PLISKA

STUDIA MATHEMATICA BULGARICA

ПЛИСКА

БЪЛГАРСКИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТУДИИ

УЛЬМОВСКИЕ ИНВАРИАНТЫ СИЛОВСКИХ p-ПОДГРУПП ГРУППОВЫХ АЛГЕБР АБЕЛЕВЫХ ГРУПП НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ p

ТОДОР Ж. МОЛЛОВ

Пусть L — поле ненулевой характеристики p, K — его максимальное совершенное подполе, G — абелева группа, G_p — ее силовская p-подгруппа и $S(LG)$ — силовская p-поргруппа группы единиц групповой алгебры LG. Пусть ω — первое бесконечное порядковое число и $|M|$ — мощность множества M. Если α — порядковое число, то $G^{p^\alpha}(L^{p^\alpha})$ определяем индуктивно: $G^{p^0}=G$; $G^p=\{g^p \mid g\in G\}$; если $\alpha=\beta+1$, то $G^{p^\alpha}=(G^{p^\beta})^p$, а если $\alpha-1$ не существует, то $G^{p^\alpha}=\cap_{\beta<\alpha}G^{p^\beta}$. Исчисляются α-ые ульмовские инварианты $f_\alpha(S)$ группы $S(LG)$. Именно, если L^{p^α} или G^{p^α} бесконечны и $(G_p)^{p^\alpha}\neq 1$, то для $\alpha<\omega$ имеет место $f_\alpha(S)=\max(|L|, |G^{p^\alpha}|)$, а для $\alpha\geqq\omega$ выполнено $f_\alpha(S)=\max(|K|, |G^{p^\alpha}|)$. Характеризация группы $S(LG)$, когда L и G являются счетными или конечными, дана автором (1976). Доказывается, что $S(LG)$ обладает свойством сократимости тогда и только тогда, когда L и G конечны, а также, что $S(LG)$ изоморфна своему прямому множителю тогда и только тогда, когда L или G бесконечны.

Пусть LG — групповая алгебра абелевой группы G над полем L характеристики $p>0$ и $S(LG)$ — силовская p-подгруппа группы единиц алгебры LG. В случае, когда G — абелева p-группа, $S(LG)$ изучалась в [1] и [3]—[5], а когда G смешанная и счетная — в [6]. Настоящая работа продолжает исследования работы [6].

Используем следующие обозначения:

$|M|$ — мощность множества M;

$\setminus$ — разность двух множеств;

ω — наименьшее бесконечное порядковое число;

$\aleph_0$ — наименьшее бесконечное кардинальное число,

G_p — силовская p-подгруппа группы G;

$G[p]=\{g \mid g^p=1, g\in G\}$;

$\langle\cdots\rangle$ — подгруппа, порожденная ...;

$|G:H|$ — индекс подгруппы H в группе G;

Π, $\times$ — знаки для прямых произведений групп;

$n(x)=\Sigma\alpha_i$, если $x=\Sigma\alpha_i g_i$, $\alpha_i\in L$, $g_i\in G$;

если α — порядковое число, то G^{p^α} определяем индуктивно: $G^{p^0}=G$, $G^p=\{g^p \mid g\in G\}$; если $\alpha=\beta+1$, то $G^{p^\alpha}=(G^{p^\beta})^p$, а если α — предельное порядковое число, то $G^{p^\alpha}=\cap_{\beta<\alpha}G^{p^\beta}$; $G^{(\alpha)}=G^{p^{\omega\alpha}}$; аналогично определяются L^{p^α} и $L^{(\alpha)}$, причем $L^{(0)}=L$ и $G^{(0)}=G$.

Если G — абелева p-группа, то $\operatorname{rank}(G^{p^\alpha}[p]/G^{p^{\alpha+1}}[p])$ называется α-м инвариантом Ульма-Капланского (α-м ульмовским инвариантом) группы G

и обозначается через $f_\alpha(G)$ [9, с. 182]. Говорят, что группа G обладает свойством сократимости [2], если для любых абелевых групп H и K из изоморфизма $G\times H\cong G\times K$ следует $H\cong K$.

