для любой пары (A, B) и любой ее подпары (C, B).

ПЛИСКА Български математически студии. Том 2, 1981, с. 69—76.

Дополнительные радикальные замыкания к наследственному радикальному замыканию описываются при помощи понятия „неразложимая пара“. Это пара (A, B), для которой пересечение H всех правых идеалов кольца R, строго содержащих B и содержащиеся в A, строго содержит B. Пару (H, B) назовем сердцевиной пары (A, B).

Пару (A, B) назовем простой, если между A и B нет правых идеалов кольца R.

Как известно, кольцо S называется альтернативным, если удовлетворяет следующим эквивалентным условиям:

(1) Любое подкольцо кольца S, порожденное двумя элементами — ассоциативное;

(2) Кольцо S удовлетворяет тождествам: $(x, x, y)=0$ и $(x, y, y)=0$, где через (x, y, z) обозначен ассоциатор $(xy)z-x(yz)$ элементов x, y и z.

Пусть теперь R — альтернативное кольцо, а Q — правый идеал кольца R. Обозначим через Q^n аддитивную подгруппу кольца R, порожденную всеми произведениями $q_1q_2\ldots q_n$ из $n\geq 2$ элементов множества Q при произвольном, но фиксированном способе расстановки скобок. Отметим, что при $n>2$ Q^n не является однозначно определенной подгруппой кольца R. Тоже Q^n не обязана быть правым идеалом кольца R.

Определение 1. *Пару (A, B) назовем нильпотентной, если некоторая $A^n\subseteq B$. Наследственное радикальное замыкание ζ назовем наднильпотентным, если все нильпотентные пары ζ-радикальные.*

Определение 2. *Пару (A, B) назовем наследственно идемпотентной, если для любого правого идеала T кольца R из $T\subseteq A$ следует, что $T\subseteq B+T^2$. Наследственное радикальное замыкание ζ назовем подидемпотентным, если все ζ-радикальные пары — наследственно идемпотентны.*

2. Специальные радикальные замыкания. В этой части R будет произвольное альтернативное кольцо. Отметим, что в альтернативном кольце ассоциатор (x, y, z) является кососимметрической по своим трем аргументам функцией. Этим мы будем постоянно пользоваться. Будем обозначать через $(x_1;\ x_2;\ x_3;\ \ldots;\ x_n)$ произведение $(\ldots(x_1, x_2)x_3\ldots)x_n$ элементов $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ кольца R. Тогда главный правый идеал $|x)$ кольца R, порожденный элементом x, совпадает с множеством: $xZ+\{\Sigma(x;\ r_1;\ \ldots;\ r_n)\mid n\geqq 1$ и $r_1, \ldots, r_n\in R\}$, где через Z обозначено кольцо целых чисел.

Лемма 1. *Пусть $x\in R$, I — идеал, Q — правый идеал кольца R. Тогда из $xI\subseteq Q$ следует, что $|x)I\subseteq Q$.*

Пользуясь сделанным замечанием относно ассоциатора в альтернативном кольце, индуктивно доказываем, что $(x;\ r_1;\ \ldots;\ r_n)I\subseteq Q$, откуда следует, что $|x)I\subseteq Q$.

Для любой пары (A, B) обозначим через $I(B\colon A)$ сумму всех идеалов кольца R, содержащихся в множестве: $(B\colon A)=\{x\in R\mid Ax\subseteq B\}$.

Определение 3. *Ненулевую пару (A, B) назовем первичной, если удовлетворяет условию:*

(IV) *Из $CD\subseteq B$ следует, что $C\subseteq B$ или $D\subseteq B$ для любых правых идеалов C, D кольца R, содержащихся в A.*

Лемма 2. *Пара (A, B) — первичная тогда и только тогда, когда удовлетворяет условию:*

(VII) AR не $\subseteq B$;

(VIII) *Для любого элемента* $x \in A$ *и любого двустороннего идеала* I *кольца* R *из включения* $xI \subseteq B$ *следует, что* $x \in B$ *или* $I \subseteq I(B: A)$;

(IX) $A \cap I(B: A) \subseteq B$.