Лемма 1. *Если G — абелева группа, $G_p\neq 1$ и по крайней мере одно из кардинальных чисел $|L|$ и $|G|$ бесконечно, то $|S(LG)[p]|=\max(|L|, |G|)$.*

Доказательство. Обозначим $S(LG)[p]=\tilde{N}$ и $S(LG_p)[p]=N^*$. Очевидно $\tilde{N}\supseteq N^*$. Так как ввиду [5] $|N^*|\geqq\max(|L|, |G_p|)$, то достаточно доказать, что $|\tilde{N}|\geqq|G/G_p|$. Пусть $c_1, c_2, \ldots$ — система представителей смежных классов группы G по подгруппе G_p, в которой не содержится представитель класса G_p. Элементы $A_\alpha=1+(1-g)c_\alpha$, $1\neq g\in G_p[p]$, принадлежат группе $\tilde{N}$. При $\alpha\neq\beta$ имеет место $A_\alpha\neq A_\beta$. В противном случае $c_\alpha-gc_\alpha=c_\beta-gc_\beta$, что невозможно, так как элементы левой части этого равенства принадлежат классу $c_\alpha G_p$, пока в его правой части не встречаются элементы этого класса.

Теорема 2. *Пусть G — абелева группа, L — поле ненулевой характеристики p, K — его максимальное совершенное подполе, $S(LG)$ — силовская p-подгруппа группы единиц групповой алгебры LG и $f_\alpha(S)$ — α-ый ульмовский инвариант группы $S(LG)$, где α — произвольное порядковое число. Если группа G^{p^α} p-делима и $L^{p^\alpha}=K$, то $f_\alpha(S)=0$. Пусть по крайней мере одно из этих условий не выполнено. Тогда, если L^{p^α} или G^{p^α} бесконечны и $(G_p)^{p^\alpha}\neq 1$, то*

$$f_\alpha(S)=\begin{cases}\max(|L|, |G^{p^\alpha}|), & \text{если } \alpha<\omega;\\ \max(|K|, |G^{p^\alpha}|), & \text{если } \alpha\geqq\omega;\end{cases}\tag{1}$$

а если L^{p^α} и G^{p^α} конечны, то

$$f_\alpha(S)=k_\alpha l_\alpha[(p^{t_\alpha}-1)\mu'_\alpha-(p^{t_{\alpha+1}}-1)\mu'_{\alpha+1}],\tag{2}$$

где

$$k_\alpha=|G^{p^\alpha}: G_p^{p^\alpha}|,\quad l_\alpha=\log_p|L^{p^\alpha}|,\quad p^{t_\alpha}=|G_p^{p^\alpha}[p]| \text{ и } \mu'_\alpha=|G_p^{p^\alpha}: G_p^{p^\alpha}[p]|.$$

Максимальная делимая подгруппа группы $S(LG)$ является $S(KG^*)$, где G^* — максимальная p-делимая подгруппа группы G и если $(G^*)_p\neq 1$, то $S(KG^*)$ — прямое произведение квазициклических групп, мощность множества которых равняется $\max(|K|, |G^*|)$.

Доказательство. За исключением формулы (1) доказательство теоремы аналогично [6]. Если $\alpha<\omega$, то $|L^{p^\alpha}|=|L|$, а если $\alpha\geqq\omega$, то $|L^{p^\alpha}|=K$, следовательно, достаточно доказать формулу (1) для $\alpha=0$. Ульмовский инвариант $f_0(S)$ равняется мощности множества прямых множителей факторгруппы $N^*=S(LG)[p]/S(L^pG^p)[p]$ в ее прямое разложение на циклические группы, так как имея в виду [6] $S^p(LG)=S(L^pG^p)$. Обозначим $G_p=F$. Различаем следующие случаи.

а) $F^p=1$. По [6] имеет место $(G^p)_p=F^p=1$ и $S(L^pG^p)=1$, следовательно, $N^*\cong S(LG)[p]$, откуда по лемме 1 получается $f_0(S)=\max(|L|, |G|)$.