Доказательство. Пусть пара (A, B) удовлетворяет вышеуказанным условиям. Из (VII) сразу вытекает, что $A \neq B$. Пусть C и D — правые идеалы кольца R, содержащиеся в A, и $CD \subseteq B$. Допустим, что C не $\subseteq B$. Тог а $B+C$ строго содержит B. Выберем элемент $x \in (B+C) \setminus B$. Ясно, что $x \in A$дB. Рассмотрим двусторонний идеал $D+RD$ кольца R, порожденный правым идеалом D. Заметим, что $(C, D, R) \subseteq B$. В таком случае $x(D+RD) \subseteq (B+C)(D+RD) \subseteq B+CD \subseteq B$, откуда ввиду условия (VIII) $D \subseteq I(B: A)$. Тогда $D \subseteq A \cap I(B: A) \subseteq B$.

Пусть D не $\subseteq B$. Если допустим, что C не $\subseteq B$, то, как уже показали, $D \subseteq B$ — противоречие.

Обратное следствие тривиально получается.

Лемма 3. *Пусть пара* (A, B) — *первичная, а* T — *правый идеал кольца* R. *Тогда:*

(а) $I(B: A)$ — *первичный идеал кольца* R;

(б) *Пара* $(A \cap T, B \cap T)$ *является нулевой или первичной;*

(в) *Если пара* $(A \cap T, B \cap T)$ *является ненулевой, то* $I(B \cap T: A \cap T) \subseteq I(B: A)$.

Доказательство. Пусть K и L — идеалы кольца R и $KL \subseteq I(B: A)$. Заметим, что $(A, K, L) \subseteq A \cap KL \subseteq B$. В таком случае $AK . L \subseteq A . KL + (A, K, L) \subseteq B$. Ввиду условия (VIII), $K \subseteq I(B: A)$ или $L \subseteq I(B: A)$.

(б) вытекает из определения первичной пары.

Пусть $B \cap T$ строго содержится в $A \cap T$. Ясно, что $I(B: A) \subseteq I(B \cap T: A \cap T)$. Пусть $x \in (A \cap T) \setminus (B \cap T)$. В таком случае $x \in A \setminus B$. Тогда из включения $x . I(B \cap T: A \cap T) \subseteq (A \cap T) . I(B \cap T: A \cap T) \subseteq B$ вытекает, что $I(B \cap T: A \cap T) \subseteq I(B: A)$. Лемма доказана.

Пусть (A, B) — первичная пара. Выбирая максимальный элемент Q в фамилию $\{Q$ — правый идеал кольца $R \mid I(B: A)+B \subseteq Q$ и $Q \cap (A \setminus B) = \varnothing\}$ получаем, что для любой первичной пары (A, B) существует первичная пара (R, Q), такая, что $(A, B) = (R \cap A, Q \cap A)$.

Определение 4. *Класс пары* $\mathcal{E}$ *назовем специальным, если выполнены условия:*

(X) *Если* $(A, B) \in \mathcal{E}$, *то* (A, B) *является первичной парой;*

(XI) *Если* $(A, B) \in \mathcal{E}$, *а* T — *правый идеал кольца* R, *то* $(A \cap T, B \cap T) \in \mathcal{E}$;

(XII) *Если ненулевая подпара* (C, B) *пары* (A, B) *принадлежит классу* $\mathcal{E}$, *то существует правый идеал* T *кольца* R *такой, что* $A \supseteq T \supseteq B$, C *не* $\subseteq T$ *и* $(A, T) \in \mathcal{E}$.

Из условия (XI) и (XII) вытекает [3], что каждый специальный класс $\mathcal{E}$ определяет наследственное радикальное замыкание ζ следующим образом: для любой пары (A, B),

$$\zeta(A, B) = \cap \{T \text{ — правый идеал кольца } R \mid A \supseteq T \supseteq B \text{ и } (A, T) \in \mathcal{E}\}.$$

Радикальное замыкание ζ назовем специальным радикальным замыканием, порожденным классом $\mathcal{E}$.

Пусть Q — правый идеал альтернативного кольца R. Будем обозначать через $I(Q)$ наибольший идеал кольца R, содержащийся в Q. Для любого правого идеала Q алтернативного кольца R, $(Q, Q, R) \subseteq I(Q)$ [7].

Лемма 4. *Каждое специальное радикальное замыкание является наднильпотентным.*

Доказательство. Пусть ζ — специальное радикальное замыкание, порожденное классом $\mathcal{E}$, а (A, B) — нильпотентная пара. Допустим, что $\zeta(A, B) \neq A$. В таком случае существует ненулевая фактор-пара $(A, T) \in \mathcal{E}$. С одной стороны, (A, T) — первичная пара, а с другой — некоторая $A^n \subseteq T$. Пусть $I = I(A)$. Отметим, что I^n — идеал кольца R. Тогда $I^n \subseteq I(T) \subseteq I(T: A)$. Ввиду леммы 3, $I(T: A)$ — первичный идеал кольца R и в таком случае $I \subseteq I(T: A)$, откуда получаем, что $(A, A, R) \subseteq T$. Теперь отметим, что множество $I + A^m$ является правым идеалом кольца R и однозначно определено для любого натурального числа $m \geq 1$. Тогда ввиду первичности пары (A, T) из включения $(I + A^{n-1})A \subseteq T$ вытекает, что $A \subseteq T$ — противоречие. Это доказывает лемму.

Лемма 5. *Пусть T — правый идеал кольца R, а пара (A, B) удовлетворяет условию:*

(XIII) *Из $T \subseteq A$ и $B + T^2$ — правый идеал кольца R, следует, что $T \subseteq B + T^2$,*

то пара (A, B) является наследственно идемпотентной.

Доказательство. Пусть правый идеал T кольца R содержится в A. Обозначим $I(T)$ через I. Тогда $B + I^2$ — правый идеал кольца R и поскольку $I \subseteq A$, то $I \subseteq B + I^2$. В таком случае $(T, T, R) \subseteq B + T^2$. Отсюда следует, что $B + T^2$ является правым идеалом кольца R. Тогда ввиду условия (XIII), $T \subseteq B + T^2$. Лемма доказана.

Если $\mathfrak{M}$ — класс пары, обозначим класс $\{(A \cap T, B \cap T) \mid T$ — правый идеал кольца $R, (A, B) \in \mathfrak{M}\}$ через $\mathfrak{M}^0$, а через $\mathfrak{N}(R)$ — класс всех неразложимых пар вида (R, Q).

Теорема 1. *Пусть ζ — наднильпотентное радикальное замыкание, $\mathfrak{M}$ — класс всех неразложимых пар вида (R, Q) с ζ-радикальной сердцевиной, а $\overline{\mathfrak{M}}$ — дополнение класса $\mathfrak{M}$ в классе $\mathfrak{N}(R)$. Тогда:*

(а) *ζ^* является двойственным подидемпотентным радикальным замыканием. Для любой пары (A, B) $\zeta^*(A, B) = \cap\{T$ — правый идеал кольца $R \mid A \supseteq T \supseteq B$ и $(A, T) \in \mathfrak{M}^0\}$;*

(б) *ζ^{**} является двойственным специальным радикальным замыканием, порожденным классом $\overline{\mathfrak{M}}^0$.*

Ввиду доказанных лемм, эта теорема доказывается таким же способом, как и в ассоциативном случае.

Следствие 1. *Каждое двойственное наднильпотентное радикальное замыкание ζ является специальным, порожденным классом $\mathfrak{M}^0$, где $\mathfrak{M}$ — класс всех неразложимых пар вида (R, Q) с ζ-полупростой сердцевиной.*

Следствие 2 (теоремы двойственности).