б) Пусть $F^p\neq 1$. Обозначим $|G|=\mu$ и $|L|=\Lambda$. Выбираем элемент $1\neq a\in F^p[p]$ и образуем элементы $x_{ij}=[1+a_i(1-a)g_j]S(L^pG^p)[p]$, $a_i\in L$ $(i\in I)$, $g_j\in G$ $(j\in J)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) если $\Lambda > \mu$ и поле L не является совершенным, то $g_j = 1$, т. е. $J = \{1\}$ и $a_i = a_0 a'_i$, где a'_i пробегают $L^p \setminus \{0\}$, а a_0 — фиксированный элемент множества $L \setminus L^p$, т. е. $|I| = \Lambda$;

2) если $\Lambda > \mu$ и поле L совершенно, то $\{a_i\}_{i \in I} = L$, а $g_j = g$ — фиксированный элемент множества $G \setminus G^p$;

3) если $\mu \geqq \Lambda$ и группа G не является p-делимой, то $a_i = 1$, $|J| = \mu$ и 3.1), если $|G/G^p| \geqq |G^p|$, то $\{g_j\}_{j \in J}$ — система представителей смежных классов группы G по подгруппе G^p (без представителя класса G^p), а 3.2), если $|G^p| \geqq |G| G^p|$, то $g_j \in G \setminus G^p$, $j \in J$, равенство $g_j = g_l a$ невозможно при $j > l \in J$ и $\{g_j\}_{j \in J} \subseteq gG^p$;

4) если $\mu \geqq \Lambda$, G — p-делимая группа, для разложения $G = F \times H$ имеет место $|F| \geqq |H|$ и для разложения

$$F = \Pi_{s \in A} P_s \tag{3}$$

в прямое произведение квазициклических групп выполнено $|A| \geqq \aleph_0$, то $a_i = a$ — фиксированный элемент из $L \setminus L^p$, $J = A$, $g_j \in P_j$ и $a \in P_1$;

5) если $\mu \geqq \Lambda$, G — p-делимая группа, для разложения $G = F \times H$ имеет место $|F| \geqq |H|$ и для разложения (3) группы F в прямое произведение квазициклических групп выполнено $|A| < \aleph_0$, то $a = g_1, g_2, \ldots$ — система образующих квазициклической группы P_1, для которой $g_{n+1}^p = g_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, а $a_i = a$ — фиксированный элемент из $L \setminus L^p$;

6) если $\mu \geqq \Lambda$, G — p-делимая группа и для разложения $G = F \times H$ имеет место $|F| < |H|$, то $a_i = a$ — фиксированный элемент из $L \setminus L^p$ и $\{g_j\}_{j \in J} = H$.

Элементы a_i и g_j действительно можно выбрать указанным образом. Рассмотрим случай 3). Его подслучай 3.1) очевиден. В подслучае 3.2), согласно [4, лемма 3], можно выбрать такую систему элементов $\{g'_j\}_{j \in J} \subseteq G^p$, что равенство $g'_j = g'_l a$ невозможно при $j < l$, $l \in J$ и $|J| = |G^p| = \mu$. Положим $g_j = g'_j g$, где g — фиксированный элемент из $G \setminus G^p$. Тогда действительно равенство $g_j = g_l a$ невозможно. Условия, которым должны отвечать элементы a_i и g_j, проверяются тривиально в остальных случаях. Очевидно, что в рассматриваемых случаях $\max(|I|, |J|) = \max(|L|, |G|)$.

Если $(i, j) \neq (k, l)$, где $i, k \in I$, а $j, l \in J$, то $x_{ij} \neq x_{kl}$. Действительно, допустим, что в случае 1) $x_{ij} = x_{kl}$. Положим $a_i = \alpha$, $a'_i = \alpha'$, $a_k = \beta$, $a'_k = \beta'$, $x_{ij} = x_\alpha$, $x_{kl} = x_\beta$, $1 - a = x$, $1 + \alpha x = y_\alpha$ и $1 + \beta x = y_\beta$. Тогда $y_\alpha^{-1} = \Sigma_{k=0}^{p-1}(-1)^k \alpha^k x^k$, $y_\alpha^{-1} y_\beta = 1 + (\alpha - \beta)\Sigma_{k=1}^{p-1}(-1)^k \alpha^{k-1} x^k$ и $y_\alpha^{-1} y_\beta \in L^p G^p$. Нетрудно видеть, что при $p > 2$ коэффициенты перед a^{p-1} и a^{p-2} в развитии $y_\alpha^{-1} y_\beta$ являются соответственно $(\alpha - \beta)\alpha^{p-2}$ и $(\alpha - \beta)(\alpha + 1)\alpha^{p-3}$, следовательно, для их частного имеет место $\alpha/(\alpha + 1) \in L^p$ (так как указанные коэффициенты должны принадлежать L^p), откуда получится противоречие $\alpha \in L^p$. При $p = 2$ коэффициент перед a получается $\alpha + \beta = \alpha_0(\alpha' + \beta') \notin L^p$, что является противоречием.

В случаях 2)—6) из равенства $x_{ij} = x_{kl}$ следует $1 + a_i(1 - a)g_j = [1 + a_k(1 - a)g_l]\Sigma \beta_s^p u_s^p$, где $\beta_s \in L$, $u_s \in G$.

В левой части этого равенства корень p-й степени извлекается только из элемента 1, а в его правой части (после эвентуального приведения подобных членов) — из элементов произведения $1 . \Sigma \beta_s^p u_s^p$ и только из них следовательно, $\Sigma \beta_s^p u_s^p = 1$. Тогда $a_i g_j - a_i a g_j = a_k g_l - a_k a g_l$. Из этого равенства следует

(4) $$g_j = ag_l.$$

Если имеет место условие 2), то получается противоречие $a=1$. В случае 3.2) равенство (4) противоречиво, а в случае 3.1) оно приводит к противоречию $g_jG^p = g_lG^p$. В случае 4) равенство (4) противоречит прямому разложению (3). В случае 5), возводя равенство (4) в квадрат, получается противоречие $g_{j-1} = g_{l-1}$. В случае 6) равенство (4) противоречит прямому разложению $G = F \times H$. Следовательно, $|N^*| = \max(|L|, |G|)$ и $f_0(S) = \max(|L|, |G|)$.

Предложение 3. *Если G — абелева группа и L — поле ненулевой характеристики p, то $S(LG_p)$ — сервантная подгруппа группы $S(LG)$.*

Доказательство. Так как $G_p \cap G^{p^n} = G_p^{p^n}$, то по [6]

$$S(LG_p) \cap S^{p^n}(LG) = S[(L \cap L^{p^n})(G_p \cap G^{p^n})] = S(L^{p^n} G_p^{p^n}) = S^{p^n}(LG_p),$$

т. е. $S(LG_p)$ — сервантная подгруппа группы $S(LG)$.

Следствие 4. *Пусть G — абелева группа и L — поле ненулевой характеристики p. Нееединичная силовская p-подгруппа $S(LG)$ группы единиц групповой алгебры LG обладает свойством сократимости тогда и только тогда, когда L и G конечны.*

Доказательство. Пусть $S(LG)$ обладает свойством сократимости. Так как $S(LG) \neq 1$, то $G_p \neq 1$. Допустим, что по крайней мере одно из кардинальных чисел $|L|$ и $|G|$ бесконечно. Если предположим, что поле L совершенно и группа G p-делима, то по теореме 2 группа $S(LG)$ будет делима и разложится в прямое произведение квазициклических групп, мощность множества которых равняется $\max(|L|, |G|) \geq \aleph_0$. Следовательно, $S(LG)$ не может обладать свойством сократимости. Пусть, поэтому, или поле L не является совершенным, или группа G не является p-делимой. Если B^* — произвольная базисная подгруппа группы $S(LG)$ и $B^* = \Pi_{n=1}^{\infty} B_n$, где B_n — прямое произведение циклических групп порядка p^n, то из [9, теорема 33.1, с. 165] следует, что $S(LG)[p] = B_1[p] \times S^p(LG)[p]$ или $B_1 \cong S(LG)[p]/S^p(LG)[p]$. Отсюда, по теореме 2, заключаем, что $|B_1| = \max(|L|, |G|)$, следовательно, $f_0(B^*)$ — бесконечное кардинальное число. Это противоречит статье [2], согласно которой, если одна абелева группа обладает свойством сократимости, то ульмовские инварианты ее произвольной базисной подгруппы конечны. Следовательно, L и G конечны. Обратная часть утверждения следует по [2].