(1) *Пусть дано разбиение класса $\mathfrak{N}(R)$ непересекающимися классами $\mathfrak{M}$ и $\overline{\mathfrak{M}}$, первый из которых является классом неразложимых пар вида (R, Q) с наследственно идемпотентной сердцевиной. Тогда существует двойственное специальное радикальное замыкание $\varrho_{\overline{\mathfrak{M}}}$, порожденное классом $\mathfrak{M}^0$, и двойственное подидемпотентное радикальное замыкание $\varrho_{\mathfrak{M}}$, порожденное классом $\overline{\mathfrak{M}}^0$. $\varrho^*_{\mathfrak{M}} = \varrho_{\overline{\mathfrak{M}}}$ и $\varrho^*_{\overline{\mathfrak{M}}} = \varrho_{\mathfrak{M}}$.*

(2) *Любое двойственное наднильпотентное и любое двойственное подидемпотентное радикальное замыкание получается описанным путем, т. е. разбиением класса $\mathfrak{N}(R)$.*

3. Радикальные замыкания Клейнфельда и Смайли. В этой части R тоже будет произвольное альтернативное кольцо (существование единицы не предположено). Напомним, что правый идеал T кольца R называется квазирегулярным, если для каждого элемента $t \in T$ существует элемент $t' \in T$, такой, что $t+t'-tt'=0$, и называется модулярным, если существует такой элемент $g \in R$, что $gx-x \in T$ для любого $x \in R$. В работе Жевлакова [5] показано, что наибольший квазирегулярный идеал $S(R)$ кольца R (называемым радикалом Смайли [7]) и пересечение всех максимальных правых модулярных иделов $K(R)$ кольца R (называемым радикалом Клейнфельда [6]) совпадают. $S(R)=K(R)$ будем называть радикалом Смайли — Клейнфельда кольца R и будем обозначать через $\delta(R)$.

Определение 4. *Пару* (A, B) *назовем модулярной, если существует элемент* $g \in A$ *такой, что* $yx-x \in B$ *для любого* $x \in A$, *и назовем примитивной, если она простая и модулярная. Элемент* g *назовем единицей пары* (A, B).

Лемма 6. *Пусть* (A, B) — *примитивная пара, а* T — *правый идеал кольца* R. *Тогда* (A, B) *является первичной парой, а пара* $(A \cap T, B \cap T)$ — *примитивной или нулевой.*

Нам нужно установить некоторую связь между правыми идеалами и неассоциативностью данного альтернативного кольца.

Обозначим через $[x, y]$ коммутатор $xy-yx$ элементов x и y.

Предложение 1. *Пусть* S — *первичное альтернативное неассоциативное кольцо, а* T — *правый идеал кольца* S. *Тогда из* $(T, T, S)=0$ *следует, что* $T=0$.

Доказательство. Как известно [6], ассоциативный центр $N(S) =\{x \in S \mid (x, S, S)=0\}$ и центр $Z(S)=\{x \in S \mid (x, S, S)=[x, S]=0\}$ первичного альтернативного неассоциативного кольца S совпадают. Будем пользоваться функцией $f(x, y, z, t)$, определенной в S равенством: $(xy, z, t)=f(x, y, z, t) +(y, z, t)x+y(x, z, t)$. Функция f является кососимметрической по четырем аргументам [2].

(а) Сначала покажем, что $T^2 \subseteq Z(S)$. Действительно, из $(T, T, S)=0$ получаем $f(S, S, T, T)=(S^2, T, T)+(S, T, T)S+S(S, T, T)=0$. Тогда $(T, S, S)T =(S, T, S)T=(TS, T, S)+f(T, S, T, S)+S(T, T, S)=0$, т. е. $(T, S, S)T=0$. В [6] показано, что в первичном альтернативном неассоциативном кольце S из $(x, y, S)=0$ следует, что $[x, y]=0$. В таком случае из $(T, T, S)=0$ получаем $[T, T]=0$. Отметим, что $(T, S, S) \subseteq T$. Тогда $[T, (T, S, S)]=0$, откуда получаем, что $T(T, S, S)=(T, S, S)T=0$. В таком случае $(T^2, S, S)=f(T, T, S, S) +(T, S, S)T+T(T, S, S)=0$. Это показывает, что $T^2 \subseteq N(S)$ и, следовательно, $T^2 \subseteq Z(S)$.