Следствие 5. *Пусть L — поле ненулевой характеристики p и G — абелева группа. Группа $S(LG)$ изоморфна своему прямому множителю, т. е. является ID-группой тогда и только тогда, когда или L, или G бесконечны.*

Доказательство. Пусть G_p — редуцированная группа. По [6] следует, что $S(LG)$ — редуцированная абелева p-группа. По [8] $S(LG)$ является ID-группой тогда и только тогда, когда по крайней мере один ее ульмовский инвариант бесконечен, т. е. по теореме 2 тогда и только тогда, когда L или G бесконечны.

Пусть $G_p = P \times R$, где $P \neq 1$ — максимальная делимая подгруппа группы G_p. По [6] имеет место разложение $S(LG) = S(KG^*) \times Q$, где G^* — максимальная p-делимая подгруппа группы G, K — максимальное совершенное подполе поля L, $S(KG^*)$ — максимальная делимая подгруппа группы $S(LG)$ и $S(KG^*)$ разлагается в прямое произведение квазициклических групп, мощность множества которых равняется $\max(|K|, |G^*|)$, следовательно, $S(KG^*)$, т. е. $S(LG)$ является ID-группой.

Предложение 6. *Пусть G — абелева группа, p — простое число, $G = G_p \times U$, H —* подгруппа группы G_p и *L — поле характеристики p. Тогда*

а) *$S(LG)$ — прямое произведение циклических групп тогда и только тогда, когда G_p — прямое произведение циклических групп;*

б) *если U — p-делимая группа, то $S(LG)/S[L(H\times U)]$ — прямое произведение циклических групп тогда и только тогда, когда G_p/H — прямое произведение циклических групп.*

Доказательство. Обозначим $G_p = F$. Докажем а). Пусть F — прямое произведение циклических групп. Тогда F можно представить как объединение возрастающей последовательности $F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n \subseteq \cdots$ таких своих подгрупп, что высоты элементов каждой из подгрупп F_n в F конечны и ограничены в совокупности числом N. Обозначим $G_n = F_n \times U$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда $S(LG)$ — объединение возрастающей последовательности $S(LG_1) \subseteq \cdots \subseteq S(LG_n) \subseteq \cdots$ таких подгрупп группы $S(LG)$, что высоты элементов $S(LG_n)$ в $S(LG)$ ограничены числом N. Если допустим противное, то будет существовать натуральное число $s > N$ и неединичный элемент $c = b_1 + b_2 g_2 + \cdots + b_k g_k$, где по [6] $b_i \in LF_n$, $g_i \in U$, $n(b_1) = 1$, $n(b_2) = \cdots = n(b_k) = 0$, так что c имеет высоту s в $S(LG)$, т. е. существует $z = b'_1 + b'_2 g'_2 + \cdots$, $b'_i \in LF$, $n(b'_1) = 1$, $n(b'_2) = n(b'_3) = \cdots = 0$, а $1, g'_2, g'_3, \ldots$ — различные элементы из U, так что $c = z^{p^s}$. Так как $1, g_2'^{p^s}, g_3'^{p^s}, \ldots$ — представители различных смежных классов группы G по F, то $b_i'^{p^s} = b_i\ (i = 1, 2, \ldots, k)$. Следовательно, существует по крайней мере одно $f_i \neq 1$, входящее в запись некоторого b_r, так что $f_i = \varphi^{p^s}$, $\varphi \in F$, что есть противоречие, так как высоты элементов подгруппы F_n в F не превосходят N. Обратная часть утверждения очевидна.

б) Пусть $S(LG)/S[L(H\times U)]$ — прямое произведение циклических групп. Тогда $G_p/H \cong G_p \times U/H \times U = G/\{S[L(H\times U)] \cap G\} \cong \langle S[L(H\times U)], G\rangle / S[L(H\times U)] \subseteq S(LG)/S[L(H\times U)]$, откуда следует, что G_p/H — прямое произведение циклических групп.

Пусть, обратно, F/H — прямое произведение циклических групп. Тогда F/H представляется как объединение возрастающей последовательности $F_1/H \subseteq \cdots \subseteq F_i/H \subseteq \cdots$ таких подгрупп F_i/H группы F/H, что высоты элементов группы F_i/H в F/H не превосходят фиксированное число N. Тогда $S(LG)/S[L(H\times U)] = \widetilde{S}$ представляется как объединение возрастающей последовательности $S(LG_1)/S(LH^*) \subseteq \cdots \subseteq S(LG_i)/S(LH^*) \subseteq \cdots$, где $G_i = F_i \times U$ и высоты элементов группы $S(LG_i)/S(LH^*)$ в $\widetilde{S}$ не превосходит N, а $H^* = H \times U$. Если допустим противное, то аналогично случаю а) для $s > N$ будет существовать неединичный элемент $c \in S(LG_i)$ и $z \in S(LG)$, так что $cS[L(H\times U)] = z^{p^s} S[L(H\times U)]$. Тогда

$$(5)\qquad b_1 + b_2 g_2 + \cdots + b_k g_k = (b_1'^{p^s} + b_2'^{p^s} g_2'^{p^s} + \cdots + b_k'^{p^s} g_k'^{p^s})(\widetilde{b}_1 + \widetilde{b}_2 \widetilde{g}_2 + \cdots + \widetilde{b}_t \widetilde{g}_t)$$

где $\widetilde{b}_i \in LH$, $n(\widetilde{b}_1) = 1$, $n(\widetilde{b}_2) = \cdots = n(\widetilde{b}_t) = 0$ и $\widetilde{g}_i \in U$. Из (5) получаем

$$(6)\qquad b_1 = b_1'^{p^s} \widetilde{b}_1 + b_2'^{p^s} \widetilde{b}_{t_2} + \ldots, \quad b_l = b_{i_1}'^{p^n} \widetilde{b}_1 + \cdots$$

Так как $cS[L(H\times U)]$ — нееединичный элемент, то по крайней мере одно $b_i\notin LH$, т. е. существует $f\in F_i\setminus H$, входящее в запись b_i. Тогда из (6) следует $f=\varphi p^{s^i}\varphi'$, $\varphi\in F$, $\varphi'\in H$ и $fH=\varphi^{p^s}H$, т. е. нееединичный элемент fH группы F_i/H имеет высоту $s>N$ в F/H, что противоречит условию.

Следствие 7. *Если для абелевой группы G имеет место $G=G_p\times U$, U — p-делимая группа и L — совершенное поле характеристики p, то фактор-группа $S(LG)/S^{(1)}(LG)$ — прямое произведение циклических групп тогда и только тогда, когда $G_p/G_p^{(1)}$ — прямое произведение циклических групп.*

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Д. Берман. Групповые алгебры счетных абелевых p-групп. *Publ. Math. Debrecen*, **14**, 1967, 365—405.
2. P. Crawley. The Cancellation of torsion groups in direct sums. *J. Algebra*, **2**, 1965, 432—442.
3. Т. Ж. Моллов. О мультипликативных группах модулярных групповых алгебр примарных абелевых групп произвольной мощности. I. *Publ. Math. Debrecen*, **18**, 1971, 9—21.
4. Т. Ж. Моллов. Силовские p-подгруппы групп единиц модулярных групповых алгебр абелевых p-групп. *Сердика*, **1**, 1975, 249—260.
5. Т. Ж. Моллов. Върху улмовските инварианти на групата от нормираните единици на модулярните групови пръстени на примарните абелеви групи. *Известия Мат. инст. БАН*, **15**, 1974, 343—348.
6. Т. Ж. Моллов. Силовские p-подгруппы групповых алгебр счетных абелевых групп над полем характеристики p. *Сердика*, **2**, 1976, 219—235.
7. Т. Ж. Моллов. Сервантные подгруппы и выделение прямых множителей в группах единиц модулярных групповых алгебр абелевых p-групп. *Научни трудове Пловд. унив.*, **11**, 1973, кн. 1, 9—15.
8. R. S. Pierce. Isomorphic direct summands of abelian groups. *Math. Ann.*, **153**, 1964, 21—37.
9. Л. Фукс. Бесконечные абелевые группы. Т. 1. Москва, 1974, с. 335.

Пловдивский университет
4000 Пловдив

Поступила 20. 9. 1976