(б) Теперь покажем, что $T^2=0$, откуда ввиду первичности кольца S получим, что $T=0$. Пусть $x \in T^2$. Так как $(T, T, S)=0$, то T^2 — правый идеал кольца S. Тогда $x, xS \subseteq T^2 \subseteq Z(S)$ и, следовательно, $x(S, S, S)=0$. Из первичности кольца S вытекает, что элементы центра $Z(S)$ не являются делителями нуля кольца S. Так как $(S, S, S) \neq 0$, то $x=0$ и, следовательно, $T^2=0$. Предложение доказано.

Предложение 2. *Пусть* (A, B) — *примитивная пара. Тогда существует примитивная пара* (R, Q), *такая, что* $(A, B)=(R \cap A, Q \cap A)$.

Доказательство. Построим максимальный правый модулярный идеал Q кольца R, такой, что $B \subseteq Q$ и A не $\subseteq Q$. Тогда $B \subseteq Q \cap A$ и A строго содержит $Q \cap A$, откуда получаем $B=Q \cap A$. Для этой цели рассмотрим два случая: $I(A)$ не $\subseteq B$ и $I(A) \subseteq B$. Пусть $I=I(A)$.

(а) I не $\subseteq B$. В таком случае $B+I=A$. Это дает нам возможность выбрать единицу пары (A, B) из идеала I. Пусть $i \in I$ и для любого $x \in A$, $ix-x \in B$. Рассмотрим множество: $\mathfrak{M}=\{\Sigma[(i; r_1; \ldots; r_n)-(r_1; \ldots; r_n)] \mid n \geq 1, r_1, \ldots, r_n \in R\}$. Ясно, что $\mathfrak{M}$ является правым модулярным идеалом кольца R с единицей i. Покажем, что $\mathfrak{M}I \subseteq B$. Индуктивно: пусть $x \in I$, а $r \in R$. Тогда $(ir-r)x =(ir)x-rx=(i(rx)-rx)+(i, r, x) \in B-(i, x, r)=B-(ix)r+i(xr)=B+(i(xr)-xr) -(ix-x)r \subseteq B$, так как rx, x и xr принадлежат I. Предположим теперь, что $n>1$ и для натуральных чисел $k<n$, $[(i; r_1; \ldots; r_k)-(r_1; \ldots; r_k)]I \subseteq B$. Отметим, что $(i; r_1; \ldots; r_n)-(r_1; \ldots; r_n)=yr_n$, где $y=(i; r_1; \ldots; r_{n-1})-(r_1; \ldots; r_{n-1})$. Пусть $x \in I$. Тогда $[(i; r_1; \ldots; r_n)-(r_1; \ldots; r_n)]x=y(r_nx)+(y, r_n, x) \in yI-(yx)r_n+y(xr_n) \subseteq B-(yI)r_n+y(Ir_n) \subseteq B$, так как ввиду предположения $yI \subseteq B$. Этим индукция окончена.

Рассмотрим теперь правый модулярный (с единицей i) идеал $B+\mathfrak{M}$ кольца R. Если $i \in B+\mathfrak{M}$, то $i^2 \in (B+\mathfrak{M})I \subseteq B$, откуда следует, что $i \in B$ — противоречие. Следовательно, $i \notin B+\mathfrak{M}$ и таким образом $B+\mathfrak{M}$ является собственным правым модулярным идеалом кольца R. Рассматривая фамилию $\{Q \in \mathfrak{P}(R) \mid B+\mathfrak{M} \subseteq Q$ и $i \notin Q\}$ при помощи леммы Цорна, можно вложить правый идеал $B+\mathfrak{M}$ в максимальный правый модулярный идеал Q кольца R. Тогда $B \subseteq Q$, а A не $\subseteq Q$, так как $i \in A$ и $i \notin Q$.

(б) $I \subseteq B$. Пусть g — единица пары (A, B). В этом случае покажем, что $(g, R, R) \subseteq B$. Из включения $I \subseteq B$ вытекает $I \subseteq I(B: A)$. Ввиду леммы 6 и леммы 3, $I(B: A)$ является первичным идеалом кольца R. Допустим, что $R/I(B: A)$ — неассоциативное кольцо, и рассмотрим правый идеал $(A+I(B: A))/I(B: A)$. Так как $(A, A, R) \subseteq I(B: A)$, то $(A+I(B: A), A+I(B: A), R) \subseteq I(B: A)$, откуда ввиду предложения 1, $A \subseteq I(B: A)$. В таком случае $A \subseteq A \cap I(B: A) \subseteq B$ — противоречие. Следовательно, кольцо $R/I(B: A)$ является ассоциативным. Тогда $(g, R, R) \subseteq A \cap I(B: A) \subseteq B$. Рассмотрим теперь множество $\mathfrak{M}=\{gr-r \mid r \in R\}+B$. Так как $(g, R, R) \subseteq B$, $\mathfrak{M}$ является модулярным правым идеалом кольца R (с единицей g). Если допустим, что $g \in B+\mathfrak{M}$, то тогда g имеет представление $g=b+(gr-r)$, где $b \in B$, $r \in R$. В таком случае $r=(gr-g)-b \in A$ и, следовательно, $gr-r \in B$. Но тогда $g \in B$, т. е. противоречие. Следовательно, $g \notin \mathfrak{M}$ и таким образом $\mathfrak{M}$ является собственным модулярным идеалом кольца R. Можно вложить $\mathfrak{M}$ в максимальный правый модулярный идеал Q кольца R, такой, что $B \subseteq Q$ и A не $\subseteq Q$. Этим доказательство окончено.

Для каждой пары (A, B) обозначим через $\delta(A, B)$ пересечение $\cap\{T \in \mathfrak{P}(R) \mid (A, T)$ — примитивная фактор-пара пары $(A, B)\}$. Отображение $\delta\colon \mathfrak{A}(R) \to \mathfrak{P}(R)$ назовем радикальным замыканием Клейнфельда.

Теорема 2. *Радикальное замыкание Клейнфельда является двойственным специальным, порожденным классом $\mathfrak{S}$ — класс всех примитивных пар.*

Доказательство. Рассмотрим класс $\mathfrak{M}$ — всех примитивных пар вида (R, Q). Ввиду леммы 6, $\mathfrak{M}$ является классом первичных пар. Поскольку $\mathfrak{M}$ является классом неразложимых пар с наследственно идемпотентной сердцевиной, то по следствию 2 теоремы 1 класс $\mathfrak{M}^0$ определяет двойственное специальное радикальное замыкание $\varrho_{\mathfrak{M}}$. Ввиду предложения 2, $\mathfrak{M}^0=\mathfrak{S}$, т. е. $\varrho_{\mathfrak{M}}=\delta$. Теорема доказана.

В качестве следствия из предложения 2 получим описание примитивных пар. Припомним, что альтернативное кольцо S называется примитивным если существует максимальный правый модулярный идеал Q кольца S, такой, что $I(Q)=0$. В [6] доказано, что любое примитивное альтернативное кольцо S является либо ассоциативным примитивным, либо алгеброй Кели — Диксона над своим центром $Z(S)$. Подробнее см. [5].

Предложение 3. *Пусть (A, B) — примитивная пара. Тогда либо $R/I(B: A)$ является примитивным ассоциативным кольцом, либо B — идеал кольца A (как подкольцо) и A/B является алгеброй Кели — Диксона.*

Доказательство. Пусть $(A, B)=(R\cap A, Q\cap A)$, где (R, Q) — примитивная пара. Так как пара (R, Q) является первичной, то $I(B: A)=I(Q: R)=I(Q)$. В таком случае $R/I(B: A)$ — либо ассоциативное примитивное кольцо, либо алгебра Кели — Диксона. Во втором случае $Q=I(B: A)$ и, следовательно, $B=Q\cap A$ является идеалом кольца A. Из канонического изоморфизма $A/B=A/(Q\cap A)\cong(A+Q)/Q=R/Q$ вытекает, что A/B является алгеброй Кели — Диксона. Предложение доказано.

Теперь построим радикальное замыкание, исходя из свойства квазирегулярности.

Определение 5. *Назовем пару (A, B) квазирегулярной, если для любого $x\in A$ существует $y\in A$, такой, что $x+y-xy\in B$.*

Рассмотрим класс K — всех квазирегулярных пар. Для каждой пары (A, B) строим возрастающую цепь правых идеалов кольца R: $B=K_0(A, B)\subseteq K_1(A, B)\subseteq\cdots\subseteq K_\alpha(A, B)\subseteq\cdots$, где α — порядковые числа, следующим образом: если $\alpha-1$ существует, то $K_\alpha(A, B)=\Sigma\{T\in\mathfrak{P}(R)\mid A\supseteq T\supseteq K_{\alpha-1}(A, B)$ и $(T, K_{\alpha-1}(A, B))\in K\}$, а если α является предельным числом, то $K_\alpha(A, B)=U\{K_\beta(A, B)\mid\beta<\alpha\}$. Наконец определяем $k(A, B)=\cup\{K_\alpha(A, B)\mid\alpha\geq 0\}$. Построенное указанным способом отображение $k: \mathfrak{A}(R)\to\mathfrak{P}(R)$ является радикальным замыканием. Это радикальное замыкание назовем радикальным замыканием Смайли. Из построения k следует, что пара (A, B) является k-полупростой тогда и только тогда, когда она не содержит ненулевых квазирегулярных подпар.

Лемма 7. *Пусть (P, B) — квазирегулярная подпара, (A, Q) — примитивная фактор-пара пары (A, B). Тогда $P\subseteq Q$.*

Доказательство. Пусть g — единица пары (A, Q). Допустим, что $P\nsubseteq Q$. В таком случае из включения $Q+P\subseteq A$ и строгое включение $Q\subset Q+P$ вытекает, что $A=Q+P$. Тогда $g=q+p$, где $q\in Q, p\in P$. Для некоторого элемента $t\in P$, $p+t-pt\in B$. Отсюда получаем $gt-g=qt+pt-q-p$. Но тогда $(gt-t)-g=(qt-q)-(p+t-pt)$. Так как $gt-t\in Q$ и $p+t-pt\in B$, из этого получаем $g=(gt-t)-(qt-q)+(p+t-pt)$ — противоречие. Следовательно, $P\subseteq Q$. Лемма доказана.

Лемма 8 [5]. *Пусть S-альтернативное кольцо, T — идеал кольца S и $\mathfrak{M}$ — максимальный правый модулярный идеал кольца I. Тогда:*

(а) $\mathfrak{M}$ — правый идеал кольца R;

(б) *Существует максимальный правый модулярный идеал Q кольца R, такой, что $\mathfrak{M}=I\cap Q$.*

Теорема 3. *Радикальные замыкания Клейнфельда и Смайли совпадают.*

Доказательство. Ввиду леммы 7, $k\leq\delta$. Допустим, что $k<\delta$. В током случае существует k полупростая и δ-радикальная ненулевая пара (A, B). Это означает, что каждый квазирегулярный по модулю B правый идеал кольца R, содержащийся в A, содержится в B и что пара (A, B) не содержит ненулевых модулярных (примитивных) фактор-пар. Пусть $I=I(A)$.

(а) Пусть $I \subseteq B$. Тогда $(A, A, R) \subseteq B$. В таком случае для каждого $x \in A$ множество $\mathfrak{M}_x = B + \{xy - y \mid y \in A\}$ является правым идеалом кольца R, а пара $(A, \mathfrak{M}_x)$ — модулярная (с единицей x) фактор-пара пары (A, B) и, следовательно, $A = \mathfrak{M}_x$. Тогда $x = xy - y + b$, где $y \in A$, $b \in B$, т. е. пара (A, B) — квазирегулярная. Отсюда вытекает, что $A \subseteq B$ — противоречие.

(б) Пусть I не $\subseteq B$. Тогда I строго содержит $I(B)$. Сначала покажем, что кольцо $I/I(B)$ — δ-полупросто. Действительно, так как δ — наследственный радикал, то $\delta(I/I(B))$ является идеалом кольца $R/I(B)$. Обозначим через K полный праобраз идеала $\delta(I/I(B))$ при каноническом эпиморфизме $R \to R/I(B)$. Ясно, что $I(B) \subseteq K \subseteq I$ и что K является квазирегулярным по модулю $I(B)$ идеал кольца R. В таком случае пара $(B+K, B)$ — квазирегулярная подпара пары (A, B) и, следовательно, $K \subseteq B$. Тогда $K \subseteq I(B)$, т. е. кольцо $I/I(B)$ — δ-полупросто. Теперь из доказанного вытекает, что $I(B)$ является пересечением $\cap\{\mathfrak{M}_i \mid i \in X\}$ максимальных правых модулярных идеалов кольца I. Ввиду леммы 8 пусть $\mathfrak{M}_i = I \cap Q_i (i \in X)$, где Q_i — максимальные правые модулярные идеалы кольца R. Допустим, что для любого $i \in X$ кольца $R/I(Q_i : R)$ являются ассоциативными. Тогда $(R, R, R) \subseteq \cap I(Q_i : R)$ и, следовательно, $(I, R, R) \subseteq I \cap (\cap Q_i) = I(B)$. В таком случае, рассматривая для каждого $x \in I$ множество $\mathfrak{M}_x = B + \{xt - t \mid t \in I\}$, заключаем, что пара $(B+I, B)$ является квазирегулярной. Тогда $I \subseteq B$ — противоречие. Следовательно, для некоторого $i_0 \in X$ кольцо $R/I(Q_{i_0} : R)$ является примитивным неассоциативным, т. е. алгеброй Кели — Диксона. Пусть $Q_{i_0} = Q$. Как мы уже отмечали, в таком случае $Q = I(Q : R)$. Теперь если B не $\subseteq Q$, то $B + Q = R$ и из включения $(B, B, R) \subseteq Q$ вытекает, что $(R, R, R) \subseteq Q$, которое является в противоречии с неассоциативностью кольца R/Q. Следовательно, $B \subseteq Q$. С другой стороны, A не $\subseteq Q$, так как I не $\subseteq Q$. Тогда пара $(A, Q \cap A)$ является примитивной ненулевой фактор-парой пары (A, B) — противоречие. В обоих рассмотренных случаях полученные противоречия показывают, что $k = \delta$. Теорема доказана.

Следствие. *Пара (A, B) является δ-полупростой тогда и только тогда, когда она не содержит ненулевых квазирегулярных подпар.*

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Андрунакиевич, Ю. М. Рябухин. Радикальные замыкания правых идеалов. *Доклады АН СССР*, 1975.
2. R. H. Bruck, E. Kleinfeld. The structure of alternative division rings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2, 1951, 878—880.
3. L. I. Davidov. Supernilpotent and underidempotent radical closures of right ideals. *Serdica*, 2, 1976, 315—324.
4. L. I. Davidov. Dual supernilpotent radical closures of right ideals. *Pliska*, 2, 1981, 61—68.
5. К. А. Жевлаков. Квазирегулярные идеалы в конечно-порожденных альтернативных кольцах. *Алгебра и логика*, 11, 1972, 140—161.
6. E. Kleinfeld. Primitive alternative rings and semi-simplicity. *Amer. J. Math.*, 77, 1955, 725—730.
7. M. Smiley. The radical of alternative rings. *Ann. of Math*, 49, 1948, 702—709.

Единый центр математики и механики
1090 София П. Я. 373

Поступила 16. 7. 1976